

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

СЕРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

Том 21

AS
262
A6248
v.21
1957
MATH
PER.

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

Москва ★ 1957

Reprinted with the permission of Mezhdunarodnaja Kniga, Moscow

JOHNSON REPRINT CORPORATION

111 Fifth Avenue
New York 3, New York

Johnson Reprint Company Limited
Berkeley Square House
London, W. 1

Редакционная коллегия:

акад. С. Н. Бернштейн, акад. И. М. Виноградов (главный редактор)
акад. С. Л. Соболев, доктор физ.-матем. наук И. Р. Шафаревич

В. С. ВЛАДИМИРОВ

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым)

В работе изучается линейное интегро-дифференциальное уравнение переноса. Доказывается теорема существования и единственности, а также устанавливается непрерывная зависимость решения от коэффициентов и правой части уравнения. Изучаются свойства собственных чисел и собственных функций соответствующей однородной задачи. Доказывается сходимость метода последовательных приближений, а также устанавливается новый вариационный принцип и дается его обоснование.

§ 1. Введение. Постановка задачи

Предметом настоящей работы является изучение линейного интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{1}{a(P)}(s, \text{grad } \varphi) + \varphi = \lambda b(P) \int_{\Omega} \varphi(s, P) ds + F(s, P) \quad (1.1)$$

относительно неизвестной функции $\varphi(s, P)$, зависящей от точки P открытого множества G n -мерного евклидова пространства R_n и от направления s в R_n .

Уравнение (1.1) с соответствующими граничными условиями возникает в задачах изучения стационарных, моноэнергетических и изотропных процессов переноса. [К таким процессам, например, относятся явления переноса лучистой энергии [см. (1), гл. 1] и диффузии нейтронов [см. (2)], где приведено более общее уравнение, учитывающее энергетическую зависимость]. При этом искомая функция $\varphi(s, P)$ обозначает плотность частиц в данной точке P , летящих в направлении s . Функции $a(P)$ и $b(P)$, входящие в уравнение (1.1), характеризуют свойства среды, в которой происходит процесс переноса; функция $F(s, P)$ характеризует интенсивность источников. Подробности по поводу физического содержания уравнения (1.1) можно найти в упомянутых работах (1) и (2). В монографии (1) приведен также список литературы, посвященной этому вопросу.

Однако исследования, связанные с уравнением (1.1), в основном, были направлены на получение точных или приближенных решений в простейших случаях. В качестве примера одной из простейших задач следует упомянуть известную задачу Милна, сводящуюся к квадратурам при помощи преобразования Винера — Хопфа.

Вопросы математического содержания такие, как корректность задачи (существование, единственность и непрерывная зависимость от a , b и F решения φ уравнения (1.1)), свойства собственных значений и собственных функций, сходимость метода последовательных приближений и др., как правило, систематически не освещались.

Целью настоящей работы является попытка сформулировать математическую постановку задачи для уравнения (1.1) и на этой основе с единой точки зрения обосновать ряд известных фактов, а также получить новые результаты, например установить и обосновать вариационный принцип, связанный непосредственно с дифференциальной частью уравнения (1.1).

Для дальнейшего введем основные определения и обозначения.

В пространстве R_n введем обычную меру Лебега и соответствующий ей процесс интегрирования. Объем элементарного сегмента в R_n с вершиной в точке P обозначим через dP .

Множество всех единичных векторов направлений s в R_n обозначим через Ω . Оно изоморфно множеству точек единичной сферы в R_n . Поэтому, вводя на единичной сфере в R_n меру, мы, тем самым, введем меру в $(n-1)$ -мерном пространстве Ω и соответствующий ей процесс интегрирования. Объем элементарного сегмента в Ω с вершиной в точке s будем обозначать через ds , меру всего пространства Ω — через ω_n :

$$\omega_n = \int_{\Omega} ds = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Введем в рассмотрение $(2n-1)$ -мерное пространство $\Omega \times R_n$ — декартово произведение пространств Ω и R_n , так называемое фазовое пространство, состоящее из пар точек (s, P) , где s пробегает Ω , а P пробегает R_n . Другими словами, точки (s, P) из $\Omega \times R_n$ можно отождествить с множеством псевдобазисных единичных векторов в R_n , направления которых s пробегает Ω , а точки приложения P пробегает R_n .

Меры, введенные в пространствах Ω и R_n , индуцируют соответствующую меру в пространстве $\Omega \times R_n$ и, стало быть, процесс интегрирования в нем [см. (3), гл. III]. В частности, объем элементарного сегмента в пространстве $\Omega \times R_n$ с вершиной в точке (s, P) равен $ds dP$.

В уравнении (1.1) символ $(s, \text{grad } \varphi)$ обозначает обычное скалярное произведение векторов s и $\text{grad } \varphi$ в R_n , т. е. производную функции $\varphi(s, P)$ в направлении s :

$$(s, \text{grad } \varphi) \equiv \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi(s, P + \xi s) \Big|_{\xi=0}. \quad (1.2)$$

Мы будем предполагать открытое множество G ограниченным. Обозначим через d диаметр G , через \bar{G} — замыкание G и через $\Gamma = \bar{G} - G$ — границу G . Предположим, что n -мерная мера границы Γ равна нулю. Пусть, далее, любая прямая линия в R_n пересекает открытое ограниченное множество G по конечному числу интервалов. Сформулируем последнее предположение в аналитической форме.

Пусть $s \in \Omega$. Обозначим через π_s ортогональную проекцию G на плоскость, перпендикулярную направлению s и проходящую через некоторую фиксированную точку O . Множество π_s — $(n-1)$ -мерное, открытое и ограниченное. Пусть Q обозначает переменную точку множества π_s . Проведем через точку Q прямую, параллельную направлению s :

$$\{Q + \xi s, -\infty < \xi < \infty\}.$$

Обозначим через $\pi_{s,Q}$ множество, получающееся от пересечения указанной прямой с множеством G . По построению, множество $\pi_{s,Q}$ — непустое, одномерное, открытое и ограниченное. По предположению, для каждой пары точек $(s, Q) \in \Omega \times \pi_s$ множество $\pi_{s,Q}$ представляет собой соединение конечного числа интервалов:

$$\pi_{s,Q} = \sum_{i=1}^{N(s,Q)} \{Q + \xi s, \xi_i(s, Q) < \xi < \eta_i(s, Q)\}. \quad (1.3)$$

Интервалы в (1.3) можно считать занумерованными так, что выполнены неравенства $\eta_i \leq \xi_{i+1}$. Так как диаметр G равен d , то $0 < \eta_N - \xi_1 \leq d$.

По построению имеем: при всех $s \in \Omega$

$$\pi_s = \pi_{-s},$$

при всех $(s, Q) \in \Omega \times \pi_s$

$$\pi_{s,Q} = \pi_{-s,Q}.$$

Отсюда и из (1.3) будет следовать при всех $(s, Q) \in \Omega \times \pi_s$:

$$\begin{aligned} N(s, Q) &= N(-s, Q) = N, \quad \xi_i(s, Q) = -\eta_{N-i-1}(-s, Q) = \xi_i, \\ \eta_i(s, Q) &= -\xi_{N-i-1}(-s, Q) = \eta_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Формула (1.3) дает разложение G при каждом s на декартово произведение $(n-1)$ -мерного множества π_s и одномерного множества $\pi_{s,Q}$:

$$G = \pi_s \times \pi_{s,Q}.$$

Это разложение выражает взаимно однозначное преобразование точек $P \in G$ в точки $(Q, \xi) \in \pi_s \times \pi_{s,Q}$ по формуле:

$$P = Q + \xi s. \quad (1.5)$$

Преобразование (1.5) есть поворот в R_n ; поэтому оно является в обе стороны непрерывным и непрерывно дифференцируемым по всем аргументам с якобианом, равным 1. Следовательно, преобразование (1.5) преобразует функции, измеримые на $\Omega \times G$, в функции, измеримые на $\Omega \times \pi_s \times \pi_{s,Q}$. Таким образом, мы пришли к следующей лемме.

ЛЕММА 1.1. Для того чтобы функция $F(s, P)$ была суммируемой на $\Omega \times G$, необходимо и достаточно, чтобы функция $F(s, Q + \xi s)$ была суммируемой на $\Omega \times \pi_s \times \pi_{s,Q}$, причем имеет место равенство:

$$\int_{\Omega \times G} F(s, P) ds dP = \int_{\Omega \times \pi_s \times \pi_{s,Q}} F(s, Q + \xi s) ds dQ d\xi.$$

Введем основные функциональные пространства, в которых мы будем

изучать уравнение (1.1):

1. Пространство C вещественных непрерывных на \bar{G} функций с нормой

$$\|n\|_C = \max_{P \in \bar{G}} |n(P)|, \quad n \in C.$$

Как известно, пространство C — полное и сепарабельное.

2. Пространства M и \mathfrak{M} вещественных, измеримых и почти всюду ограниченных соответственно на G и $\Omega \times G$ функций с нормами

$$\|n\|_M = \sup_{P \in G} \text{vrai} |n(P)|, \quad n \in M,$$

$$\|\varphi\|_{\mathfrak{M}} = \sup_{(s, P) \in \Omega \times G} \text{vrai} |\varphi(s, P)|, \quad \varphi \in \mathfrak{M}.$$

Пространства M и \mathfrak{M} — полные, сходимость в них равномерная почти всюду.

Коэффициенты a и b , входящие в уравнение (1.1), предполагаются вещественными, почти всюду положительными в G и принадлежащими пространству M :

$$0 < a(P) \leq \|a\|_M = \alpha, \quad 0 < b(P) \leq \|b\|_M = \beta. \quad (1.6)$$

3. Пространства H и \mathfrak{H} вещественных функций, суммируемых с квадратом соответственно на G с весом $a(P)b(P)$ и на $\Omega \times G$ — с весом $a(P)$. Скалярное произведение и норму в пространствах H и \mathfrak{H} введем соответственно по формулам:

$$(n, m)_H = \int_G a(P)b(P)n(P)m(P)dP, \quad \|n\|_H = \sqrt{(n, n)_H}, \quad n, m \in H,$$

$$(\varphi, \psi) = \int_{\Omega \times G} a(P)\varphi(s, P)\psi(s, P)dsdP, \quad \|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}, \quad \varphi, \psi \in \mathfrak{H}.$$

Известно, что введенные пространства H и \mathfrak{H} — полные (гильбертовы) и сепарабельные.

Будем предполагать, что свободный член F в уравнении (1.1) принадлежит пространству \mathfrak{H} , λ — некоторый вещественный параметр.

Отметим простое утверждение: если $n \in H$, то $bn \subset \mathfrak{H}$, причем

$$\|bn\| \leq \sqrt{\beta \omega_n} \|n\|_H. \quad (1.7)$$

Действительно, принимая во внимание (1.6), а также определение норм в пространствах H и \mathfrak{H} , с помощью теоремы Фубини [см. (3), стр. 134] получим:

$$\|bn\|^2 = \int_{\Omega \times G} a(P)b^2(P)n^2(P)dsdP \leq \beta \omega_n \int_G a(P)b(P)n^2(P)dP = \beta \omega_n \|n\|_H^2.$$

Определим класс функций D , в котором будем искать решение уравнения (1.1). Этот класс функций будет одновременно и областью зада

ния линейного дифференциального выражения $l\varphi$, стоящего в левой части уравнения (1.1):

$$l\varphi = \frac{1}{a(P)}(s, \text{grad } \varphi) + \varphi.$$

В силу (1.2) и (1.5), выражение $l\varphi$ в точке $(s, P) = (s, Q, \xi)$ примет вид:

$$l\varphi = \frac{1}{a(Q + \xi s)} \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi(s, Q + \xi s) + \varphi(s, Q + \xi s).$$

Отнесем к классу D функции φ , обладающие следующими свойствами:

1) при почти всех $(s, Q) \in \Omega \times \pi_s$ функция $\varphi(s, Q + \xi s)$ абсолютно непрерывна на замкнутом множестве $\pi_{s, Q}$,

$$\pi_{s, Q} = \sum_{i=1}^N \{Q + \xi_i s, \xi_i \leq \xi \leq \eta_i\}.$$

2) При почти всех $(s, Q) \in \Omega \times \pi_s$ функция $\varphi(s, Q + \xi s)$ удовлетворяет граничным условиям:

$$a) \varphi(s, Q + \xi_1 s) = 0,$$

$$b) \varphi(s, Q + \xi_{i+1} s) = \varphi(s, Q + \eta_i s), \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

3) Функция φ такова, что $l\varphi \in \mathfrak{H}$.

Граничные условия 2) соответствуют следующим физическим предположениям: в случае а) отсутствует падающий извне поток частиц на G , в случае б) вне G поток частиц распространяется прямолинейно и плотность его не изменяется.

Замечание. Как будет видно из дальнейшего, условия 1) — 3) обеспечивают существование у функции φ обобщенных производных в G в смысле С. Л. Соболева [см. (9), гл. 1] вдоль почти всех направлений s из Ω , причем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} \equiv (s, \text{grad } \varphi) \in \mathfrak{H}.$$

ЛЕММА 1.2. Если $\varphi \in D$, то $\varphi \in \mathfrak{H}$, причем имеет место неравенство:

$$\|\varphi\| \leq (1 - e^{-\alpha d}) \|l\varphi\|.$$

Доказательство. Условимся считать, что все функции продолжены нулем на все пространство $\Omega \times R_n$.

Пусть $\varphi \in D$. В силу условия 3), $l\varphi \in \mathfrak{H}$. Обозначим $l\varphi$ через F . Таким образом, функция φ удовлетворяет уравнению $l\varphi = F$, $F \in \mathfrak{H}$, и условиям 1) и 2). После преобразования (1.5) это уравнение в точке $(s, Q, \xi) \in \Omega \times \pi_s \times \pi_{s, \Omega}$ примет вид:

$$\frac{1}{a(Q + \xi s)} \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi(s, Q + \xi s) + \varphi(s, Q + \xi s) = F(s, Q + \xi s). \quad (1.8)$$

По лемме 1.1 заключаем, что функция $a(Q + \xi s)F(s, Q + \xi s)$ суммируема на $\Omega \times \pi_s \times \pi_{s, Q}$. Отсюда и из теоремы Фубини следует, что эта функция суммируема на $\pi_{s, Q}$ при почти всех $(s, Q) \in \Omega \times \pi_s$. Принимая во внимание условия 1) и 2), которым должна удовлетворять функция φ ,

получим при почти всех (s, Q, ξ) из $\Omega \times \pi_s \times \pi_s, Q$:

$$\varphi(s, Q + \xi s) = \int_{\xi_1(s, Q)}^{\xi} a(Q + \xi' s) F(s, Q + \xi' s) \exp \left[- \int_{\xi'}^{\xi} a(Q + \xi'' s) d\xi'' \right] d\xi'. \quad (1.9)$$

Из (1.9) при помощи теоремы Фубини легко выводится измеримость функции $\varphi(s, Q + \xi s)$ на $\Omega \times \pi_s \times \pi_s, Q$. Отсюда и из леммы 1.1 следует, что функция $\varphi(s, P)$ измерима на $\Omega \times G$ и при почти всех $(s, P) \in \Omega \times G$ равна:

$$\varphi(s, P) = \int_0^d a(P - \xi s) F(s, P - \xi s) \exp \left[- \int_0^{\xi} a(P - \xi' s) d\xi' \right] d\xi. \quad (1.10)$$

Докажем теперь, что $\varphi \in \mathcal{H}$. Для этого, используя формулу (1.9), оценим повторный интеграл от измеримой неотрицательной функции $a(Q + \xi s) \varphi^2(s, Q + \xi s)$:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Omega \times \pi_s \pi_s, Q} a(Q + \xi s) \varphi^2(s, Q + \xi s) d\xi ds dQ = \\ &= \int_{\Omega \times \pi_s} \int_{\xi_1}^{\eta_N} a(Q + \xi s) \left\{ \int_{\xi_1}^{\xi} a(Q + \xi' s) F(s, Q + \xi' s) \cdot \right. \\ &\quad \cdot \exp \left[- \int_{\xi'}^{\xi} a(Q + \xi'' s) d\xi'' \right] d\xi' \left. \right\}^2 d\xi ds dQ. \end{aligned}$$

Применяя к внутреннему интегралу неравенство Буняковского -- Шварца, получим:

$$\begin{aligned} I &\leq \int_{\Omega \times \pi_s} \int_{\xi_1}^{\eta_N} a(Q + \xi s) \left\{ \int_{\xi_1}^{\xi} a(Q + \xi' s) F^2(s, Q + \xi' s) \exp \left[- \int_{\xi'}^{\xi} a(Q + \xi'' s) d\xi'' \right] d\xi' \cdot \right. \\ &\quad \left. \int_{\xi_1}^{\xi} a(Q + \xi' s) \exp \left[- \int_{\xi'}^{\xi} a(Q + \xi'' s) d\xi'' \right] d\xi' \right\} d\xi ds dQ. \end{aligned}$$

При почти всех $(s, Q, \xi) \in \Omega \times \pi_s \times \pi_s, Q$ имеют место неравенства:

$$\begin{aligned} &\int_{\xi_1}^{\xi} a(Q + \xi' s) \exp \left[- \int_{\xi'}^{\xi} a(Q + \xi'' s) d\xi'' \right] d\xi' = \\ &= 1 - \exp \left[- \int_{\xi_1}^{\xi} a(Q + \xi'' s) d\xi'' \right] \leq 1 - e^{-\alpha d}, \\ &\int_{\xi}^{\eta_N} a(Q + \xi' s) \exp \left[- \int_{\xi}^{\xi'} a(Q + \xi'' s) d\xi'' \right] d\xi' = \\ &= 1 - \exp \left[- \int_{\xi}^{\eta_N} a(Q + \xi'' s) d\xi'' \right] \leq 1 - e^{-\alpha d}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Принимая во внимание первое из неравенств (1.11), получим:

$$I \leq (1 - e^{-\alpha d}) \int_{\Omega \times \pi_s} \int_{\xi_1}^{\eta_N} a(Q + \xi s) \left\{ \int_{\xi_1}^{\xi} a(Q + \xi' s) F^2(s, Q + \xi' s) \cdot \right. \\ \left. \cdot \exp \left[- \int_{\xi'}^{\xi} a(Q + \xi'' s) d\xi'' \right] d\xi' \right\} d\xi ds dQ.$$

После перемены порядка интегрирования во внутренних интегралах найдем:

$$I \leq (1 - e^{-\alpha d}) \int_{\Omega \times \pi_s} \int_{\xi_1}^{\eta_N} a(Q + \xi' s) F^2(s, Q + \xi' s) \cdot \\ \left\{ \int_{\xi'}^{\eta_N} a(Q + \xi s) \exp \left[- \int_{\xi'}^{\xi} a(Q + \xi'' s) d\xi'' \right] d\xi \right\} d\xi' ds dQ.$$

Принимая во внимание второе из неравенств (1.11), получим:

$$I \leq (1 - e^{-\alpha d})^2 \int_{\Omega \times \pi_s} \int_{\xi_1}^{\eta_N} a(Q + \xi s) F^2(s, Q + \xi s) d\xi ds dQ = \\ = (1 - e^{-\alpha d})^2 \int_{\Omega \times \pi_s} \int_{\pi_s, Q} a(Q + \xi s) F^2(s, Q + \xi s) d\xi ds dQ.$$

По лемме 1.1, имеем:

$$I \leq (1 - e^{-\alpha d})^2 \int_{\Omega \times \pi_s \times \pi_s, Q} a(Q + \xi s) F^2(s, Q + \xi s) ds dQ d\xi = \\ = (1 - e^{-\alpha d})^2 \int_{\Omega \times G} a(P) F^2(s, P) ds dP = (1 - e^{-\alpha d})^2 \|F\|^2.$$

Таким образом, доказано существование повторного интеграла от измеримой неотрицательной функции $a(Q + \xi s) \varphi^2(s, Q + \xi s)$. На основании теоремы Фубини заключаем отсюда, что эта функция суммируема на $\Omega \times \pi_s \times \pi_s, Q$. Следовательно, применяя лемму 1.1, получим:

$$\|\varphi\|^2 = \int_{\Omega \times G} a(P) \varphi^2(s, P) ds dP = \\ = \int_{\Omega \times \pi_s \times \pi_s, Q} a(Q + \xi s) \varphi^2(s, Q + \xi s) ds dQ d\xi = I \leq (1 - e^{-\alpha d})^2 \|F\|^2.$$

Лемма доказана.

Множество функций D — линейное и содержится в \mathfrak{H} . Линейное дифференциальное выражение $\mathcal{L}\varphi$ вместе с областью его задания D определяет линейный оператор L с областью определения D .

Введем в линейном множестве D метрику при помощи скалярного произведения и соответствующей нормы:

$$(\varphi, \psi)_D = (L\varphi, L\psi), \quad \|\varphi\|_D = \sqrt{(\varphi, \varphi)_D} = \|L\varphi\|, \quad \varphi, \psi \in D.$$

Опираясь на лемму 1.2, легко заключить, что введенное скалярное произведение удовлетворяет соответствующим аксиомам. Таким образом, множество D мы превратили в гильбертово пространство (полнота его будет доказана ниже).

Обозначим через $S\varphi$ оператор усреднения по s , стоящий в правой части уравнения (1.1):

$$S\varphi = \int_{\Omega} \varphi(s, P) ds = n(P). \quad (1.12)$$

Принимая во внимание введенные операторы L и S , запишем уравнение (1.1) в операторной форме:

$$L\varphi = \lambda b S\varphi + F.$$

Теперь сформулируем поставленную задачу: найти функцию φ из D , удовлетворяющую уравнению (1.1) при почти всех $(s, P) \in \Omega \times G$.

§ 2. Свойства операторов S и L

В этом параграфе мы изучим свойства операторов S и L в пространстве \mathfrak{H} .

Оператор S — ограниченный и самосопряженный в \mathfrak{H} . Кроме того, он преобразует любую функцию φ из \mathfrak{H} в функцию n из H , причем

$$\|S\|_H \leq \sqrt{\beta \omega_n}. \quad (2.1)$$

Действительно, если $\varphi \in \mathfrak{H}$, то, по теореме Фубини, интеграл в (1.12) существует при почти всех $P \in G$ и является суммируемой функцией на G . Принимая во внимание (1.6), с помощью неравенства Буняковского — Шварца получим:

$$\begin{aligned} \|S\varphi\|_H^2 &= \int_G a(P) b(P) \left[\int_{\Omega} \varphi(s, P) ds \right]^2 dP \leq \beta \int_G a(P) \int_{\Omega} ds \int_{\Omega} \varphi^2(s, P) ds dP = \\ &= \beta \omega_n \int_{\Omega \times G} a(P) \varphi^2(s, P) ds dP = \beta \omega_n \|\varphi\|_{\mathfrak{H}}^2. \end{aligned}$$

Оператор S преобразует любую функцию φ из \mathfrak{M} в функцию n из M , причем

$$\|S\|_M = \omega_n. \quad (2.2)$$

Действительно, при $\varphi \in \mathfrak{M}$ имеем

$$\|S\varphi\|_M = \sup_{P \in G} \left| \int_{\Omega} \varphi(s, P) ds \right| \leq \int_{\Omega} \sup_{(s, P) \in \Omega \times G} |\varphi(s, P)| ds = \omega_n \|\varphi\|_{\mathfrak{M}},$$

откуда следует, что $\|S\|_M \leq \omega_n$. Но очевидно, что $\|S1\|_M = \omega_n \|1\|_{\mathfrak{M}}$. Таким образом, равенство (2.2) установлено.

Установим формулу, справедливую при всех $n \in H$ и $\varphi \in \mathfrak{H}$:

$$(bn, \varphi) = (n, S\varphi)_H. \quad (2.3)$$

Действительно, на основании (1.7), $bn \in \mathfrak{H}$. Поэтому имеем:

$$(bn, \varphi) = \int_{\Omega \times G} a(P)b(P)n(P)\varphi(s, P)ds dP = \int_G a(P)b(P)n(P) \int_{\Omega} \varphi(s, P)ds dP = (n, S\varphi)_H.$$

Введем в пространстве \mathfrak{H} унитарный оператор U по формуле:

$$UF = F(-s, P) \quad (2.4)$$

при почти всех $(s, P) \in \Omega \times G$. Очевидно, что

$$U = U^* = U^{-1}, \quad \|U\| = 1. \quad (2.5)$$

Кроме того,

$$US = SU = S. \quad (2.6)$$

Изучим теперь оператор L .

ЛЕММА 2.1. Если φ и $\psi \in D$, то имеет место формула:

$$(L\varphi, \psi) + (L\psi, \varphi) = \int_{\Omega \times \pi_s} \varphi(s, Q + \eta_N s) \psi(s, Q + \eta_{\bar{N}} s) ds dQ + 2(\varphi, \psi).$$

Доказательство. Если φ и $\psi \in D$, то из условия 3) следует, что $L\varphi$ и $L\psi \in \mathfrak{H}$. Из леммы 1.2 имеем: φ и $\psi \in \mathfrak{H}$. Принимая во внимание сказанное, получим:

$$\begin{aligned} (L\varphi, \psi) &= \int_{\Omega \times G} [(s, \text{grad } \varphi) + a(P)\varphi] \psi ds dP = \\ &= \int_{\Omega \times G} (s, \text{grad } \varphi) \psi ds dP + (\varphi, \psi). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Принимая во внимание лемму 1.1 и формулу (1.3), при помощи теоремы Фубини получим:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \times G} (s, \text{grad } \varphi) \psi ds dP &= \int_{\Omega \times \pi_s} \int_{\pi_{s, Q}} \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi(s, Q + \xi s) \psi(s, Q + \xi s) d\xi ds dQ = \\ &= \int_{\Omega \times \pi_s} \sum_{i=1}^N \int_{\xi_i}^{\eta_i} \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi(s, Q + \xi s) \psi(s, Q + \xi s) d\xi ds dQ. \end{aligned}$$

В силу свойства 1), функции $\varphi(s, Q + \xi s)$ и $\psi(s, Q + \xi s)$ абсолютно непрерывны на $\bar{\pi}_{s, Q}$ при почти всех $(s, Q) \in \Omega \times \pi_s$. Поэтому

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega \times G} (s, \text{grad } \varphi) \psi ds dP = \\ &= \int_{\Omega \times \pi_s} \sum_{i=1}^N \left[\varphi(s, Q + \eta_i s) \psi(s, Q + \eta_i s) - \varphi(s, Q + \xi_i s) \psi(s, Q + \xi_i s) - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\xi_i}^{\eta_i} \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi(s, Q + \xi s) \psi(s, Q + \xi s) d\xi \right] ds dQ. \end{aligned}$$

Принимая во внимание граничные условия 2) для функций φ и ψ , по-

лучим отсюда с помощью леммы 1.1:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \times G} (s, \text{grad } \varphi) \psi \, ds \, dP &= \int_{\Omega \times \pi_s} \varphi(s, Q + \eta_N s) \psi(s, Q + \eta_N s) \, ds \, dQ - \\ &- \int_{\Omega \times \pi_s} \int_{\pi_{s,Q}} \frac{\partial}{\partial \xi} \psi(s, Q + \xi s) \varphi(s, Q + \xi s) \, d\xi \, ds \, dQ = \\ &= \int_{\Omega \times \pi_s} \varphi(s, Q + \eta_N s) \psi(s, Q + \eta_N s) \, ds \, dQ - \int_{\Omega \times G} (s, \text{grad } \psi) \varphi \, ds \, dP. \end{aligned}$$

Принимая во внимание (2.7), отсюда выводим:

$$\begin{aligned} (L\varphi, \psi) &= \int_{\Omega \times \pi_s} \varphi(s, Q + \eta_N s) \psi(s, Q + \eta_N s) \, ds \, dQ - \\ &- \int_{\Omega \times G} [(s, \text{grad } \psi) + a(P) \psi] \varphi \, ds \, dP + 2(\varphi, \psi) = \\ &= \int_{\Omega \times \pi_s} \varphi(s, Q + \eta_N s) \psi(s, Q + \eta_N s) \, ds \, dQ - (\varphi, L\psi) + 2(\varphi, \psi). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Следствие. Полагая $\varphi = \psi$, получим:

$$(L\varphi, \varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega \times \pi_s} \varphi^2(s, Q + \eta_N s) \, ds \, dQ + \|\varphi\|^2, \quad \varphi \in D. \quad (2.8)$$

Из (2.8) следует: если $\varphi \in D$ и $L\varphi = 0$ почти всюду в $\Omega \times G$, то $\varphi = 0$ почти всюду в $\Omega \times G$ и $\varphi(s, Q + \eta_N s) = 0$ почти всюду в $\Omega \times \pi_s$.

ЛЕММА 2.2. При любом $F \in \mathfrak{H}$ существует единственное решение φ из D уравнения $L\varphi = F$, которое дается при почти всех $(s, P) \in \Omega \times G$ формулой:

$$\varphi(s, P) = L^{-1}F = \int_0^d a(P - \xi s) F(s, P - \xi s) \exp \left[- \int_0^\xi a(P - \xi' s) \, d\xi' \right] \, d\xi.$$

Оператор L^{-1} ограничен в \mathfrak{H} , причем

$$\|L^{-1}\| \leq 1 - e^{-\alpha d}. \quad (2.9)$$

Доказательство. Из следствия к лемме 2.1 следует, что оператор L^{-1} существует. При доказательстве леммы 1.2 установлено, что функция φ , построенная по формуле (1.10), принадлежит пространству D и удовлетворяет уравнению $L\varphi = F$ при почти всех $(s, P) \in \Omega \times G$. Полагая в лемме 1.2 $\varphi = L^{-1}F$, $L\varphi = F$, получим:

$$\|L^{-1}F\| \leq (1 - e^{-\alpha d}) \|F\|,$$

что и доказывает неравенство (2.9). Лемма доказана.

Следствие 1. Область значений оператора L совпадает с \mathfrak{H} .

Следствие 2. Если $\varphi \in D$, то существует и ограничен интеграл

$$\int_{\Omega \times \pi_s} \varphi^2(s, Q + \eta_N s) ds dQ < 2(1 - e^{-\alpha d}) \|\varphi\|_D^2. \quad (2.10)$$

Действительно, в силу (2.8) и (2.9), имеем:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \times \pi_s} \varphi^2(s, Q + \eta_N s) ds dQ &< 2(L\varphi, \varphi) = 2(L\varphi, L^{-1}L\varphi) \leq 2\|L^{-1}\| \|L\varphi\|^2 = \\ &= 2\|L^{-1}\| \|\varphi\|_D^2. \end{aligned}$$

Следствие 3. Если, в частности, $F \in \mathfrak{M}$, то $\varphi = L^{-1}F \in \mathfrak{M}$, причем

$$\|L^{-1}\|_{\mathfrak{M}} \leq 1 - e^{-\alpha d}. \quad (2.11)$$

Действительно, из (1.9) при почти всех $(s, Q, \xi) \in \Omega \times \pi_s \times \pi_{s, Q}$ имеем:

$$|\varphi(s, Q + \xi s)| \leq \|F\|_{\mathfrak{M}} \int_{\xi_1}^{\xi} a(Q + \xi' s) \exp \left[- \int_{\xi_1}^{\xi} a(Q + \xi'' s) d\xi'' \right] d\xi'.$$

Отсюда, принимая во внимание первое из неравенств (1.11) и опираясь на лемму 1.1, при почти всех $(s, P) \in \Omega \times G$ получим неравенство:

$$|\varphi(s, P)| = |L^{-1}F| \leq (1 - e^{-\alpha d}) \|F\|_{\mathfrak{M}},$$

которое и устанавливает справедливость неравенства (2.11).

ЛЕММА 2.3. $(L^{-1})^* = UL^{-1}U$.

Доказательство. Принимая во внимание лемму 1.1 и формулу (1.9), при всех F_1 и $F_2 \in \mathfrak{H}$ получим:

$$\begin{aligned} (L^{-1}F_1, F_2) &= \int_{\Omega \times G} a(P) L^{-1}F_1 F_2 ds dP = \\ &= \int_{\Omega \times \pi_s} \int_{\pi_{s, Q}} a(Q + \xi s) \int_{\xi_1}^{\xi} a(Q + \xi' s) F_1(s, Q + \xi' s) \cdot \\ &\cdot \exp \left[- \int_{\xi_1}^{\xi} a(Q + \xi'' s) d\xi'' \right] d\xi' F_2(s, Q + \xi s) d\xi ds dQ. \end{aligned}$$

Меняя порядок интегрирования во внутреннем интеграле, найдем:

$$\begin{aligned} (L^{-1}F_1, F_2) &= \int_{\Omega \times \pi_s} \int_{\xi_1}^{\eta_N} a(Q + \xi' s) F_1(s, Q + \xi' s) \int_{\xi_1'}^{\eta_N} a(Q + \xi s) F_2(s, Q + \xi s) \cdot \\ &\cdot \exp \left[- \int_{\xi_1'}^{\xi} a(Q + \xi'' s) d\xi'' \right] d\xi d\xi' ds dQ. \end{aligned}$$

Пользуясь леммой 1.1 и совершая во внутреннем интеграле замены переменных, аналогичные тем, которые делались при доказательстве

леммы 1.2, получим:

$$(L^{-1}F_1, F_2) = \int_{\Omega \times G} a(P) F_1(s, P) \int_0^\xi a(P + \xi s) F_2(s, P + \xi s) \cdot \\ \exp \left[- \int_0^\xi a(P + \xi' s) d\xi' \right] d\xi ds dP = (F_1, (L^{-1})^* F_2),$$

где $(L^{-1})^* F_2$ при почти всех $(s, P) \in \Omega \times G$ имеет вид:

$$(L^{-1})^* F_2 = \int_0^d a(P + \xi s) F_2(s, P + \xi s) \exp \left[- \int_0^\xi a(P + \xi' s) d\xi' \right] d\xi. \quad (2.12)$$

Отсюда и из леммы 2.2 следует, что $(L^{-1})^* = UL^{-1}U$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.4. *Пространство D плотно в пространстве \mathfrak{H} , $\overline{D} = \mathfrak{H}$.*

Доказательство. Достаточно установить, что из соотношения $(\varphi, F) = 0$ при всех $\varphi \in D$ следует $F(s, P) = 0$ почти всюду в $\Omega \times G$. По лемме 2.2, имеем отсюда:

$$(L^{-1}L\varphi, F) = 0.$$

Применяя лемму 2.3, получим:

$$(L\varphi, UL^{-1}UF) = 0.$$

Но область значений оператора L совпадает с \mathfrak{H} . Поэтому

$$UL^{-1}UF = 0,$$

или

$$L^{-1}UF = 0.$$

Применяя оператор L , получим $UF = 0$, а это и значит, что $F = 0$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.5. *Пространство D — полное.*

Доказательство. Пусть последовательность функций $\varphi_n \in D$ фундаментальна в D ,

$$\|\varphi_n - \varphi_m\|_D \rightarrow 0, \quad n, m \rightarrow \infty.$$

Это значит, что

$$\|L(\varphi_n - \varphi_m)\| \rightarrow 0, \quad n, m \rightarrow \infty.$$

В силу полноты пространства \mathfrak{H} заключаем отсюда, что существует такой элемент $F \in \mathfrak{H}$, что

$$\|L\varphi_n - F\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

По лемме 2.2, существует единственный элемент $\varphi \in D$ такой, что $L\varphi = F$. Поэтому

$$\|L\varphi_n - L\varphi\| = \|L(\varphi_n - \varphi)\| = \|\varphi_n - \varphi\|_D \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

что и доказывает полноту пространства D .

ЛЕММА 2.6. *Существует оператор L^* , сопряженный к L , причем $L^* = ULU$. Область задания оператора L^* есть UD .*

Доказательство. Область D задания оператора L , по лемме 2.4, плотна в \mathfrak{H} . Следовательно, существует оператор L^* , сопряженный к L .

Вычислим его. По лемме 2.2 имеем:

$$(L^{-1})^{-1} = L;$$

по лемме 2.3—

$$(L^{-1})^* = UL^{-1}U.$$

Тогда, по известной теореме функционального анализа [см. (4), стр. 329], имеем:

$$((L^{-1})^{-1})^* = L^* = ((L^{-1})^*)^{-1} = (UL^{-1}U)^{-1} = ULU.$$

Здесь мы воспользовались соотношениями (2.5). Область задания оператора L^* состоит из тех и только тех элементов ψ , для которых $U\psi \in D$.

Следствие. $L^{**} = L$.

Отсюда следует, что оператор L — замкнутый.

Оператор L — несамосопряженный. Поэтому, наряду с задачей (1.1), представляет интерес и сопряженная к ней задача. Так как $S^* = S$ и $L^* = ULU$, то сопряженной задачей к задаче (1.1) назовем задачу

$$ULU\psi = \lambda b S\psi + F, \quad \psi \in UD. \quad (1.1^*)$$

В силу (2.5) и (2.6), задача (1.1^{*}) сводится к задаче (1.1) относительно функции $U\psi$ с правой частью UF ,

$$LU\psi = \lambda b SU\psi + UF, \quad U\psi \in D. \quad (2.13)$$

Если, в частности, выполнено условие

$$F = UF, \quad (2.14)$$

то решения φ и ψ задач (1.1) и (1.1^{*}) связаны соотношением

$$\varphi = U\psi. \quad (2.15)$$

§ 3. Сведение задачи к интегральному уравнению Пайерлса

Докажем теорему, сводящую задачу (1.1) к интегральному уравнению, полученному впервые Пайерлсом в работе (5).

ТЕОРЕМА 3.1. Для того чтобы функция φ была решением задачи (1.1), необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла уравнению

$$L\varphi = \lambda b n + F, \quad (3.1)$$

где функция $n \in H$ и является решением интегрального уравнения Пайерлса:

$$n = \lambda K n + f, \quad K = SL^{-1}b, \quad f = SL^{-1}F. \quad (3.2)$$

Число различных решений задачи (1.1) и уравнения (3.2) одинаково.

Оператор SL^{-1} имеет следующую структуру [К. Фукс (6)]:

$$f(P) = SL^{-1}F = \int_G a(P') K(P, P') F\left(\frac{P-P'}{|P-P'|}, P'\right) dP', \quad (3.3)$$

где

$$K(P, P') = \frac{\exp\left\{-|P-P'| \int_0^1 a[tP + (1-t)P'] dt\right\}}{|P-P'|^{n-1}}. \quad (3.4)$$

Доказательство необходимости. Пусть φ есть решение задачи (1.1). Так как $\varphi \in D$, то $\varphi \in \mathfrak{H}$. Обозначим $n = S\varphi$. В силу (2.1), $n \in H$. Поэтому φ удовлетворяет уравнению (3.1), где n из \mathfrak{H} . Кроме того, в силу (1.7), $\lambda bn + F \in \mathfrak{H}$. Тогда по лемме 2.2 получаем:

$$\varphi = L^{-1}(\lambda bn + F). \quad (3.5)$$

Применяя оператор S к обеим частям равенства (3.5), получим для функции n уравнение (3.2).

Если φ_1 и φ_2 — два различных решения задачи (1.1), то соответствующие решения уравнения (3.2) n_1 и n_2 различны, ибо иначе из (3.1) следовало бы, что $L(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$, а это, в силу следствия к лемме 2.1, приводит к противоречию.

Доказательство достаточности. Пусть n — какое-либо решение уравнения (3.2), принадлежащее пространству H . Тогда $\lambda bn + F \in \mathfrak{H}$ и функция φ , построенная по формуле (3.5), принадлежит D и удовлетворяет уравнению (3.1). Докажем, что φ удовлетворяет уравнению (1.1). Для этого достаточно установить, что $S\varphi = n$. Действительно, применяя оператор S к (3.5), получим в силу (3.2):

$$S\varphi = SL^{-1}(\lambda bn + F) = \lambda Kn + f = n.$$

Если n_1 и n_2 — два различных решения уравнения (3.2), то соответствующие решения задачи (1.1) φ_1 и φ_2 различны, так как $n_1 = S\varphi_1$ и $n_2 = S\varphi_2$.

Таким образом, число различных решений задачи (1.1) и уравнения (3.2) одинаково.

Получим конкретный вид уравнения Пайерлса. В силу леммы 2.2, формула (3.5) при почти всех $(s, P) \in \Omega \times G$ примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \varphi(s, P) = & \int_0^d a(P - \xi s) [\lambda b(P - \xi s)n(P - \xi s) + F(s, P - \xi s)] \cdot \\ & \cdot \exp \left[- \int_0^\xi a(P - \xi' s) d\xi' \right] d\xi. \end{aligned}$$

Применяя оператор S к функции $\varphi(s, P)$, при почти всех $P \in G$ получим:

$$\begin{aligned} n(P) = & \int_{\Omega} \varphi(s, P) ds = \\ = & \int_{\Omega} \int_0^d a(P - \xi s) [\lambda b(P - \xi s)n(P - \xi s) + F(s, P - \xi s)] \cdot \\ & \cdot \exp \left[- \int_0^\xi a(P - \xi' s) d\xi' \right] d\xi ds. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Напомним, что функции $a(P')$ и $\lambda b(P')n(P') + F(s', P')$ продолжены нулем на все пространство $\Omega \times R_n$. Эти функции суммируемы на $\Omega \times R_n$. Следовательно, если их рассматривать как функции аргумента (s', ξ', P') , то они будут суммируемыми на $\Omega \times (0, d) \times R_n$. Непрерывное и непрерывно дифференцируемое в обе стороны преобразование координат

$$s' = s, \quad \xi' = \xi, \quad P' = P - \xi s$$

преобразует суммируемые функции в суммируемые, а область $\Omega \times (0, d) \times R_n$ преобразует в себя. Отсюда следует, что подынтегральная функция в (3.6) суммируема на $\Omega \times (0, d) \times R_n$, а тогда из теоремы Фубини следует, что эта функция суммируема на $\Omega \times (0, d)$ при почти всех $P \in G$. Следовательно, по той же теореме можно записать повторный интеграл в (3.6) через кратный:

$$n(P) = \int_{\Omega \times (0, d)} a(P - \xi s) [\lambda b(P - \xi s) n(P - \xi s) + F(s, P - \xi s)] \cdot \exp \left[- \int_0^\xi a(P - \xi' s) d\xi' \right] ds d\xi. \quad (3.7)$$

Фиксируем теперь ту из точек $P \in G$, при которой имеет место равенство (3.7), и совершим преобразование координат

$$P' = P - \xi s. \quad (3.8)$$

Преобразование (3.8) непрерывно и непрерывно дифференцируемо в обе стороны, кроме точки $P' = P$, с якобианом, равным $\xi^{n-1} = |P - P'|^{n-1}$. Поэтому, в силу (3.7) и (3.8), мы получим:

$$n(P) = \int_{|P - P'| < d} a(P') \left[\lambda b(P') n(P') + F\left(\frac{P - P'}{|P - P'|}, P'\right) \right] \cdot \exp \left[- \int_0^{|P - P'|} a\left(P - \xi' \frac{P - P'}{|P - P'|}\right) d\xi' \right] \frac{dP'}{|P - P'|^{n-1}}.$$

Совершая в экспоненте подстановку

$$t = 1 - \frac{\xi'}{|P - P'|},$$

получим окончательно интегральное уравнение Пайерлса для функции n в виде:

$$n(P) = \int_G a(P') \left[\lambda b(P') n(P') + F\left(\frac{P - P'}{|P - P'|}, P'\right) \right] \cdot \exp \left\{ - |P - P'| \int_0^1 a[tP + (1-t)P'] dt \right\} \frac{dP'}{|P - P'|^{n-1}}. \quad (3.9)$$

Теорема доказана.

Установим некоторые свойства ядра $K(P, P')$.

1. Ядро $K(P, P')$ — измеримая функция на $G \times G$, причем при почти всех $(P, P') \in G \times G$ оно удовлетворяет условиям:

$$\frac{e^{-\alpha d}}{|P - P'|^{n-1}} \leq K(P, P') \leq \frac{1}{|P - P'|^{n-1}}, \quad K(P, P') = K(P', P). \quad (3.10)$$

Утверждение непосредственно следует из формулы (3.4).

2. При каждом фиксированном $P \in \bar{G}$ ядро $K(P, P')$ измеримо по P' на \bar{G} . В силу (3.4), достаточно установить, что таким свойством обладает

функция

$$\int_0^1 a[tP + (1-t)P'] dt. \quad (3.11)$$

Функция $a(Q)$ измерима и ограничена на R_n . Значит, если ее рассматривать как функцию аргумента (t, Q) , то она будет измеримой и ограниченной на $(0,1) \times R_n$. Непрерывное и непрерывно дифференцируемое преобразование координат (при каждом фиксированном $P \in \bar{G}$)

$$Q = tP + (1-t)P' \quad (3.12)$$

преобразует функцию $a(Q)$ в функцию $a[tP + (1-t)P']$, измеримую и ограниченную на $(0,1) \times R_n$. По теореме Фубини, функция (3.11) измерима (и ограничена) по P' на \bar{G} .

3. Введем в рассмотрение итерации $K_p(P, P')$ ядра $K(P, P') = K_1(P, P')$:

$$K_p(P, P') = \int_{\bar{G}} a(P'') b(P'') K_{p-1}(P, P'') K_1(P'', P') dP'', \quad p = 2, 3, \dots$$

Из (3.10) для $K_p(P, P')$ при почти всех $(P, P') \in G \times G$ [см. (7), стр. 40] следуют оценки:

$$\begin{aligned} 0 < K_p(P, P') &\leq \frac{l_p}{|P - P'|^{n-p}}, \quad p = 1, 2, \dots, n-1, \\ 0 < K_n(P, P') &\leq l_n(1 + |\ln |P - P'||), \\ 0 < K_p(P, P') &\leq l_p, \quad p = n+1, n+2, \dots, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где $l_p, p = 1, 2, \dots$, не зависят от (P, P') .

Ядра $K_p(P, P')$ измеримы по P' на \bar{G} при каждом $P \in \bar{G}$, так как таким свойством обладает ядро $K_1(P, P')$.

4. Для ядра $K_\sigma(P, P')$, где $\sigma = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$ (символ $[x]$ обозначает целую часть числа x), при почти всех $P \in \bar{G}$ имеет место неравенство:

$$\int_{\bar{G}} a(P'') b(P'') K_\sigma^2(P, P'') dP'' \leq \delta^2, \quad (3.14)$$

где δ не зависит от P . Неравенство (3.14) следует из (1.6), (3.13) и из неравенства $2(n - \sigma) < n$.

Определение 1. Назовем регулярным значением оператора L то значение вещественного параметра λ , при котором оператор $(L - \lambda bS)^{-1}$ существует и ограничен в пространстве \mathcal{H} . Все остальные λ отнесем к особым значениям оператора L .

Определение 2. Назовем собственным значением оператора L то особое значение параметра λ , при котором однородное уравнение, соответствующее уравнению (1.1), $L\varphi = \lambda bS\varphi$, имеет ненулевое решение $\varphi \in D$; это решение назовем собственной функцией, соответствующей собственному значению λ .

Теорема 3.1 сводит изучение интегро-дифференциального уравнения (1.1) к изучению двух более простых уравнений: дифференциального уравне-

ния (3.1), исследованного в предыдущем параграфе, и интегрального уравнения Пайерлса (3.2), исследованию которого посвящается следующий параграф.

§ 4. Исследование интегрального уравнения Пайерлса

Изучим предварительно свойства интегрального оператора Пайерлса K в пространстве H :

$$m(P) = Kn = \int_G a(P') b(P') K(P, P') n(P') dP'.$$

1. Оператор K — ограниченный в пространствах H и M , причем

$$\|K\|_H \leq \beta \omega_n (1 - e^{-\alpha d}), \quad \|K\|_M \leq \beta \omega_n (1 - e^{-\alpha d}). \quad (4.1)$$

Действительно, в силу (1.7), (2.1) и (2.9) при $n \in H$ имеем:

$$\|Kn\|_H = \|SL^{-1}bn\|_H \leq \|S\|_H \|L^{-1}\| \|bn\| \leq \beta \omega_n (1 - e^{-\alpha d}) \|n\|_H.$$

Аналогично, пользуясь (1.6), (2.2) и (2.11), получим вторую из оценок (4.1).

2. Оператор K — самосопряженный и вполне непрерывный в пространстве H . Самосопряженность оператора K в H следует из симметрии ядра $K(P, P')$ и из ограниченности оператора K в H .

Для доказательства полной непрерывности оператора K в H введем в рассмотрение степени K^p интегрального оператора K . Оператор K^p — интегральный с ядром $K_p(P, P')$ по весу $a(P')b(P')$. Из (3.14) следует, что оператор K^σ вполне непрерывен в H . Так как K — ограниченный и самосопряженный оператор в пространстве H , то из одной теоремы функционального анализа [см. (8), стр. 79] следует полная непрерывность оператора K в пространстве H .

3. Оператор K — вполне непрерывный в пространстве C .

Предварительно докажем справедливость соотношения:

$$\int_G |K(P + \Delta P, P') - K(P, P')| dP' \rightarrow 0 \text{ при } |\Delta P| \rightarrow 0 \quad (4.2)$$

равномерно относительно всех точек $P \in \bar{G}$.

В § 3 установлено, что ядро $K(P, P')$ измеримо по P' на \bar{G} при всех $P \in \bar{G}$. При $P \in \bar{G}$ и $P + \Delta P \in \bar{G}$ имеем:

$$\begin{aligned} & \int_G |K(P + \Delta P, P') - K(P, P')| dP' = \\ &= \int_G \left| \frac{\exp \left\{ -|P + \Delta P - P'| \int_0^1 a[t(P + \Delta P) + (1-t)P'] dt \right\}}{|P + \Delta P - P'|^{n-1}} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{\exp \left\{ -|P - P'| \int_0^1 a[tP + (1-t)P'] dt \right\}}{|P - P'|^{n-1}} \right| dP' \leq \\ & \leq \int_G \left| \frac{1}{|P + \Delta P - P'|^{n-1}} - \frac{1}{|P - P'|^{n-1}} \right| dP' + \end{aligned}$$

$$+ \int_{\bar{G}} \left| \exp \left\{ - |P + \Delta P - P'| \int_0^1 a [t(P + \Delta P) + (1-t)P'] dt \right\} - \right. \\ \left. - \exp \left\{ - |P - P'| \int_0^1 a [tP + (1-t)P'] dt \right\} \right| \frac{dP'}{|P - P'|^{n-1}} = I_1 + I_2. \quad (4.3)$$

Для оценки интеграла I_1 применим оценки для такого рода интегралов, приведенные в монографии С. Л. Соболева [см. (9), стр. 93] при доказательстве полной непрерывности оператора вложения. Имеем:

$$I_1 = \int_{\bar{G}} \left| \frac{1}{|P + \Delta P - P'|^{n-1}} - \frac{1}{|P - P'|^{n-1}} \right| dP' \leq C_1 |\Delta P| |\ln |\Delta P||. \quad (4.4)$$

Заметим, что при любых $x \geq 0$, $y \geq 0$ справедливо неравенство:

$$|e^{-x} - e^{-y}| \leq |x - y|. \quad (4.5)$$

Принимая во внимание (4.5), получим оценки для интеграла I_2 :

$$I_2 = \int_{\bar{G}} \left| \exp \left\{ - |P + \Delta P - P'| \int_0^1 a [t(P + \Delta P) + (1-t)P'] dt \right\} - \right. \\ \left. - \exp \left\{ - |P - P'| \int_0^1 a [tP + (1-t)P'] dt \right\} \right| \frac{dP'}{|P - P'|^{n-1}} \leq \\ \leq \int_{\bar{G}} \int_0^1 \|P + \Delta P - P\| a [t(P + \Delta P) + (1-t)P'] - \\ - |P - P'| a [tP + (1-t)P'] | dt \frac{dP'}{|P - P'|^{n-1}} \leq \\ \leq \int_{\bar{G}} \int_0^1 \|P + \Delta P - P'\| - \|P - P'\| a [t(P + \Delta P) + (1-t)P'] dt \frac{dP'}{|P - P'|^{n-1}} + \\ + \int_{\bar{G}} \int_0^1 |a [t(P + \Delta P) + (1-t)P'] - a [tP + (1-t)P']| dt \frac{dP'}{|P - P'|^{n-2}} = I_2^{(1)} + I_2^{(2)}. \quad (4.6)$$

Учитывая неравенство

$$\|P + \Delta P - P'\| - \|P - P'\| \leq |\Delta P|,$$

получим в силу (1.6):

$$I_2^{(1)} = \int_{\bar{G}} \int_0^1 \|P + \Delta P - P'\| - \|P - P'\| a [t(P + \Delta P) + (1-t)P'] dt \frac{dP'}{|P - P'|^{n-1}} \leq C_2 |\Delta P|. \quad (4.7)$$

Далее,

$$I_2^{(2)} = \int_{\bar{G}} \int_0^1 |a [t(P + \Delta P) + (1-t)P'] - a [tP + (1-t)P']| dt \frac{dP'}{|P - P'|^{n-2}} \leq \\ \leq \int_{\bar{G}} \int_0^1 |a [t(P + \Delta P) + (1-t)P'] - a [tP + (1-t)P']| \frac{dP'}{|P - P'|^{n-2}} dt,$$

где G_0 — шар диаметра d , содержащий область \bar{G} . При каждом $t \in (0, 1)$ ($P \in \bar{G}$ и фиксировано) сделаем во внутреннем интеграле замену переменных интегрирования по формуле (3.12). Тогда найдем:

$$dQ = (1-t)^n dP', \quad |P - P'| = \left| P - \frac{Q-tP}{1-t} \right| = \frac{|P-Q|}{1-t}.$$

При этом шар G_0 перейдет в некоторую область $G_{0t}(P) \subset G_0$. После преобразования (3.12) получим:

$$I_2^{(2)} \leq \int_0^1 \frac{1}{(1-t)^2} \int_{G_{0t}(P)} |a(t\Delta P + Q) - a(Q)| \frac{dQ}{|P-Q|^{n-2}} dt.$$

Применим к внутреннему интегралу неравенство Гельдера с $p = n+1$ и $q = \frac{n+1}{n}$. Тогда получим:

$$\begin{aligned} I_2^{(2)} &\leq \int_0^1 \frac{1}{(1-t)^2} \left[\int_{G_{0t}(P)} |a(t\Delta P + Q) - a(Q)|^{n+1} dQ \right]^{\frac{1}{n+1}} \cdot \\ &\quad \left[\int_{G_{0t}(P)} \frac{dQ}{|P-Q|^{\frac{(n+1)(n-2)}{n}}} \right]^{\frac{n}{n+1}} dt \leq \\ &\leq \int_0^1 \frac{1}{(1-t)^2} \left[\int_{\bar{G}} |a(t\Delta P + Q) - a(Q)|^{n+1} dQ \right]^{\frac{1}{n+1}} \left[\int_{G_{0t}(P)} \frac{dQ}{|P-Q|^{\frac{(n+1)(n-2)}{n}}} \right]^{\frac{n}{n+1}} dt. \end{aligned}$$

Функция $a(Q)$ измерима и ограничена почти всюду в G . Поэтому она непрерывна в целом в пространстве L_{n+1} [см. (9), стр. 16]. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что

$$\left[\int_{\bar{G}} |a(Q + \Delta P) - a(Q)|^{n+1} dQ \right]^{\frac{1}{n+1}} < \varepsilon,$$

как только $|\Delta P| < \delta(\varepsilon)$. Отсюда следует равномерная по $t \in [0, 1]$ оценка:

$$\left[\int_{\bar{G}} |a(Q + t\Delta P) - a(Q)|^{n+1} dQ \right]^{\frac{1}{n+1}} < \varepsilon (|\Delta P| \rightarrow 0, \quad |\Delta P| \rightarrow 0).$$

Полученная оценка дает:

$$I_2^{(2)} < \varepsilon (|\Delta P|) \int_0^1 \frac{1}{(1-t)^2} \left[\int_{G_{0t}(P)} \frac{dQ}{|P-Q|^{\frac{(n+1)(n-2)}{n}}} \right]^{\frac{n}{n+1}} dt.$$

Совершая во внутреннем интеграле преобразование переменных интегрирования, обратное преобразованию (3.12), получим:

$$I_2^{(2)} < \varepsilon (|\Delta P|) \int_0^1 \frac{1}{(1-t)^{\frac{n}{n+1}}} \left[\int_{G_0} \frac{dP'}{|P-P'|^{\frac{(n+1)(n-2)}{n}}} \right]^{\frac{n}{n+1}} dt \leq C_3 \varepsilon (|\Delta P|).$$

Принимая во внимание полученную оценку и оценку (4.7), получим из (4.6)

$$I_2 < C_2 |\Delta P| + C_3 \varepsilon (|\Delta P|).$$

Отсюда и из (4.3) и (4.4) следует требуемое соотношение (4.2).

Рассмотрим множество функций n , равномерно ограниченное в пространстве C , $\|n\|_C \leq M_1$. Из (4.2) следует, что множество функций $m = Kn$ равномерно непрерывно на \bar{G} . Действительно, равномерно относительно m и P имеем:

$$\begin{aligned} |m(P + \Delta P) - m(P)| &\leq \int_{\bar{G}} a(P') b(P') |K(P + \Delta P, P') - K(P, P')| |n(P')| dP' \leq \\ &\leq \alpha \beta M_1 \int_{\bar{G}} |K(P + \Delta P, P') - K(P, P')| dP' \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $|\Delta P| \rightarrow 0$. Из (4.1) следует также, что множество функций $m = Kn$ равномерно ограничено в C ,

$$\|m\|_C \leq \|K\|_M \|n\|_C \leq (1 - e^{-\alpha d}) \beta \omega_n M_1.$$

Отсюда, по известной теореме Арчела, заключаем о полной непрерывности оператора K в пространстве C .

4. Оператор K преобразует пространство M в C , причем

$$\|K\|_C \leq \beta \omega_n (1 - e^{-\alpha d}). \quad (4.8)$$

Это утверждение следует из формул (4.1) и (4.2).

5. Оператор K^σ преобразует пространство H в M , причем

$$\|K^\sigma\|_M \leq \delta. \quad (4.9)$$

Это утверждение следует непосредственно из неравенства (3.14). Действительно,

$$\begin{aligned} |K^\sigma n| &\leq \int_{\bar{G}} a(P') b(P') K_\sigma(P, P') |n(P')| dP' \leq \\ &\leq \left[\int_{\bar{G}} a(P') b(P') K_\sigma^2(P, P') dP' \right]^{\frac{1}{2}} \|n\|_H \leq \delta \|n\|_H. \end{aligned}$$

Оператор K — вполне непрерывный и самосопряженный в H . Поэтому для интегрального уравнения Пайерлса

$$n = \lambda Kn + f$$

справедливы все предложения общей теории [см. (4), гл. IV и VI]; в частности, справедливы теоремы Фредгольма. Кроме того, спектр оператора K — дискретный и состоит из чисел $\frac{1}{\lambda_k}$, где λ_k — характеристические числа однородного интегрального уравнения $n_k = \lambda_k K n_k$, соответствующего уравнению (3.2). Множество чисел λ_k не пусто, не более чем счетно и не имеет точек сгущения на конечном расстоянии; каждое характеристическое число λ_k имеет конечную кратность. Поэтому числа λ_k могут быть перенумерованы по возрастающему модулю: $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots$, причем каждое λ_k повторяется в этом ряду столько раз, какова его крат-

ность. Таким образом, будем считать, что каждому λ_k соответствует одна собственная функция n_k . Собственные функции n_k , $k = 1, 2, \dots$, будем считать ортонормальными в H :

$$(n_k, n_i)_H = \delta_{ki}.$$

Дальнейшие свойства характеристических чисел λ_k и собственных функций n_k даются следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 4.1. *Характеристические числа λ_k положительны, собственные функции n_k непрерывны на \bar{G} . Наименьшее характеристическое число λ_1 — простое, а соответствующая ему собственная функция $n_1(P)$ положительна на \bar{G} . Система функций n_k , $k = 1, 2, \dots$, замкнута в H , т. е. для любой функции $n \in H$ имеет место равенство Парсеваля:*

$$\|n\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (n, n_k)_H^2. \quad (4.10)$$

Доказательство. Построим функции $\varphi_k \in D$:

$$\varphi_k = \lambda_k L^{-1} b n_k. \quad (4.11)$$

По теореме 3.1, имеем:

$$L\varphi_k = \lambda_k b n_k, \quad S\varphi_k = n_k. \quad (4.12)$$

Принимая во внимание формулу (2.3), из (4.12) получим:

$$(L\varphi_k, \varphi_i) = \lambda_k (b n_k, \varphi_i) = \lambda_k (n_k, S\varphi_i)_H = \lambda_k (n_k, n_i)_H = \lambda_k \delta_{ki}. \quad (4.13)$$

Отсюда, в силу (2.8), получаем:

$$\lambda_k = (L\varphi_k, \varphi_k) = \frac{1}{2} \int_{\Omega \times \pi_s} \varphi_k^2(s, Q + \eta_N s) ds dQ + \|\varphi_k\|^2 > 0.$$

Докажем, что $n_k \in C$. Имеем:

$$n_k = \lambda_k^{\sigma+1} K^{\sigma+1} n_k = \lambda_k^{\sigma+1} K \cdot K^{\sigma} n_k.$$

Отсюда и из (4.8) и (4.9) следует, что $n_k \in C$.

Докажем простоту λ_1 и положительность $n_1(P)$. Для доказательства будем рассматривать оператор K в пространстве C . Согласно свойству 3, оператор K — вполне непрерывный в C . В силу (1.6) и (3.10), оператор K — сильно положительный в C , т. е. он преобразует любую неотрицательную, непрерывную и не равную тождественно нулю на \bar{G} функцию в строго положительную функцию из C . По теореме Ентча для интегральных уравнений с положительным непрерывным ядром, обобщенной в статье М. Г. Крейна и М. А. Рутмана⁽¹⁰⁾ на вполне непрерывные операторы сильно положительного типа, заключаем, что λ_1 — простое и $n_1(P) > 0$ в \bar{G} .

Как следует из общей теории самосопряженных вполне непрерывных операторов [см. (4), стр. 253], для доказательства полноты системы функций n_k , $k = 1, 2, \dots$, в H достаточно доказать, что уравнение $Kn = 0$ имеет только тривиальное решение в пространстве H . Если бы это было не так, то нашлась бы функция $n_0 \in H$ такая, что $Kn_0 = 0$, $n_0 \neq 0$. Построим функцию $\varphi_0 = L^{-1} b n_0$. По лемме 2.2, $\varphi_0 \in \mathfrak{H}$ и $\varphi_0 \neq 0$ в \mathfrak{H} .

Однако

$$\dot{S}\varphi_0 = SL^{-1}bn_0 = Kn_0 = 0, \quad L\varphi_0 = bn_0.$$

Принимая во внимание (2.3), получим отсюда:

$$(L\varphi_0, \varphi_0) = (bn_0, \varphi_0) = (n_0, S\varphi_0)_H = 0,$$

а это, в силу следствия к лемме 2.1, дает: $\varphi_0 = 0$, что невозможно.

Теорема доказана.

Следствие 1. Из доказанной теоремы и из (4.1) следуют соотношения:

$$\frac{1}{\beta\omega_n(1-e^{-\alpha d})} \leq \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots, \quad \lambda_k \rightarrow \infty \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (4.14)$$

Следствие 2. Оператор K — вполне непрерывный, самосопряженный и положительный в пространстве H . Поэтому имеют место следующие максимально-минимальные вариационные принципы Куранта для λ_k [см. (4), стр. 257]:

$$\frac{1}{\lambda_k} = \inf_{f_i \in H(n, f_i)} \sup_{H=0, i=1, 2, \dots, k-1} \frac{(Kn, n)_H}{\|n\|_H^2}, \quad \lambda_k = \sup_{f_i \in H(n, f_i)} \inf_{H=0, i=1, 2, \dots, k-1} \frac{(Kn, n)_H}{\|Kn\|_H^2}, \quad (4.15)$$

причем реализация в (4.15) осуществляется при $f_i = n_i$, $i = 1, 2, \dots, k-1$.

Следствие 3. При $\lambda \neq \lambda_k$, по теореме Фредгольма, уравнение (3.2) имеет единственное решение n из H при любом f из H :

$$n = (I - \lambda K)^{-1}f, \quad \|(I - \lambda K)^{-1}\|_H < \infty. \quad (4.16)$$

Но система собственных функций n_k , $k = 1, 2, \dots$, полна в H . Поэтому это решение представляется в виде [см. (4), стр. 254]:

$$n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda} (f, n_k)_H n_k. \quad (4.17)$$

Из (4.16) и (4.17) получаем формулу:

$$\|(I - \lambda K)^{-1}\|_H = \sup_k \frac{\lambda_k}{|\lambda - \lambda_k|} = N(\lambda). \quad (4.18)$$

В частности, при условии

$$|\lambda| \beta\omega_n(1 - e^{-\alpha d}) < 1 \quad (4.19)$$

имеет место следующая оценка:

$$\begin{aligned} N(\lambda) &= \|(I - \lambda K)^{-1}\|_H = \sup_k \frac{\lambda_k}{|\lambda - \lambda_k|} = \sup_k \frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda} = \\ &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - |\lambda|} \leq \frac{1}{1 - |\lambda| \beta\omega_n(1 - e^{-\alpha d})}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Следствие 4. Из (4.15) следует, что при $\lambda < \lambda_1$ оператор $I - \lambda K$ положительно-определенный. Поэтому [см. (8), стр. 12] для того, чтобы функция $n_0 \in H$ была решением уравнения (3.2), необходимо и достаточно,

чтобы она сообщала функционалу

$$\|n\|_H^2 - \lambda (Kn, n)_H - 2(f, n)_H \quad (4.21)$$

минимальное значение среди всех функций n из H .

Замечание. В работе ⁽⁶⁾ сказано, что система собственных функций интегрального уравнения Пайерлса полна в H . Однако ни там, ни в других работах автору не удалось найти доказательство этого факта.

Пусть $n_{l_k+1}, n_{l_k+2}, \dots, n_{l_k+\rho_k}$ суть собственные функции ядра K , соответствующие характеристическому числу λ_k . Таким образом, ρ_k — кратность характеристического числа λ_k и

$$n_{l_k+i} = \lambda_k K n_{l_k+i}, \quad i = 1, 2, \dots, \rho_k. \quad (4.22)$$

Будем изучать зависимость λ_k и n_k от коэффициентов a и b , причем будем предполагать, что при своем изменении a и b не выходят из пространства M и остаются положительными. Обозначая измененные коэффициенты a и b соответственно через \bar{a} и \bar{b} , мы будем, таким образом, считать:

$$\varepsilon_1 = \left\| 1 - \frac{\bar{a}}{a} \right\|_M < 1, \quad \varepsilon_2 = \left\| 1 - \frac{\bar{b}}{b} \right\|_M < 1, \quad (4.23)$$

что при почти всех $P \in G$ эквивалентно неравенствам:

$$(1 - \varepsilon_1) a(P) \leq \bar{a}(P) \leq (1 + \varepsilon_1) a(P), \quad (1 - \varepsilon_2) b(P) \leq \bar{b}(P) \leq (1 + \varepsilon_2) b(P) \quad (4.24)$$

При переходе от a и b к \bar{a} и \bar{b} пространства \mathcal{H} и H перейдут соответственно в $\bar{\mathcal{H}}$ и \bar{H} ; оператор K перейдет в \bar{K} . Характеристические числа и собственные функции оператора \bar{K} будем обозначать соответственно через $\bar{\lambda}_k$ и \bar{n}_k .

Заметим, что из условий (4.24) и из определения пространств \mathcal{H} и H следует, что пространства \mathcal{H} и $\bar{\mathcal{H}}$, а также пространства H и \bar{H} состоят из одного и того же набора функций, нормы которых эквивалентны:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \varepsilon_1} \|F\| &\leq \|F\|_{\bar{\mathcal{H}}} \leq \sqrt{1 + \varepsilon_1} \|F\|, \\ \sqrt{(1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)} \|n\|_H &\leq \|n\|_{\bar{H}} \leq \sqrt{(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)} \|n\|_H. \end{aligned} \quad (4.25)$$

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть кратность характеристического числа λ_k есть ρ_k и (ортонормированная в H) система функций n_{l_k+i} , $i = 1, 2, \dots, \rho_k$, образует соответствующее собственное подпространство. Тогда при достаточно малых ε_1 и ε_2 возмущенное уравнение будет иметь ρ_k характеристических чисел $\bar{\lambda}_{l_k+i}$, $i = 1, 2, \dots, \rho_k$ (каждое считается столько раз, какова его кратность), удовлетворяющих условию:

$$|\bar{\lambda}_{l_k+i} - \lambda_k| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon_1 \rightarrow 0, \quad \varepsilon_2 \rightarrow 0, \quad i = 1, 2, \dots, \rho_k. \quad (4.26)$$

Соответствующие (ортонормированные в \bar{H}) собственные функции \bar{n}_{l_k+i} , $i = 1, 2, \dots, \rho_k$, удовлетворяют условию:

$$\left\| \bar{n}_{l_k+i} - \sum_{j=1}^{\rho_k} (\bar{n}_{l_k+i}, n_{l_k+j})_H n_{l_k+j} \right\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon_1 \rightarrow 0, \quad \varepsilon_2 \rightarrow 0, \quad i = 1, 2, \dots, \rho_k. \quad (4.27)$$

Доказательство. Обозначим

$$m_k = \sqrt{ab} n_k, \quad \bar{m}_k = \sqrt{\bar{a}\bar{b}} \bar{n}_k.$$

Тогда $m_k, \bar{m}_k \in L_2$, $(m_k, m_i)_{L_2} = (\bar{m}_k, \bar{m}_i)_{L_2} = \delta_{ki}$ и

$$m_k = \lambda_k K_1 m_k \equiv \lambda_k \int_G \sqrt{a(P)a(P')b(P)b(P')} K(P, P') m_k(P') dP',$$

$$\bar{m}_k = \bar{\lambda}_k \bar{K}_1 \bar{m}_k \equiv \bar{\lambda}_k \int_G \sqrt{\bar{a}(P)\bar{a}(P')\bar{b}(P)\bar{b}(P')} \bar{K}(P, P') \bar{m}_k(P') dP'.$$

Операторы K_1 и \bar{K}_1 — самосопряженные и вполне непрерывные в пространстве L_2 -функций, суммируемых с квадратом на G . Оценим их близость в L_2 . Имеем:

$$\begin{aligned} \|(K_1 - \bar{K}_1)m\|_{L_2} &= \left[\int_G \left\{ \int_G \left[\sqrt{a(P)a(P')b(P)b(P')} K(P, P') - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sqrt{\bar{a}(P)\bar{a}(P')\bar{b}(P)\bar{b}(P')} \bar{K}(P, P') \right] m(P') dP' \right\}^2 dP \right]^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left[\int_G a(P)b(P) \left\{ \int_G \left[a(P')b(P') K(P, P') - \sqrt{\frac{\bar{a}(P)\bar{a}(P')\bar{b}(P)\bar{b}(P')}{a(P)b(P)}} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \bar{K}(P, P') \right] n(P') dP' \right\}^2 dP \right]^{\frac{1}{2}} = \left\| Kn - \sqrt{\frac{\bar{a}\bar{b}}{ab}} \bar{K} \sqrt{\frac{ab}{\bar{a}\bar{b}}} n \right\|_H \leq \\ &\leq \|(K - \bar{K})n\|_H + \left\| \bar{K} \left(1 - \sqrt{\frac{\bar{a}\bar{b}}{ab}} \right) n \right\|_H + \left\| \left(1 - \sqrt{\frac{\bar{a}\bar{b}}{ab}} \right) \bar{K} \sqrt{\frac{ab}{\bar{a}\bar{b}}} n \right\|_H, \end{aligned} \quad (4.28)$$

где $m = \sqrt{ab} n \in L_2$. Пользуясь (2.4) и (3.2), оценим первое слагаемое в (4.28):

$$\begin{aligned} \|(K - \bar{K})n\|_H &= \|S(L^{-1}b - \bar{L}^{-1}\bar{b})n\|_H \leq \sqrt{\beta\omega_n} \|(L^{-1}b - \bar{L}^{-1}\bar{b})n\| \leq \\ &\leq \sqrt{\beta\omega_n} \|(L^{-1} - \bar{L}^{-1})bn\| + \sqrt{\beta\omega_n} \|\bar{L}^{-1}(b - \bar{b})n\| \leq \sqrt{\beta\omega_n} \|L^{-1}(E - L\bar{L}^{-1})bn\| + \\ &\quad + \sqrt{\frac{\beta\omega_n}{1-\varepsilon_1}} \|\bar{L}^{-1}(b - \bar{b})n\|_{\mathfrak{H}}. \end{aligned}$$

Воспользуемся леммой 2.2. Тогда с учетом (4.24) и (4.25) получим:

$$\|(K - \bar{K})n\|_H \leq C_1 (\|E - L\bar{L}^{-1}\| + \varepsilon_2) \|n\|_H. \quad (4.29)$$

Для оценки $\|E - L\bar{L}^{-1}\|$, где E — тождественный оператор в \mathfrak{H} , установим при всех $F \in \mathfrak{H}$ тождество:

$$(E - L\bar{L}^{-1})F = \left(1 - \frac{\bar{a}}{a}\right)(E - \bar{L}^{-1})F. \quad (4.30)$$

Для доказательства (4.30) обозначим $\bar{L}^{-1}F = u$. Тогда $u \in \bar{D}$, а также $u \in D$ и

$$\bar{L}u = \frac{1}{\bar{a}(P)}(s, \text{grad } u) + u = F, \quad Lu = L\bar{L}^{-1}F = \frac{1}{a(P)}(s, \text{grad } u) + u.$$

Вычитая, получим:

$$\begin{aligned} F - L\bar{L}^{-1}F &= \left[\frac{1}{\bar{a}(P)} - \frac{1}{a(P)} \right] (s, \text{grad } u) = \\ &= \left(1 - \frac{\bar{a}}{a} \right) \frac{1}{\bar{a}(P)} (s, \text{grad } u) = \left(1 - \frac{\bar{a}}{a} \right) (F - u), \end{aligned}$$

что и устанавливает справедливость (4.30). Из (4.23), (4.25) и (4.30) следует оценка:

$$\|E - L\bar{L}^{-1}\| \leq C_2 \varepsilon_1. \quad (4.31)$$

Из (4.29) и (4.31) получим оценку

$$\|K - \bar{K}\|_H \leq C_3 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2). \quad (4.32)$$

Оценим второе и третье слагаемые в (4.28), пользуясь (4.1), (4.23) и (4.25):

$$\begin{aligned} \left\| \bar{K} \left(1 - \sqrt{\frac{\bar{a}\bar{b}}{ab}} \right) n \right\|_H &\leq C_4 \left\| 1 - \sqrt{\frac{\bar{a}\bar{b}}{ab}} \right\|_M \|n\|_H = \\ &= C_4 \left\| \frac{\bar{a}\bar{b} - ab}{\sqrt{\bar{a}\bar{b}}(\sqrt{\bar{a}\bar{b}} + \sqrt{ab})} \right\|_M \|n\|_H \leq C_5 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \|n\|_H, \\ \left\| \left(1 - \sqrt{\frac{\bar{a}\bar{b}}{ab}} \right) \bar{K} \sqrt{\frac{\bar{a}\bar{b}}{ab}} n \right\|_H &\leq C_6 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \|n\|_H. \end{aligned}$$

Принимая во внимание полученные оценки и оценку (4.32), из (4.28) находим:

$$\|(K_1 - \bar{K}_1)m\|_{L_2} \leq C_7 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \|n\|_H = C_7 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \|m\|_{L_2},$$

откуда следует, что

$$\|K_1 - \bar{K}_1\|_{L_2} \leq C_7 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2). \quad (4.33)$$

Из (4.33), на основании теоремы М. З. Соломяк ⁽¹¹⁾, следует утверждение теоремы о собственных числах и соотношения (4.26). Кроме того,

$$\left\| \bar{n}_{l_k+i} - \sum_{j=1}^{\rho_k} (\bar{m}_{l_k+i}, m_{l_k+j})_{L_2} m_{l_k+j} \right\|_{L_2} \rightarrow 0, \quad \varepsilon_1 \rightarrow 0, \quad \varepsilon_2 \rightarrow 0, \quad i = 1, 2, \dots, \rho_k. \quad (4.34)$$

Принимая во внимание (4.23) и (4.25), оценим разность

$$\begin{aligned} &|(\bar{m}_{l_k+i}, m_{l_k+j})_{L_2} - (\bar{n}_{l_k+i}, n_{l_k+j})_H| \leq \\ &\leq \int_G |\bar{m}_{l_k+i}(P) m_{l_k+j}(P) - a(P) b(P) \bar{n}_{l_k+i}(P) n_{l_k+j}(P)| dP = \\ &= \int_G a(P) b(P) \left| \frac{\bar{V}_a(P) \bar{b}(P)}{V_a(P) b(P)} - 1 \right| |\bar{n}_{l_k+i}(P) n_{l_k+j}(P)| dP \leq \end{aligned}$$

$$\leq \left\| \frac{V\overline{ab} - V\overline{ab}}{V\overline{ab}} \right\|_M \|\bar{n}_{l_k+i}\|_H \|n_{l_k+i}\|_H \leq \left\| \frac{ab - \overline{ab}}{ab + \sqrt{ab\overline{ab}}} \right\|_M \frac{1}{V(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)} \|\bar{n}_{l_k+i}\|_H \leq \\ \leq \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2}{V(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)}, \quad i, j = 1, 2, \dots, \rho_k.$$

Отсюда и из (4.34) получим:

$$\left\| \frac{V\overline{ab}}{V\overline{ab}} \bar{n}_{l_k+i} - \sum_{j=1}^{\rho_k} (\bar{n}_{l_k+i}, n_{l_k+j})_H n_{l_k+j} \right\|_H \rightarrow 0, \quad \varepsilon_1 \rightarrow 0, \quad \varepsilon_2 \rightarrow 0, \quad i=1, 2, \dots, \rho_k.$$

Учитывая, что

$$\left\| \left(\sqrt{\frac{\overline{ab}}{ab}} - 1 \right) \bar{n}_{l_k+i} \right\|_H \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon_1 \rightarrow 0, \quad \varepsilon_2 \rightarrow 0,$$

получаем, наконец, соотношения (4.27). Теорема доказана.

Из доказанной теоремы, выражающей непрерывную зависимость λ_k и n_k от a и b , следует непрерывная зависимость решения n уравнения (3.2) при $\lambda \neq \lambda_k$ от a , b и f . Действительно, в силу (4.16) имеем:

$$n = (I - \lambda K)^{-1} f, \quad \bar{n} = (I - \lambda \bar{K})^{-1} \bar{f}.$$

Так как $\lambda \neq \lambda_k$, то в силу (4.18), (4.25) и (4.26), величина

$$\|(I - \lambda \bar{K})^{-1}\|_H \leq C \|(I - \lambda \bar{K})^{-1}\|_{\bar{H}} = C \sup_k \frac{\bar{\lambda}_k}{|\lambda - \bar{\lambda}_k|} = C\bar{N}(\lambda)$$

будет равномерно ограниченной при $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ и $\varepsilon_2 \rightarrow 0$. Поэтому

$$\|n - \bar{n}\|_H = \|(I - \lambda K)^{-1} f - (I - \lambda \bar{K})^{-1} \bar{f}\|_H \leq \|[(I - \lambda K)^{-1} - \\ - (I - \lambda \bar{K})^{-1}] f\|_H + \|(I - \lambda \bar{K})^{-1} (f - \bar{f})\|_H \leq C\bar{N}(\lambda) \|f - \bar{f}\|_H + \\ + \|(I - \lambda K)^{-1} \lambda (K - \bar{K}) (I - \lambda \bar{K})^{-1} f\|_H \leq C_1 \|f - \bar{f}\|_H + \\ + C_2 \|K - \bar{K}\|_H \|f\|_H,$$

что с учетом (4.32) и устанавливает соотношение:

$$\|n - \bar{n}\|_H \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon_1 \rightarrow 0, \quad \varepsilon_2 \rightarrow 0, \quad \|f - \bar{f}\|_H \rightarrow 0. \quad (4.35)$$

Замечание. Эти результаты можно также получить, если воспользоваться работой Л. В. Канторовича [см. (12), гл. II].

§ 5. Свойства интегро-дифференциального уравнения

Результаты предыдущего параграфа в сочетании с теоремой 3.1 позволяют сделать ряд заключений о свойствах исходного интегро-дифференциального уравнения (1.1) и, в частности, доказать корректность задачи (1.1) при $\lambda \neq \lambda_k$: существование, единственность и непрерывную зависимость решения φ от a , b и F , а также непрерывную зависимость собственных значений λ_k и собственных функций φ_k оператора L от a и b (если последние изменяются согласно (4.23)) в смысле метрики пространства D и, тем более, в смысле метрики пространства \mathfrak{H} .

ТЕОРЕМА 5.1. При $\lambda \neq \lambda_k$ существует единственное решение φ из D уравнения (1.1):

$$\varphi = (L - \lambda bS)^{-1} F = \lambda L^{-1} b (I - \lambda K)^{-1} SL^{-1} F + L^{-1} F \quad (5.1)$$

при любом $F \in \mathcal{H}$. Это решение непрерывно зависит от a и b (если они меняются согласно (4.23)) и от F (если она меняется в \mathcal{H}) в пространстве D и, тем более, в пространстве \mathcal{H} . Так что

$$\|\varphi - \bar{\varphi}\| \leq \|\varphi - \bar{\varphi}\|_D \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon_1 \rightarrow 0, \quad \varepsilon_2 \rightarrow 0 \text{ и } \|F - \bar{F}\| \rightarrow 0, \quad (5.2)$$

где функция $\bar{\varphi}$ есть решение из \bar{D} возмущенного уравнения

$$\bar{L}\bar{\varphi} \equiv \frac{1}{a(P)} (s, \text{grad } \bar{\varphi}) + \bar{\varphi} = \lambda \bar{b} S \bar{\varphi} + \bar{F}.$$

Замечание. Из определения пространства D и из (4.24) следует что возмущенное пространство \bar{D} состоит из того же набора функций, что и D . Поэтому имеет смысл выражение $\|\varphi - \bar{\varphi}\|_D$.

Доказательство. При $\lambda \neq \lambda_k$ существует единственное решение n уравнения (3.2), равное, в силу (4.16),

$$n = (I - \lambda K)^{-1} SL^{-1} F. \quad (5.3)$$

Применим теорему 3.1. Из (3.1) следует, что функция

$$\varphi = \lambda L^{-1} bn + L^{-1} F \quad (5.4)$$

принадлежит D и является решением задачи (1.1). Так как при $\lambda \neq \lambda_k$ уравнение (3.2) имеет единственное решение, то, по теореме 3.1, уравнение (1.1) имеет также единственное решение. Из (5.3) и (5.4) следует формула (5.1) для решения φ уравнения (1.1).

Для доказательства соотношений (5.2) воспользуемся теоремой 3.1: решения φ и $\bar{\varphi}$ удовлетворяют уравнениям (3.1),

$$L\varphi = \lambda bn + F, \quad \bar{L}\bar{\varphi} = \lambda \bar{b}\bar{n} + \bar{F}, \quad (5.5)$$

где n и \bar{n} удовлетворяют уравнениям (3.2):

$$n = \lambda Kn + SL^{-1} F, \quad \bar{n} = \lambda \bar{K}\bar{n} + S\bar{L}^{-1} \bar{F}.$$

Принимая во внимание (4.25) и (4.31), получим:

$$\begin{aligned} \|SL^{-1}F - S\bar{L}^{-1}\bar{F}\|_H &\leq \|S(L^{-1} - \bar{L}^{-1})F\|_H + \|S\bar{L}^{-1}(F - \bar{F})\|_H \leq \\ &\leq \|SL^{-1}(E - L\bar{L}^{-1})F\|_H + C_1\|F - \bar{F}\| \leq C_2\|E - L\bar{L}^{-1}\|\|F\| + \\ &+ C_1\|F - \bar{F}\| \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon_1 \rightarrow 0, \quad \varepsilon_2 \rightarrow 0 \text{ и } \|F - \bar{F}\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Отсюда, а также из (4.35) следует, что

$$\|n - \bar{n}\|_H \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon_1 \rightarrow 0, \quad \varepsilon_2 \rightarrow 0 \text{ и } \|F - \bar{F}\| \rightarrow 0. \quad (5.6)$$

Далее, из (5.5) находим:

$$\begin{aligned} \|\varphi - \bar{\varphi}\|_D &= \|L(\varphi - \bar{\varphi})\| = \|\lambda bn + F - L\bar{L}^{-1}(\lambda \bar{b}\bar{n} + \bar{F})\| \leq \\ &\leq \|\lambda bn + F - \lambda \bar{b}\bar{n} - \bar{F}\| + \|(E - L\bar{L}^{-1})(\lambda \bar{b}\bar{n} + \bar{F})\|. \end{aligned}$$

Принимая во внимание оценку (4.31) и соотношение (5.6), получим отсюда:

$$\|\varphi - \bar{\varphi}\|_{D \rightarrow 0}.$$

Пользуясь леммой 1.2, выводим окончательно соотношения (5.2).

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 5.2. *Особые значения оператора L суть числа λ_k , $k = 1, 2, \dots$, и $+\infty$; числа λ_k являются собственными значениями оператора L ; соответствующие им собственные функции φ_k принадлежат D и связаны с n_k соотношениями (4.12):*

$$L\varphi_k = \lambda_k b n_k, \quad S\varphi_k = n_k.$$

Кроме того, $\varphi_k \in \mathfrak{M}$; система функций φ_k , $k = 1, 2, \dots$, не полна в \mathfrak{H} . Собственное значение λ_1 — простое, а φ_1 почти всюду в $\Omega \times G$ положительна. Собственные значения λ_k и собственные функции φ_k непрерывно зависят от a и b ; точнее, при $i = 1, 2, \dots, p_k$

$$\begin{aligned} & \|\bar{\varphi}_{l_k+i} - \sum_{j=1}^{p_k} (S\bar{\varphi}_{l_k+i}, S\varphi_{l_k+j})_H \varphi_{l_k+j}\| < \\ & < \|\bar{\varphi}_{l_k+i} - \sum_{j=1}^{p_k} (S\bar{\varphi}_{l_k+i}, S\varphi_{l_k+j})_H \varphi_{l_k+j}\|_D \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon_1 \rightarrow 0, \quad \varepsilon_2 \rightarrow 0, \quad (5.7) \end{aligned}$$

причем, как и в теореме 4.2, предполагается нормировка:

$$\|S\varphi_{l_k+i}\|_H = \|S\bar{\varphi}_{l_k+i}\|_{\bar{H}} = 1.$$

Доказательство. При доказательстве теоремы 4.1 было установлено, что функции φ_k , построенные по формуле (4.11), удовлетворяют соотношениям (4.12). Это значит, что они удовлетворяют уравнению

$$L\varphi_k = \lambda_k b S\varphi_k, \quad \varphi_k \in D, \quad \varphi_k \neq 0.$$

Следовательно, λ_k суть собственные значения оператора L , а φ_k — соответствующие им собственные функции. Из теоремы 3.1 следует, что кратность собственного значения λ_k оператора L равна кратности характеристического числа λ_k интегрального уравнения (3.2). Из сказанного следует, что числа λ_k , $k = 1, 2, \dots$, и их предел $+\infty$ суть особые значения оператора L . В силу теоремы 5.1, все остальные λ — регулярные.

По теореме 4.1, $n_k \in C$. Но тогда из (2.11) следует, что $\varphi_k = \lambda_k L^{-1} b n_k \in \mathfrak{M}$.

Простота λ_1 следует из теоремы 4.1 и из того факта, что кратность его не изменяется при переходе от уравнения (3.2) к уравнению (1.1). Положительность функции $\varphi_1 = \lambda_1 L^{-1} b n_1$ следует из положительности λ_1 и n_1 и из формулы:

$$\varphi_1(s, P) = \lambda_1 \int_0^d a(P - \xi s) b(P - \xi s) n_1(P - \xi s) \exp\left[-\int_0^{\xi} a(P - \xi' s) d\xi'\right] d\xi.$$

Докажем, что система функций φ_k , $k = 1, 2, \dots$, не полна в \mathfrak{H} . Для этого достаточно доказать, что найдется такая функция $F \in \mathfrak{H}$, $F \neq 0$, для которой $(F, \varphi_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots$. Очевидно, что найдется такая функция

φ из D , $\varphi \neq 0$, для которой $S\varphi = 0$. Обозначим $F = UL\varphi$, где U — унитарный оператор, введенный в (2.4). Тогда $F \neq 0$ и в силу (2.3) и леммы 2.6 имеем:

$$(F, \varphi_k) = (UL\varphi, \varphi_k) = (\varphi, L^*U\varphi_k) = (\varphi, UL\varphi_k) = \lambda_k(\varphi, Ubn_k) = \lambda_k(\varphi, bn_k) = \\ = \lambda_k(S\varphi, n_k)_H = 0,$$

что и доказывает неполноту системы функций $\varphi_k, k = 1, 2, \dots$, в пространстве \mathfrak{H} .

Докажем соотношения (5.7). В силу (4.22) и теоремы 3.1, имеем:

$$L\varphi_{l_k+i} = \lambda_k bn_{l_k+i}, \quad \bar{L}\bar{\varphi}_{l_k+i} = \bar{\lambda}_{l_k+i} \bar{b} \bar{n}_{l_k+i}, \quad i = 1, 2, \dots, \rho_k,$$

откуда при $i = 1, 2, \dots, \rho_k$ получим:

$$\|\bar{\varphi}_{l_k+i} - \sum_{j=1}^{\rho_k} (S\bar{\varphi}_{l_k+i}, S\varphi_{l_k+j})_H \varphi_{l_k+j}\|_D = \|L[\bar{\varphi}_{l_k+i} - \sum_{j=1}^{\rho_k} (\bar{n}_{l_k+i}, n_{l_k+j})_H \varphi_{l_k+j}]\| = \\ = \|L\bar{L}^{-1} \bar{\lambda}_{l_k+i} \bar{b} \bar{n}_{l_k+i} - \sum_{j=1}^{\rho_k} \lambda_k (\bar{n}_{l_k+i}, n_{l_k+j})_H bn_{l_k+j}\| \leq \\ \leq \bar{\lambda}_{l_k+i} \|(E - L\bar{L}^{-1}) \bar{b} \bar{n}_{l_k+i}\| + \|(\bar{\lambda}_{l_k+i} - \lambda_k) \bar{b} \bar{n}_{l_k+i}\| + \lambda_k \|(\bar{b} - b) \bar{n}_{l_k+i}\| + \\ + \lambda_k \|b[\bar{n}_{l_k+i} - \sum_{j=1}^{\rho_k} (\bar{n}_{l_k+i}, n_{l_k+j})_H n_{l_k+j}]\|.$$

Принимая во внимание соотношения (4.24)–(4.27) и (4.31), получим:

$$\|\bar{\varphi}_{l_k+i} - \sum_{j=1}^{\rho_k} (S\bar{\varphi}_{l_k+i}, S\varphi_{l_k+j})_H \varphi_{l_k+j}\|_D \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon_1 \rightarrow 0, \quad \varepsilon_2 \rightarrow 0.$$

Отсюда и из леммы 1.2 заключаем о справедливости (5.7). Теорема доказана.

Сделаем несколько замечаний.

1. Заметим, что при любом $F \in \mathfrak{H}$ в пространстве H имеет место разложение:

$$SL^{-1}F = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(F, U\varphi_k)}{\lambda_k} n_k. \quad (5.8)$$

Действительно, $SL^{-1}F \in H$. А тогда, в силу (2.3), леммы 2.3 и (4.11), имеем:

$$(SL^{-1}F, n_k)_H = (L^{-1}F, bn_k) = (F, (L^{-1})^* bn_k) = \\ = (F, UL^{-1}Ubn_k) = (F, UL^{-1}bn_k) = \frac{1}{\lambda_k} (F, U\varphi_k).$$

Отсюда и из полноты системы функций $n_k, k = 1, 2, \dots$, в H следует справедливость разложения (5.8).

2. Принимая во внимание формулы (4.14), (4.17) и (5.8), запишем решение φ задачи (1.1) в виде ряда, сходящегося в пространстве \mathfrak{H} :

$$\begin{aligned} \varphi = \lambda L^{-1} \left[b \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda} (f, n_k)_H n_k \right] + L^{-1} F = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{\lambda_k (\lambda_k - \lambda)} (F, U \varphi_k) L^{-1} b n_k + \\ + L^{-1} F = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k (\lambda_k - \lambda)} (F, U \varphi_k) \varphi_k + L^{-1} F. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Из формулы (5.9) получаем следующий результат: для того чтобы при $\lambda = \lambda_k$ существовало решение задачи (1.1), необходимо и достаточно, чтобы свободный член F был ортогонален к функциям $U \varphi_{l_k+i}$, $i = 1, 2, \dots, \dots, \rho_k$. Заметим, что в силу (2.15) функции $U \varphi_k$ суть собственные функции оператора L^* .

3. Дадим оценку для решения φ при λ из круга (4.19). Для решения уравнения (3.2), в силу (4.16) и (4.20), в круге (4.19) имеем оценку

$$\|n\|_H \leq \| (I - \lambda K)^{-1} \|_H \|f\|_H < \frac{1}{1 - |\lambda| \beta \omega_n (1 - e^{-\alpha d})} \|f\|_H. \quad (5.10)$$

Вспомяная, что $f = SL^{-1}F$, получаем, как и при доказательстве неравенств (4.1), что

$$\|f\|_H = \|SL^{-1}F\|_H \leq \|S\|_H \|L^{-1}\| \|F\| \leq \sqrt{\beta \omega_n} (1 - e^{-\alpha d}) \|F\|. \quad (5.11)$$

Принимая во внимание полученную оценку для f , из (5.10) получаем:

$$\|n\|_H < \frac{\sqrt{\beta \omega_n} (1 - e^{-\alpha d})}{1 - |\lambda| \beta \omega_n (1 - e^{-\alpha d})} \|F\|.$$

На основании теоремы 3.1, получим, далее, оценку для нормы φ :

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_D = \|L\varphi\| = \|\lambda b n + F\| &\leq |\lambda| \|b n\| + \|F\| \leq |\lambda| \sqrt{\beta \omega_n} \|n\|_H + \|F\| < \\ < \left[1 + \frac{|\lambda| \beta \omega_n (1 - e^{-\alpha d})}{1 - |\lambda| \beta \omega_n (1 - e^{-\alpha d})} \right] \|F\| = \frac{\|F\|}{1 - |\lambda| \beta \omega_n (1 - e^{-\alpha d})} \end{aligned}$$

Отсюда, на основании леммы 1.2, получаем:

$$\|\varphi\| \leq (1 - e^{-\alpha d}) \|\varphi\|_D < \frac{1 - e^{-\alpha d}}{1 - |\lambda| \beta \omega_n (1 - e^{-\alpha d})} \|F\|.$$

§ 6. Метод последовательных приближений

В предыдущих параграфах мы установили различные теоремы, касающиеся вопросов качественного поведения решения задачи (1.1). Теперь мы рассмотрим вопросы, связанные с непосредственным построением решения этой задачи по методу последовательных приближений и с помощью вариационных принципов. Здесь мы рассмотрим метод последовательных приближений применительно к задаче I — определения первого собственного значения λ_1 и соответствующей ему собственной функции φ , а также к задаче II — отыскания решения φ неоднородного уравнения (1.1) при $|\lambda| < \lambda_1$.

Последовательные приближения строятся по следующей схеме:

$$L\varphi^{(p)} = b n^{(p-1)}, \quad n^{(p)} = S\varphi^{(p)}, \quad p = 1, 2, \dots \quad (6.1)$$

Для задачи I в качестве нулевого приближения $n^{(0)}$ выбирается любая функция из H , не ортогональная к n_1 , например положительная непрерывная на \bar{G} функция. Таким образом, в силу (4.10) будем иметь:

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 = \|n^{(0)}\|_H^2 = \tau^2, \quad C_k = (n^{(0)}, n_k)_H, \quad C_1 > 0. \quad (6.2)$$

Приближения $\lambda_{(p)}$, $n_{(p)}$ и $\varphi_{(p)}$ соответственно для λ_1 , n_1 и φ_1 строятся в виде:

$$\lambda_{(p)} = \frac{\|n^{(p-1)}\|_H}{\|n^{(p)}\|_H}, \quad n_{(p)} = \frac{n^{(p)}}{\|n^{(p)}\|_H}, \quad \varphi_{(p)} = \frac{\varphi^{(p)}}{\|n^{(p)}\|_H}, \quad p = 1, 2, \dots \quad (6.3)$$

Отметим, что предлагаемый здесь метод итераций, по существу, является модификацией известного метода Келлога⁽¹³⁾ отыскания собственных значений и собственных функций вполне непрерывного и симметричного оператора.

Для задачи II в качестве нулевого приближения $n^{(0)}$ выбираем функцию $f = SL^{-1}F$. Приближения $n_{(p)}$ и $\varphi_{(p)}$ соответственно для n и φ строятся в виде:

$$\begin{aligned} n_{(p)} &= \sum_{k=0}^p \lambda^k n^{(k)} + \frac{\lambda^{p+1}}{\lambda_1 - \lambda} n^{(p)}, \quad p = 0, 1, \dots, \\ \varphi_{(p)} &= L^{-1}F + \sum_{k=1}^p \lambda^k \varphi^{(k)} + \frac{\lambda^{p+1}}{\lambda_1 - \lambda} \varphi^{(p)}, \quad p = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (6.4)$$

где $\varphi^{(k)}$ и $n^{(k)}$ определяются согласно (6.1).

Идея изложенного приема, уточняющего обычную схему последовательных приближений (в виде оборванного ряда Неймана для интегрального уравнения (3.2)), была впервые использована Л. А. Люстерником⁽¹⁴⁾ для улучшения сходимости итераций при решении систем линейных алгебраических уравнений.

Докажем две теоремы относительно сходимости последовательностей (6.3) и (6.4).

ТЕОРЕМА 6.1. *Последовательные приближения $\lambda_{(p)}$ сходятся, монотонно убывая, к первому собственному значению λ_1 , причем*

$$0 \leq \lambda_{(p)} - \lambda_1 < \frac{\lambda_1}{2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{2(p-1)} \frac{\gamma^2 - C_1^2}{C_1^2}, \quad \lambda_{(p+1)} \leq \lambda_{(p)}, \quad p = 1, 2, \dots \quad (6.5)$$

последовательные приближения $n_{(p)}$ и $\varphi_{(p)}$ сходятся соответственно к n_1 в пространствах H и C и к φ_1 в пространствах D (и, тем более, \bar{D}) и M , причем

$$\|n_{(p)} - n_1\|_H \leq \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^p \frac{\sqrt{\gamma^2 - C_1^2}}{C_1}, \quad p = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.6)$$

$$\|n^{(p)} - n_1\|_C \leq \delta \lambda_2^\sigma \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^p \frac{\sqrt{\gamma^2 - C_1^2}}{C_1}, \quad p = \sigma, \sigma + 1, \dots, \quad (6.7)$$

$$\|\varphi^{(p)} - \varphi_1\| < \|\varphi^{(p)} - \varphi_1\|_D \leq \sqrt{\beta \omega_n \lambda_2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^p \frac{\sqrt{\gamma^2 - C_1^2}}{C_1}, \quad p = 1, 2, \dots, \quad (6.8)$$

$$\|\varphi^{(p)} - \varphi_1\|_{\mathfrak{M}} \leq \beta \delta \lambda_2^{1+\sigma} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^p \frac{\sqrt{\gamma^2 - C_1^2}}{C_1}, \quad p = \sigma + 1, \sigma + 2, \dots, \quad (6.9)$$

где число δ определяется формулой (3.14) и $\sigma = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$.

Доказательство. В силу теоремы 3.1, схема последовательных приближений (6.1) для функций $\varphi^{(p)}$ и $n^{(p)}$ эквивалентна схеме последовательных приближений для функций $n^{(p)}$:

$$n^{(p)} = K n^{(p-1)} = K^p n^{(0)}, \quad p = 0, 1, \dots \quad (6.10)$$

Отсюда, по теореме Гильберта — Шмидта, имеем:

$$n^{(p)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{\lambda_k^p} n_k, \quad p = 0, 1, \dots, \quad (6.11)$$

где C_k определяются согласно (6.2). Ряды (6.11) сходятся в пространстве H ; в силу (3.14), при $p \geq \sigma$ ряды (6.11) сходятся в пространстве C [см. (4), стр. 264].

Из (6.11) получаем:

$$\|n^{(p)}\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k^2}{\lambda_k^{2p}}, \quad p = 0, 1, \dots \quad (6.12)$$

Докажем монотонное убывание последовательности $\lambda_{(p)}$. На основании (6.10), имеем:

$$\|n^{(p)}\|_H^2 = (n^{(p)}, n^{(p)})_H = (n^{(p)}, K n^{(p-1)})_H = (K n^{(p)}, n^{(p-1)})_H = (n^{(p+1)}, n^{(p-1)})_H.$$

Отсюда в силу неравенства Буняковского — Шварца получим:

$$\|n^{(p)}\|_H^2 \leq \|n^{(p+1)}\|_H \|n^{(p-1)}\|_H.$$

Это дает, на основании (6.3):

$$\lambda_{(p+1)} = \frac{\|n^{(p)}\|_H}{\|n^{(p+1)}\|_H} \leq \frac{\|n^{(p-1)}\|_H}{\|n^{(p)}\|_H} = \lambda_{(p)}, \quad p = 1, 2, \dots$$

Принимая во внимание (6.3) и (6.12), в силу (4.14), при $p = 1, 2, \dots$ получим:

$$\lambda_{(p)} - \lambda_1 = \frac{\|n^{(p-1)}\|_H}{\|n^{(p)}\|_H} - \lambda_1 = \lambda_1 \left[\sqrt{\frac{1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{C_k^2}{C_1^2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\right)^{2(p-1)}}{1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{C_k^2}{C_1^2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\right)^{2p}}} - 1 \right] \geq 0.$$

Отметим простые неравенства при $x \geq 0$, $y \geq 0$:

$$\left| \sqrt{\frac{1+x}{1+y}} - 1 \right| \leq \frac{1}{2} |x - y|, \quad 0 \leq 1 + \frac{1+x}{1+y} - \frac{2}{\sqrt{1+y}} \leq x. \quad (6.13)$$

Принимая во внимание первое неравенство (6.13), получим:

$$0 \leq \lambda_{(p)} - \lambda_1 \leq \frac{\lambda_1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{C_k^2}{C_1^2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k} \right)^{2(p-1)} \left[1 - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k} \right)^2 \right] \leq \frac{\lambda_1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{C_k^2}{C_1^2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k} \right)^{2(p-1)}.$$

Учитывая (4.14) и (6.2), находим, далее, при $p = 1, 2, \dots$:

$$0 \leq \lambda_{(p)} - \lambda_1 \leq \frac{\lambda_1}{2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{2(p-1)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{C_k^2}{C_1^2} = \frac{\lambda_1}{2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{2(p-1)} \frac{\gamma^2 - C_1^2}{C_1^2},$$

что и устанавливает справедливость оценок (6.5).

Докажем, что при $\rho = 0, 1, \dots$, $p = \rho, \rho + 1, \dots$ справедливы неравенства:

$$\left\| \frac{n^{(p-\rho)}}{\|n^{(p)}\|_H} - \lambda_1^\rho n_1 \right\|_H \leq \lambda_2^\rho \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^p \frac{\sqrt{\gamma^2 - C_1^2}}{C_1}. \quad (6.14)$$

В силу (6.11) и (6.12), при $\rho = 0, 1, \dots$, $p = \rho, \rho + 1, \dots$ имеем:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{n^{(p-\rho)}}{\|n^{(p)}\|_H} - \lambda_1^\rho n_1 \right\|_H &= \lambda_1^{2\rho} \left\| \frac{n_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{C_k}{C_1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k} \right)^{p-\rho} n_k}{\sqrt{1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{C_k^2}{C_1^2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k} \right)^{2p}}} - n_1 \right\|_H^2 = \\ &= \lambda_1^{2\rho} \frac{\left[1 - \sqrt{1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{C_k^2}{C_1^2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k} \right)^{2p}} \right]^2 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{C_k^2}{C_1^2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k} \right)^{2(p-\rho)}}{1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{C_k^2}{C_1^2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k} \right)^{2p}} = \\ &= \lambda_1^{2\rho} \left[1 + \frac{1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{C_k^2}{C_1^2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k} \right)^{2(p-\rho)}}{1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{C_k^2}{C_1^2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k} \right)^{2p}} - \frac{2}{\sqrt{1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{C_k^2}{C_1^2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k} \right)^{2p}}} \right]. \end{aligned}$$

Принимая во внимание (4.14), (6.2) и второе из неравенств (6.13), получим далее:

$$\left\| \frac{n^{(p-\rho)}}{\|n^{(p)}\|_H} - \lambda_1^\rho n_1 \right\|_H^2 \leq \lambda_1^{2\rho} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{C_k^2}{C_1^2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k} \right)^{2(p-\rho)} \leq \lambda_2^{2\rho} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{2p} \frac{\gamma^2 - C_1^2}{C_1^2},$$

что и доказывает справедливость неравенств (6.14).

Полагая в (6.14) $\rho = 0$, получим неравенства (6.6), если учесть (6.3).

Докажем неравенства (6.7). Предварительно отметим, что из (6.11)

следует, что $K^\sigma n \in C$, если $n \in H$. Отсюда и из (4.9) следует, что оператор K^σ переводит пространство H в пространство C , причем

$$\|K^\sigma\|_C \leq \delta. \quad (6.15)$$

Принимая во внимание (6.3), (6.10) и (6.15), получим при $p = \sigma, \sigma + 1, \dots$

$$\begin{aligned} \|n_{(p)} - n_1\|_C &= \left\| \frac{n^{(p)}}{\|n^{(p)}\|_H} - n_1 \right\|_C = \left\| K^\sigma \left[\frac{n^{(p-\sigma)}}{\|n^{(p)}\|_H} - \lambda_1^\sigma n_1 \right] \right\|_C \leq \\ &\leq \delta \left\| \frac{n^{(p-\sigma)}}{\|n^{(p)}\|_H} - \lambda_1^\sigma n_1 \right\|_H. \end{aligned}$$

В силу неравенства (6.14) при $p = \sigma$, получим отсюда неравенства (6.7).

Докажем неравенства (6.8). На основании (1.7), (6.1) и (6.3), при $p = 1, 2, \dots$ имеем:

$$\begin{aligned} \|\varphi_{(p)} - \varphi_1\|_D &= \left\| \frac{\varphi^{(p)}}{\|n^{(p)}\|_H} - \varphi_1 \right\|_D = \left\| \frac{L\varphi^{(p)}}{\|n^{(p)}\|_H} - L\varphi_1 \right\| = \\ &= \left\| b \left[\frac{n^{(p-1)}}{\|n^{(p)}\|_H} - \lambda_1 n_1 \right] \right\| \leq V\beta\omega_n \left\| \frac{n^{(p-1)}}{\|n^{(p)}\|_H} - \lambda_1 n_1 \right\|_H. \end{aligned}$$

Принимая во внимание лемму 1.2 и неравенство (6.14) при $p = 1$, убеждаемся в справедливости неравенств (6.8).

Докажем, наконец, оценки (6.9). На основании (6.1) и (6.3), при $p = \sigma + 1, \sigma + 2, \dots$ имеем:

$$\|\varphi_{(p)} - \varphi_1\|_{\mathfrak{M}} = \left\| \frac{\varphi^{(p)}}{\|n^{(p)}\|_H} - \varphi_1 \right\|_{\mathfrak{M}} = \left\| L^{-1} \left[\frac{bn^{(p-1)}}{\|n^{(p)}\|_H} - \lambda_1 bn_1 \right] \right\|_{\mathfrak{M}}.$$

Отсюда, учитывая следствие 3 к лемме 2.2, получим, в силу (1.6):

$$\|\varphi_{(p)} - \varphi_1\|_{\mathfrak{M}} \leq \left\| b \left[\frac{n^{(p-1)}}{\|n^{(p)}\|_H} - \lambda_1 n_1 \right] \right\|_{\mathfrak{M}} \leq \beta \left\| \frac{n^{(p-1)}}{\|n^{(p)}\|_H} - \lambda_1 n_1 \right\|_C.$$

Далее, используя (6.10) и (6.15), найдем:

$$\|\varphi_{(p)} - \varphi_1\|_{\mathfrak{M}} \leq \beta \left\| K^\sigma \left[\frac{n^{(p-1-\sigma)}}{\|n^{(p)}\|_H} - \lambda_1^{1+\sigma} n_1 \right] \right\|_C \leq \beta\delta \left\| \frac{n^{(p-1-\sigma)}}{\|n^{(p)}\|_H} - \lambda_1^{1+\sigma} n_1 \right\|_H.$$

Принимая во внимание (6.14) при $p = 1 + \sigma$, получим отсюда оценки (6.9).

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 6.2. При условии $|\lambda| < \lambda_1$ имеют место оценки:

$$\|n - n_{(p)}\|_H < \sqrt{\beta\omega_n} \left| \frac{\lambda}{\lambda_1 - \lambda} \right| \left| \frac{\lambda}{\lambda_2} \right|^p \|F\|, \quad p = 0, 1, \dots, \quad (6.16)$$

$$\|n - n_{(p)}\|_C < \delta \sqrt{\beta\omega_n} \left| \frac{\lambda}{\lambda_1 - \lambda} \right| \lambda_2^\sigma \left| \frac{\lambda}{\lambda_2} \right|^p \|F\|, \quad p = \sigma, \sigma + 1, \dots, \quad (6.17)$$

$$\|\varphi - \varphi_{(p)}\| < \|\varphi - \varphi_{(p)}\|_D < \beta\omega_n \left| \frac{\lambda}{\lambda_1 - \lambda} \right| \lambda_2 \left| \frac{\lambda}{\lambda_2} \right|^p \|F\|, \quad p = 1, 2, \dots, \quad (6.18)$$

$$\|\varphi - \varphi_{(p)}\|_{\mathfrak{M}} < \beta\delta \sqrt{\beta\omega_n} \left| \frac{\lambda}{\lambda_1 - \lambda} \right| \lambda_2^{\sigma+1} \left| \frac{\lambda}{\lambda_2} \right|^p \|F\|, \quad p = \sigma + 1, \sigma + 2, \dots, \quad (6.19)$$

где приближения $n_{(p)}$ и $\varphi_{(p)}$ соответственно к $n = S\varphi$ и φ — решению уравнения (1.1) — определяются формулами (6.4).

Доказательство. Решение n уравнения (3.2) при $|\lambda| < \lambda_1$ равно

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k n^{(k)}, \quad (6.20)$$

где $n^{(k)}$ определяются формулами (6.10) с $n^{(0)} = SL^{-1}F$. Ряд (6.20) сходится в пространстве H .

Принимая во внимание (5.8) и (5.11), найдем:

$$\begin{aligned} f &= SL^{-1}F = \sum_{k=1}^{\infty} C_k n_k, \quad C_k = \frac{(UF, \varphi_k)}{\lambda_k} = (f, n_k)_H, \\ \sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 &= \|f\|_H^2 < \beta \omega_n \|F\|^2. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Докажем теперь оценки при $\rho = 0, 1, \dots, p = \rho, \rho + 1, \dots, |\lambda| < \lambda_1$:

$$\left\| \sum_{k=p+1}^{\infty} \lambda^k n^{(k-\rho)} - \frac{\lambda^{p+1}}{\lambda_1 - \lambda} n^{(p-\rho)} \right\|_H < \frac{|\lambda|}{\lambda_1 - \lambda} \left| \frac{\lambda}{\lambda_2} \right|^{2p} \lambda_2^{\rho} \sqrt{\beta \omega_n} \|F\|. \quad (6.22)$$

Действительно, в силу (6.11) и (6.21), имеем:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=p+1}^{\infty} \lambda^k n^{(k-\rho)} - \frac{\lambda^{p+1}}{\lambda_1 - \lambda} n^{(p-\rho)} \right\|_H^2 &= \left\| \sum_{k=p+1}^{\infty} \lambda^k \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_i n_i}{\lambda_i^{k-\rho}} - \frac{\lambda^{p+1}}{\lambda_1 - \lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_i n_i}{\lambda_i^{p-\rho}} \right\|_H^2 = \\ &= \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \left[\sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\lambda_i^{k-\rho}} - \frac{\lambda^{p+1}}{\lambda_i^{p-\rho} (\lambda_1 - \lambda)} \right] C_i n_i \right\|_H^2 = \left\| \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\lambda^{p+1} (\lambda_i - \lambda_1)}{\lambda_i^{2(p-\rho)} (\lambda_i - \lambda) (\lambda_1 - \lambda)} C_i n_i \right\|_H^2 = \\ &= \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\lambda^{2p+2} (\lambda_i - \lambda_1)^2}{\lambda_i^{2(p-\rho)} (\lambda_i - \lambda)^2 (\lambda_1 - \lambda)^2} C_i^2 \leq \left(\frac{\lambda}{\lambda_1 - \lambda} \right)^2 \left(\frac{\lambda}{\lambda_2} \right)^{2p} \lambda_2^{2\rho} \sum_{i=2}^{\infty} C_i^2 < \\ &< \left(\frac{\lambda}{\lambda_1 - \lambda} \right)^2 \left(\frac{\lambda}{\lambda_2} \right)^{2p} \lambda_2^{2\rho} \beta \omega_n \|F\|^2, \end{aligned}$$

что и устанавливает справедливость оценок (6.22).

Докажем оценки (6.16). В силу (6.4) и (6.20), имеем:

$$\|n - n_{(p)}\|_H = \left\| \sum_{k=p+1}^{\infty} \lambda^k n^{(k)} - \frac{\lambda^{p+1}}{\lambda_1 - \lambda} n^{(p)} \right\|_H. \quad (6.23)$$

Принимая во внимание оценки (6.22) при $\rho = 0$, убеждаемся, в силу (6.23), в справедливости оценок (6.16).

Докажем оценки (6.17). В силу (6.10) и (6.20), при $p = \sigma, \sigma + 1, \dots$ имеем:

$$n - n_{(p)} = K^{\sigma} \left[\sum_{k=p+1}^{\infty} \lambda^k n^{(k-\sigma)} - \frac{\lambda^{p+1}}{\lambda_1 - \lambda} n^{(p-\sigma)} \right].$$

Отсюда и из (6.15) заключаем, что $n - n_{(p)} \in C$ и

$$\|n - n_{(p)}\|_C \leq \delta \left\| \sum_{k=p+1}^{\infty} \lambda^k n^{(k-\sigma)} - \frac{\lambda^{p+1}}{\lambda_1 - \lambda} n^{(p-\sigma)} \right\|_H.$$

Учитывая неравенства (6.22) при $p = \sigma$, убеждаемся в справедливости оценок (6.17).

Установим справедливость оценок (6.18). Имеем:

$$\|\varphi - \varphi_{(p)}\| < \|\varphi - \varphi_{(p)}\|_D = \|L(\varphi - \varphi_{(p)})\|.$$

Но в силу (6.1) и (6.4), при $p = 1, 2, \dots$ получаем:

$$\begin{aligned} L\varphi_{(p)} &= F + \sum_{k=1}^p \lambda^k L\varphi^{(k)} + \frac{\lambda^{p+1}}{\lambda_1 - \lambda} L\varphi^{(p)} = F + \sum_{k=1}^p \lambda^k b n^{(k-1)} + \\ &+ \frac{\lambda^{p+1}}{\lambda_1 - \lambda} b n^{(p-1)} = \lambda b n_{(p-1)} + F. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Из (6.24) и (3.1) находим:

$$\|\varphi - \varphi_{(p)}\| = \|\lambda b(n - n_{(p-1)})\| \leq |\lambda| \sqrt{\beta \omega_n} \|n - n_{(p-1)}\|_H.$$

Отсюда и из оценок (6.16) получаем требуемые оценки (6.18).

Наконец, докажем оценки (6.19). В силу (3.1) и (6.24), при $p = \sigma + 1, \sigma + 2, \dots$ получим:

$$\|\varphi - \varphi_{(p)}\|_{\mathfrak{M}} = \|L^{-1}[\lambda b n - \lambda b n_{(p-1)}]\|_{\mathfrak{M}}.$$

Отсюда на основании (1.6) и неравенства (2.11) имеем:

$$\|\varphi - \varphi_{(p)}\|_{\mathfrak{M}} \leq |\lambda| \|b(n - n_{(p-1)})\|_{\mathfrak{M}} \leq |\lambda| \beta \|n - n_{(p-1)}\|_C.$$

Приимая во внимание доказанные неравенства (6.17), убеждаемся в справедливости неравенств (6.19). Теорема доказана.

§ 7. Преобразование задачи к самосопряженному виду

Установленные в § 4 вариационные принципы для интегрального уравнения Пайерлса можно, пользуясь теоремой 3.1, применить для приближенного построения решения задачи (1.1) с помощью прямых методов вариационного исчисления: Ритца, наименьших квадратов и др. Однако практическая реализация этих вариационных принципов затрудняется ввиду сложности билинейной формы $(Kn, m)_H$. Но можно построить вариационные принципы, связанные непосредственно с интегро-дифференциальным уравнением (1.1) и сопряженным с ним уравнением (1.1*) (§ 2). Соответствующая этим вариационным принципам билинейная форма имеет достаточно простой вид, что позволяет эффективно применять прямые методы вариационного исчисления к исследованию и приближенному решению поставленной задачи.

Пользуясь тем, что $L^* = ULU$, преобразуем задачи (1.1) и (1.1*) таким образом, чтобы новая задача была самосопряженной и давала бы все решения задач (1.1) и (1.1*).

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции $u(s, P)$, заданной в $\Omega \times G$:

$$-\frac{1}{a(P)} \left(s, \operatorname{grad} \frac{1}{a(P)}(s, \operatorname{grad} u) \right) + u = \lambda b(P) \int_{\Omega} u(s, P) ds + F(s, P). \quad (7.1)$$

Решения уравнения (7.1) будем искать в классе функций D_0 , который будет также и областью задания линейного дифференциального выражения $l_0 u$, стоящего в левой части уравнения (7.1):

$$\begin{aligned} l_0 u &\equiv -\frac{1}{a(P)} \left(s, \operatorname{grad} \frac{1}{a(P)}(s, \operatorname{grad} u) \right) + u \equiv \\ &\equiv U W U u \equiv \left(\frac{1}{a(P)}(s, \operatorname{grad}) + 1 \right) \left(-\frac{1}{a(P)}(s, \operatorname{grad}) + 1 \right) u \equiv \\ &\equiv U W l u \equiv \left(-\frac{1}{a(P)}(s, \operatorname{grad}) + 1 \right) \left(\frac{1}{a(P)}(s, \operatorname{grad}) + 1 \right) u. \end{aligned} \quad (7.2)$$

К классу D_0 отнесем функции u , обладающие следующими свойствами:

1°. При почти всех $(s, Q) \in \Omega \times \pi_s$ функции

$$u(s, Q + \xi s) \quad \text{и} \quad \frac{1}{a(Q + \xi s)} \frac{\partial}{\partial \xi} u(s, Q + \xi s)$$

абсолютно непрерывны на замкнутом множестве $\overline{\pi_{s,Q}}$.

2°. При почти всех $(s, Q) \in \Omega \times \pi_s$ функция $u(s, Q + \xi s)$ удовлетворяет граничным условиям:

$$a) \quad u(s, Q + \xi_1 s) = \frac{1}{a(Q + \xi_1 s)} \frac{\partial}{\partial \xi} u(s, Q + \xi s) \Big|_{\xi = \xi_1},$$

$$u(s, Q + \eta_N s) = -\frac{1}{a(Q + \eta_N s)} \frac{\partial}{\partial \xi} u(s, Q + \xi s) \Big|_{\xi = \eta_N}.$$

$$b) \quad u(s, Q + \xi_{i+1} s) = u(s, Q + \eta_i s),$$

$$\frac{1}{a(Q + \xi_{i+1} s)} \frac{\partial}{\partial \xi} u(s, Q + \xi s) \Big|_{\xi = \xi_{i+1}} = \frac{1}{a(Q + \eta_i s)} \frac{\partial}{\partial \xi} u(s, Q + \xi s) \Big|_{\xi = \eta_i}$$

$$(i = 1, 2, \dots, N-1).$$

3°. Функция u такова, что $l_0 u \in \mathfrak{H}$.

ЛЕММА 7.1. Если $u \in D_0$, то u и $\frac{1}{a}(s, \operatorname{grad} u) \in \mathfrak{H}$, причем имеют место неравенства:

$$\|u\| \leq (1 - e^{-\alpha d}) \|l_0 u\|, \quad \left\| \frac{1}{a}(s, \operatorname{grad} u) \right\| \leq (1 - e^{-\alpha d}) \|l_0 u\|.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.2. Если $u \in D_0$, то, в силу (7.2) и условия 3°, функция u удовлетворяет уравнению:

$$l_0 u \equiv U W U u \equiv U W l u = F, \quad F \in \mathfrak{H}, \quad (7.3)$$

и условиям 1° и 2°. Обозначим

$$\varphi = U W U u \equiv -\frac{1}{a(P)}(s, \operatorname{grad} u) + u, \quad \psi = l u \equiv \frac{1}{a(P)}(s, \operatorname{grad} u) + u. \quad (7.4)$$

Из условий 1°—3° и из (7.3) и (7.4) следует, что введенные функции φ и ψ удовлетворяют уравнениям:

$$L\varphi = F, \quad \varphi \in D, \quad L^*\psi = F, \quad \psi \in UD. \quad (7.5)$$

Принимая во внимание леммы 2.2 и 2.3, получим из (7.5):

$$\varphi = L^{-1}F, \quad \psi = (L^*)^{-1}F = UL^{-1}UF.$$

Отсюда и из (7.4) найдем:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}(\varphi + \psi) = \frac{1}{2}(L^{-1} + UL^{-1}U)F, \\ \frac{1}{a}(s, \text{grad } u) &= \frac{1}{2}(\psi - \varphi) = \frac{1}{2}(UL^{-1}U - L^{-1})F, \end{aligned} \quad (7.6)$$

что, в силу леммы 2.2, и доказывает справедливость леммы 7.1.

Множество функций D_0 — линейное и содержится в \mathfrak{H} . Линейное дифференциальное выражение $l_0 u$, вместе с областью его задания D_0 , определяет линейный оператор L_0 с областью определения D_0 .

Введем в линейном множестве D_0 метрику при помощи скалярного произведения и соответствующей нормы:

$$(u, v)_{D_0} = (L_0 u, L_0 v), \quad \|u\|_{D_0} = \sqrt{(u, u)_{D_0}}, \quad u, v \in D_0.$$

В силу леммы 7.1, введенное скалярное произведение удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения.

Уравнение (7.1) запишем в операторной форме:

$$L_0 u = \lambda b S u + F, \quad u \in D_0.$$

Изучим подробнее свойства оператора L_0 .

ЛЕММА 7.2. Если u и $v \in D_0$, то имеет место формула:

$$\begin{aligned} (L_0 u, v) &= (u, L_0 v) = \int_{\Omega \times \pi_s} [u(s, Q + \xi_1 s) v(s, Q + \xi_1 s) + \\ &+ u(s, Q + \eta_1 s) v(s, Q + \eta_1 s)] ds dQ + \\ &+ \int_{\Omega \times G} \left[\frac{1}{a(P)}(s, \text{grad } u)(s, \text{grad } v) + a(P)uv \right] ds dP. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Доказательство. Пусть u и $v \in D_0$. Тогда $L_0 u$ и $L_0 v \in \mathfrak{H}$. По лемме (7.1), $u, v, \frac{1}{a}(s, \text{grad } u)$ и $\frac{1}{a}(s, \text{grad } v) \in \mathfrak{H}$. В силу (1.2) и (1.5), дифференциальное выражение $l_0 u$ в точке $(s, P) = (s, Q, \xi)$ примет вид:

$$l_0 u = -\frac{1}{a(Q + \xi s)} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{a(Q + \xi s)} \frac{\partial}{\partial \xi} u(s, Q + \xi s) + u(s, Q + \xi s).$$

Принимая во внимание лемму 1.1, получим с помощью теоремы Фубини (как и при доказательстве леммы 2.1):

$$\begin{aligned} (L_0 u, v) &= \int_{\Omega \times G} a(P) l_0 u \cdot v ds dP = \\ &= - \int_{\Omega \times G} (s, \text{grad } \frac{1}{a}(s, \text{grad } u)) v ds dP + (u, v) = \\ &= - \int_{\Omega \times \pi_s} \sum_{i=1}^N \int_{\xi_i}^{\eta_i} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{a(Q + \xi s)} \frac{\partial}{\partial \xi} u(s, Q + \xi s) v(s, Q + \xi s) d\xi ds dQ + (u, v). \end{aligned}$$

Функции u и v удовлетворяют условиям 1° и 2° . Учитывая эти условия, после интегрирования по частям получим:

$$\begin{aligned}(L_0 u, v) &= \int_{\Omega \times \pi_s} \sum_{i=1}^N \int_{\xi_i} \frac{1}{a(Q + \xi s)} \frac{\partial}{\partial \xi} u(s, Q + \xi s) \frac{\partial}{\partial \xi} v(s, Q + \xi s) d\xi ds dQ + (u, v) - \\ &- \int_{\Omega \times \pi_s} \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{a(Q + \eta_i s)} \frac{\partial}{\partial \xi} u(s, Q + \xi s) \Big|_{\xi=\eta_i} v(s, Q + \eta_i s) - \right. \\ &- \left. \frac{1}{a(Q + \xi_i s)} \frac{\partial}{\partial \xi} u(s, Q + \xi s) \Big|_{\xi=\xi_i} v(s, Q + \xi_i s) \right] ds dQ = \\ &= \int_{\Omega \times \pi_s} \int_{\pi_s, Q} \frac{1}{a(Q + \xi s)} \frac{\partial}{\partial \xi} u(s, Q + \xi s) \frac{\partial}{\partial \xi} v(s, Q + \xi s) d\xi ds dQ + (u, v) + \\ &+ \int_{\Omega \times \pi_s} [u(s, Q + \eta_N s) v(s, Q + \eta_N s) + u(s, Q + \xi_1 s) v(s, Q + \xi_1 s)] ds dQ.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Следствие. Полагая в (7.7) $u = v$, получим:

$$(L_0 u, u) = \int_{\Omega \times \pi_s} [u^2(s, Q + \xi_1 s) + u^2(s, Q + \eta_N s)] ds dQ + \left\| \frac{(s, \text{grad } u)}{a} \right\|^2 + \|u\|^2. \quad (7.8)$$

Из (7.8) следует: если $L_0 u = 0$ почти всюду в $\Omega \times G$, то $u = (s, \text{grad } u) = 0$ почти всюду в $\Omega \times G$ и $u(s, Q + \xi_1 s) = u(s, Q + \eta_N s) = 0$ почти всюду в $\Omega \times \pi_s$.

ЛЕММА 7.3. При любом $F \in \mathfrak{H}$ существует единственное решение из D_0 уравнения $L_0 u = F$, которое при почти всех $(s, P) \in \Omega \times G$ дается формулой

$$\begin{aligned}u(s, P) = L^{-1}F &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\xi} \left\{ a(P - \xi s) F(s, P - \xi s) \exp \left[- \int_0^{\xi} a(P - \xi' s) d\xi' \right] + \right. \\ &+ \left. a(P + \xi s) F(s, P + \xi s) \exp \left[- \int_0^{\xi} a(P + \xi' s) d\xi' \right] \right\} d\xi.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$L_0^{-1} = \frac{1}{2} (L^{-1} + (L^*)^{-1}) = \frac{1}{2} (L^{-1} + UL^{-1}U), \quad \|L_0^{-1}\| \leq 1 - e^{-\alpha d}. \quad (7.9)$$

Доказательство. Из следствия к лемме 7.2 следует, что оператор L_0^{-1} существует. При доказательстве леммы 7.1 установлено, что функция u , построенная по первой из формул (7.6), принадлежит D_0 и удовлетворяет уравнению $L_0 u = F$. Принимая во внимание леммы 2.2 и 2.3, убеждаемся в справедливости леммы 7.3.

Следствие 1. Область значений оператора L_0 совпадает с \mathfrak{H} .

Следствие 2. Если $u \in D_0$, то существуют и ограничены интегралы:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \times \pi_s} u^2(s, Q + \xi_1 s) ds dQ &< (1 - e^{-\alpha d}) \|u\|_{D_*}^2, \\ \int_{\Omega \times \pi_s} u^2(s, Q + \eta_N s) ds dQ &< (1 - e^{-\alpha d}) \|u\|_{D_*}^2. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Действительно, из (7.8) и из леммы 7.3 получаем:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \times \pi_s} u^2(s, Q + \xi_1 s) ds dQ &< (L_0 u, u) = \\ &= (L_0 u, L_0^{-1} L_0 u) \leq \|L_0^{-1}\| (L_0 u, L_0 u) \leq (1 - e^{-\alpha d}) \|u\|_{D_*}^2. \end{aligned}$$

Так же доказывается и второе из неравенств (7.10).

Следствие 3. Если, в частности, $F \in \mathfrak{M}$, то $u = L_0^{-1} F \in \mathfrak{M}$, причем

$$\|L_0^{-1}\|_{\mathfrak{M}} \leq 1 - e^{-\alpha d}. \quad (7.11)$$

Утверждение вытекает из следствия 3 к лемме 2.2 и из (7.9).

Следствие 4.

$$(L_0^{-1})^* = L_0^{-1}. \quad (7.12)$$

Действительно, в силу лемм 2.3 и 7.3, имеем:

$$\begin{aligned} (L_0^{-1})^* &= \frac{1}{2} (L^{-1} + UL^{-1}U)^* = \frac{1}{2} [(L^{-1})^* + U(L^{-1})^*U] = \\ &= \frac{1}{2} (UL^{-1}U + UUL^{-1}UU) = \frac{1}{2} (L^{-1} + UL^{-1}U) = L_0^{-1}. \end{aligned}$$

Следствие 5. Пространство D_0 плотно в пространстве \mathfrak{H} , $\bar{D}_0 = \mathfrak{H}$.

Действительно, из соотношения $(u, F) = 0$ при всех $u \in D_0$ в силу леммы 7.3 и (7.12) имеем:

$$0 = (L_0^{-1} L_0 u, F) = (L_0 u, L_0^{-1} F).$$

Отсюда и из следствия 1 получаем: $L_0^{-1} F = 0$. Следовательно, $L_0 L_0^{-1} F = F = 0$.

Следствие 6. Пространство D_0 — полное.

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.5.

Следствие 7. $L_0^* = L_0$.

Область D_0 задания оператора L_0 плотна в \mathfrak{H} . Следовательно, существует оператор L_0^* , сопряженный к L_0 . Кроме того, существуют операторы $(L_0^{-1})^{-1} = L_0$, $(L_0^{-1})^* = L_0^{-1}$. Тогда [см. (4), стр. 329] имеем:

$$((L_0^{-1})^*)^{-1} = L_0 = ((L^{-1})^{-1})^* = L_0^*.$$

Теперь для задачи (7.1) можно высказать теорему, аналогичную теореме 3.1.

ТЕОРЕМА 7.1. Для того чтобы функция u была решением задачи (7.1), необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла уравнению

$$L_0 u = \lambda b \rho + F, \quad (7.13)$$

где функция $\rho \in H$ и является решением интегрального уравнения типа Пайерлса:

$$\rho = \lambda K \rho + \frac{1}{2} SL^{-1}(F + UF). \quad (7.14)$$

Доказательство. Обозначим $\rho = Su$. Так как $u \in D_0 \subset \mathfrak{H}$, то $\rho \in H$. Из уравнения (7.1) следует уравнение (7.13). По лемме 7.3, из (7.13) получаем:

$$u = \lambda L_0^{-1} b \rho + L_0^{-1} F = \frac{\lambda}{2} (L^{-1} + UL^{-1}U) b \rho + \frac{1}{2} (L^{-1} + UL^{-1}U) F.$$

Применяя оператор S к обеим частям полученного равенства, в силу (2.6) находим:

$$\begin{aligned} Su = \rho &= \frac{\lambda}{2} SL^{-1} b \rho + \frac{\lambda}{2} SUL^{-1} U b \rho + \frac{1}{2} SL^{-1} F + \frac{1}{2} SUL^{-1} U F = \\ &= \lambda K \rho + \frac{1}{2} SL^{-1}(F + UF). \end{aligned}$$

Необходимость условия теоремы доказана. Аналогично, как и при доказательстве теоремы 3.1, доказывается и достаточность условия. Теорема доказана.

Следствие. Из сопоставления теорем 3.1 и 7.1, а также из результатов § 4 следует, что числа λ_k суть собственные значения оператора L_0 , причем $L_0 u_k = \lambda_k b n_k$. Отсюда, в силу (4.11) и (7.9), имеем:

$$u_k = \lambda_k L_0^{-1} b n_k = \frac{\lambda_k}{2} (L^{-1} + UL^{-1}U) b n_k = \frac{1}{2} (\varphi_k + U \varphi_k). \quad (7.15)$$

Принимая во внимание формулу (2.3), получим соотношения:

$$(L_0 u_k, u_i) = \lambda_k (b n_k, u_i) = \lambda_k (n_k, S u_i)_H = \lambda_k (n_k, n_i)_H = \lambda_k \delta_{ki}. \quad (7.16)$$

При $\lambda \neq \lambda_k$ также имеет место связь между решениями φ и ψ задач (1.1) и (1.1*) и решением u задачи (7.1), однако для таких F , которые удовлетворяют условию (ср. условие (2.14)):

$$SL^{-1}F = SL^{-1}UF. \quad (7.17)$$

ТЕОРЕМА 7.2. Для того чтобы функция u была решением задачи (7.1) с функцией F , удовлетворяющей условию (7.17), необходимо и достаточно, чтобы имели место соотношения:

$$u = \frac{1}{2} (\varphi + \psi), \quad \frac{1}{a} (s, \text{grad } u) = \frac{1}{2} (\psi - \varphi), \quad (7.18)$$

где φ и ψ суть решения соответственно задач (1.1) и (1.1*).

Доказательство необходимости. Пусть функция u есть решение задачи (7.1). Это значит, что $u \in D_0$ и $L_0 u = \lambda b Su + F$. Отсюда следует, как и при доказательстве леммы 7.1, что функции φ и ψ , по-

строенные по формулам (7.4), удовлетворяют уравнениям:

$$L\varphi = \lambda b S u + F, \quad L^* \psi = \lambda b S u + F. \quad (7.19)$$

Из формул (7.4) следуют формулы (7.18). Из условия (7.17) и из теорем 3.1 и 7.1 следует, что $Su = S\varphi = S\psi$. В силу (7.19), построенные функции φ и ψ являются решениями соответственно задач (1.1) и (1.1*).

Доказательство достаточности. Пусть функции φ и ψ суть решения соответственно задач (1.1) и (1.1*). Это значит, что $\varphi \in D$, $\psi \in UD$ и что функции φ и ψ удовлетворяют уравнениям:

$$l\varphi \equiv \frac{1}{a(P)}(s, \text{grad } \varphi) + \varphi = \lambda b S \varphi + F,$$

$$UW\psi \equiv -\frac{1}{a(P)}(s, \text{grad } \psi) + \psi = \lambda b S \psi + F.$$

Складывая и вычитая полученные уравнения и обозначая

$$\varphi + \psi = 2u, \quad \varphi - \psi = 2v, \quad \varphi = u + v, \quad \psi = u - v, \quad (7.20)$$

получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a(P)}(s, \text{grad } v) + u &= \frac{\lambda}{2} b (S\varphi + S\psi) + F, \\ \frac{1}{a(P)}(s, \text{grad } u) + v &= \frac{\lambda}{2} b (S\varphi - S\psi). \end{aligned} \quad (7.21)$$

Из теоремы 3.1 и из условия (7.17) следует, что $S\varphi = S\psi$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{a(P)}(s, \text{grad } v) + u &= \lambda b S u + F, \\ \frac{1}{a(P)}(s, \text{grad } u) + v &= 0. \end{aligned}$$

Исключая из последних уравнений v , получим уравнение (7.1) для функции u ; из (7.20) получим соотношения (7.18). Из условий 1)–3) для функций φ и $U\psi$ и из соотношений (7.18) следует, что построенная функция u удовлетворяет условиям 1° – 3° . Это и значит, что функция u есть решение задачи (7.1). Теорема доказана.

Замечание. Рассмотрим переход от задачи (1.1) к задаче (7.1) в случае $n = 1$. Здесь имеется всего два направления: s и $-s$. Поэтому зависимость от s будет учитываться введением двух функций, соответствующих этим направлениям, $\varphi(x)$ и $U\varphi(x)$. Оператор S в этом случае равен

$$\varphi(x) + U\varphi(x) = 2u(x).$$

В силу сделанных предположений относительно области G , заключаем, что в данном случае она состоит из конечного числа взаимно не пересекающихся интервалов

$$G = \sum_{i=1}^N (\xi_i, \eta_i).$$

В силу сказанного, уравнение (7.1) примет вид:

$$-\frac{1}{a(x)} \left(\frac{1}{a(x)} u' \right)' + u = 2\lambda b(x)u + F(x),$$

а условия $1^\circ - 3^\circ$ запишутся в форме:

$$1^\circ \quad u(x) \text{ и } \frac{1}{a(x)} u'(x) \text{ абсолютно непрерывны на } \bar{G},$$

$$2^\circ \quad \text{а) } u(\xi_1) = \frac{1}{a(\xi_1)} u'(\xi_1), \quad u(\eta_N) = -\frac{1}{a(\eta_N)} u'(\eta_N),$$

$$\text{б) } u(\xi_{i+1}) = u(\eta_i), \quad \frac{1}{a(\xi_{i+1})} u'(\xi_{i+1}) = \frac{1}{a(\eta_i)} u'(\eta_i), \quad i=1, 2, \dots, N-1,$$

$$3^\circ \quad -\frac{1}{a(x)} \left(\frac{1}{a(x)} u' \right)' + u \in \mathcal{H}.$$

Таким образом, при $n=1$ задача свелась к самосопряженному дифференциальному уравнению второго порядка с граничными условиями типа Штурма — Лиувилля и с областью, состоящей из конечного числа интервалов. Поэтому в дальнейшем мы будем считать $n \geq 2$. Впрочем, все полученные результаты будут справедливы и для $n=1$, если в них сделать предельный переход аналогично изложенному.

§ 8. Вариационные принципы для интегро-дифференциального уравнения

ТЕОРЕМА 8.1. *Собственное значение λ_k равно наименьшему значению функционала*

$$\frac{(L_0 u, u)}{\|Su\|_H^2} \quad (8.1)$$

при условии, что $u \in D_0$ и $(Su, Su_i)_H = 0$, $i=1, 2, \dots, k-1$. Это наименьшее значение достигается на собственной функции u_k , соответствующей собственному значению λ_k .

Доказательство. Из (7.8) следует, что функционал (8.1) принимает только положительные значения. Поэтому имеет смысл говорить о его наименьшем значении. Из следствия к теореме 7.1 выводим, что функционал (8.1) принимает значение λ_k при $u = u_k$; при этом

$$(Su_k, Su_i)_H = (n_k, n_i)_H = 0, \quad i=1, 2, \dots, k-1.$$

Таким образом, для доказательства теоремы остается доказать невозможность неравенства при $u \in D_0$:

$$\frac{(L_0 u, u)}{\|Su\|_H^2} = \lambda < \lambda_k, \quad (Su, Su_i)_H = 0, \quad i=1, 2, \dots, k-1. \quad (8.2)$$

Допуская противное, обозначим

$$L_0 u - \lambda b Su = F. \quad (8.3)$$

Очевидно, $F \in \mathcal{H}$. Принимая во внимание формулу (2.3), получим из (8.2) и (8.3):

$$(F, u) = (L_0 u, u) - \lambda (b Su, u) = (L_0 u, u) - \lambda (Su, Su)_H = 0. \quad (8.4)$$

Обозначим $n = Su$. По теореме 7.1, получаем из (8.3):

$$n = \lambda K n + S L_0^{-1} F. \quad (8.5)$$

Так как $(n, n)_H = 0$, $i = 1, 2, \dots, k-1$, то, в силу (4.15), имеем:

$$(n, n)_H - \lambda (Kn, n)_H \geq \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right) \|n\|_H^2 > 0.$$

Отсюда и из (8.5) следует, что $(SL_0^{-1}F, n)_H > 0$. Принимая во внимание (2.3) и (7.12), получим далее:

$$(SL_0^{-1}F, n)_H = (L_0^{-1}F, bn) = (F, L_0^{-1}bn) > 0. \quad (8.6)$$

Но из (8.3) следует:

$$L_0^{-1}bn = \frac{u}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} L_0^{-1}F.$$

Отсюда, а также из (8.4) и (8.6) будем иметь:

$$\frac{1}{\lambda} (F, u) - \frac{1}{\lambda} (F, L_0^{-1}F) = -\frac{1}{\lambda} (F, L_0^{-1}F) > 0.$$

Но $\lambda > 0$; поэтому $(F, L_0^{-1}F) < 0$. Обозначая

$$v = L_0^{-1}F \in D_0,$$

получим $F = L_0 v$. А тогда $(L_0 v, v) < 0$, что, на основании (7.8), невозможно. Теорема доказана.

Установленным в теореме 8.1 вариационным принципом неудобно пользоваться при отыскании λ_k , так как для этого нужно знать все собственные функции с меньшими номерами. Следующая теорема, устанавливающая максимально-минимальный принцип Куранта, дает прямой метод отыскания λ_k .

ТЕОРЕМА 8.2. Пусть F_1, F_2, \dots, F_{k-1} — любые $k-1$ функций из пространства \mathfrak{H} и

$$\nu(F_1, F_2, \dots, F_{k-1}) = \inf_{\substack{u \in D_0 \\ (Su, SF_i)_H = 0, \\ i = 1, 2, \dots, k-1}} \frac{(L_0 u, u)}{\|Su\|_H^2}.$$

Тогда

$$\lambda_k = \sup_{F_i \in \mathfrak{H}} \nu(F_1, F_2, \dots, F_{k-1})$$

и это наибольшее значение достигается, когда $SF_i = Su_i$, $i = 1, 2, \dots, k-1$.

Доказательство. По теореме 8.1, $\nu(u_1, u_2, \dots, u_{k-1}) = \lambda_k$. Поэтому остается доказать, что $\nu(F_1, F_2, \dots, F_{k-1}) \leq \lambda_k$ при произвольных функциях F_1, F_2, \dots, F_{k-1} из \mathfrak{H} . Выберем функцию $u \in D_0$ такую, что

$$u = \sum_{i=1}^k C_i u_i, \quad (Su, SF_i)_H = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k-1, \quad \|Su\|_H = 1.$$

Для этого достаточно выбрать числа C_i удовлетворяющими системе

$$\sum_{j=1}^k C_j (n_j, SF_i)_H = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k-1, \quad \sum_{j=1}^k C_j^2 = 1.$$

Полученная система всегда разрешима (может быть, не единственным способом). Принимая во внимание (4.14) и (7.16), получим отсюда:

$$\nu(F_1, F_2, \dots, F_{k-1}) \leq (L_0 u, u) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k C_i C_j (L_0 u_i, u_j) = \sum_{i=1}^k \lambda_i C_i^2 \leq \lambda_k,$$

что и требовалось доказать.

Недостатком вариационного принципа, установленного в теореме 8.2, является то, что множество функций сравнения u должно пробегать пространство D_0 , определяемое сложными условиями $1^\circ - 3^\circ$. Это обстоятельство затрудняет применение методов вариационного исчисления как для приближенного построения решения, так и для качественного исследования свойств решений, собственных функций и собственных значений. Чтобы обойти это затруднение, мы расширим множество функций сравнения: функция u будет пробегать не D_0 , а более широкое множество функций D_1 , $D_0 \subset D_1$.

К множеству функций D_1 отнесем функции u , удовлетворяющие условиям:

а) при почти всех $(s, Q) \in \Omega \times \pi_s$ функция $u(s, Q + \xi s)$ абсолютно непрерывна на замкнутом множестве $\pi_{s,Q}$ и удовлетворяет условиям:

$$u(s, Q + \xi_{i+1}s) = u(s, Q + \eta_i s), \quad i = 1, 2, \dots, N-1;$$

б) функция u такова, что

$$\begin{aligned} [u]^2 = [u, u] &= \int_{\Omega \times \pi_s} [u^2(s, Q + \xi_1 s) + u^2(s, Q + \eta_N s)] ds dQ + \\ &+ \int_{\Omega \times G} \left[\frac{1}{a(P)} (s, \text{grad } u)^2 + a(P) u^2 \right] ds dP < \infty. \end{aligned}$$

Из условия б), в частности, следует неравенство при всех $u \in D_1$, $\|u\| \leq [u]$. Кроме того, из условия б) и из (7.8) при всех $u \in D_0$ следует соотношение

$$\|u\|^2 \leq [u, u] = (L_0 u, u) < \infty. \quad (8.7)$$

Таким образом, $D_0 \subset D_1 \subset \mathfrak{H}$. Функции из D_1 отличаются от функций из D_0 , в частности, тем, что они, вообще говоря, не удовлетворяют граничным условиям 2° а) и второму из условий 2° б): при почти всех $(s, Q) \in \Omega \times \pi_s$

$$\begin{aligned} u(s, Q + \xi_1 s) &= \frac{1}{a(Q + \xi_1 s)} \frac{\partial}{\partial \xi} u(s, Q + \xi s)|_{\xi=\xi_1}, \\ u(s, Q + \eta_N s) &= - \frac{1}{a(Q + \eta_N s)} \frac{\partial}{\partial \xi} u(s, Q + \xi s)|_{\xi=\eta_N}, \\ \frac{1}{a(Q + \xi_{i+1}s)} \frac{\partial}{\partial \xi} u(s, Q + \xi s)|_{\xi=\xi_{i+1}} &= \\ = \frac{1}{a(Q + \eta_i s)} \frac{\partial}{\partial \xi} u(s, Q + \xi s)|_{\xi=\eta_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Эти граничные условия не входят в определение D_1 и, как будет видно ниже, оказываются естественными граничными условиями для задачи (7.1).

Квадратичная форма $[u, u]$ порождает билинейную форму:

$$[u, v] = \int_{\Omega \times \pi_s} [u(s, Q + \xi_1 s) v(s, Q + \xi_1 s) + \\ + u(s, Q + \eta_N s) v(s, Q + \eta_N s)] ds dQ + \left(\frac{(s, \text{grad } u)}{a}, \frac{(s, \text{grad } v)}{a} \right) + (u, v).$$

На основании обобщенного неравенства Буняковского — Шварца:

$$[u, v]^2 \leq [u, u][v, v] = [u]^2[v]^2,$$

билинейная форма $[u, v]$ существует для тех u и v , для которых существуют квадратичные формы $[u, u]$ и $[v, v]$.

Пусть $u \in D_0$, $v \in D_1$. Тогда имеет место формула:

$$[u, v] = (L_0 u, v). \quad (8.8)$$

Формула (8.8) доказывается так же, как и формула (7.7). При этом используются свойства 1°—3° для функции u и свойства а) и б) для функции v .

ТЕОРЕМА 8.3.

$$\lambda_k = \sup_{F_i \in \mathfrak{F}} \inf_{\substack{u \in D_1 \\ (Su, SF_i)_{H=0} \\ i=1,2,\dots,k-1}} \frac{[u]^2}{\|Su\|_H^2},$$

причем \sup достигается, когда $SF_i = Su_i$, $i = 1, 2, \dots, k-1$.

Доказательство. Воспользуемся построением, принадлежащим К. Фридрихсу [см. (8), стр. 15]. В силу (8.7), на линеале D_0 , плотном в полном гильбертовом пространстве \mathfrak{H} , оператор L_0 — положительно определенный. На множестве D_0 определим новое скалярное произведение $[u, v]$, полагая

$$[u, v] = (L_0 u, v), \quad u, v \in D_0. \quad (8.9)$$

Легко проверить, что в силу такого определения множество D_0 превращается в новое гильбертово пространство, которое мы обозначим через D_2 . Норму в D_2 будем обозначать через $[u]$, так что

$$[u]^2 = [u, u] = (L_0 u, u), \quad u \in D_0.$$

В силу (8.7), имеем:

$$\|u\| \leq [u], \quad u \in D_0. \quad (8.10)$$

Пространство D_2 может оказаться неполным; в этом случае мы обычным способом пополним его. По теореме К. Фридрихса, $D_2 \subset \mathfrak{H}$. Тогда легко показать [см. (8), стр. 23], что равенство (8.9) справедливо также и при $u \in D_0$, $v \in D_2$, а неравенство (8.10) справедливо при $v \in D_2$:

$$[u, v] = (L_0 u, v), \\ \|v\| \leq [v], \quad u \in D_0, \quad v \in D_2. \quad (8.11)$$

Итак, по построению, справедливы включения:

$$D_0 \subset D_2 \subset \mathfrak{H}, \quad D_0 \subset D_1 \subset \mathfrak{H}, \quad (8.12)$$

причем D_0 плотно в D_2 в смысле метрики $[]$ и D_0 плотно в \mathfrak{H} в смысле метрики $()$. Докажем, что $D_1 \subset D_2$.

Пусть, напротив, найдется такой элемент u_0 из D_1 , не принадлежащий D_2 . Рассмотрим вариационную задачу:

$$\inf_{u \in D_2} [u - u_0]^2 = d(u_0) \geq 0.$$

По определению \inf , существует последовательность функций $\{u_n\} \subset D_2$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [u_n - u_0]^2 = d(u_0).$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Тогда найдется такое $N > 0$, что

$$[u_n - u_0]^2 < d(u_0) + \varepsilon,$$

если $n > N$. Пусть n и $m > N$. Очевидно, что

$$\frac{1}{2}(u_n + u_m) \in D_2.$$

Поэтому

$$\left[\frac{1}{2}(u_n + u_m) - u_0 \right]^2 \geq d(u_0).$$

Отсюда и из очевидного равенства

$$\left[\frac{1}{2}(u_n + u_m) - u_0 \right]^2 + \left[\frac{1}{2}(u_n - u_m) \right]^2 = \frac{1}{2}[u_n - u_0]^2 + \frac{1}{2}[u_m - u_0]^2$$

следует неравенство:

$$d(u_0) + \frac{1}{4}[u_n - u_m]^2 < d(u_0) + \varepsilon.$$

Следовательно, $[u_n - u_m] \rightarrow 0$ при $n, m \rightarrow \infty$. Из полноты пространства D_2 следует, что последовательность $\{u_n\}$ сходится к некоторой функции $\bar{u} \in D_2$, для которой

$$[\bar{u} - u_0]^2 = d(u_0).$$

Так как \bar{u} реализует в D_2 минимум функционала $[u - u_0]^2$, то

$$[\eta, \bar{u} - u_0] = 0, \quad \eta \in D_0 \subset D_2. \quad (8.13)$$

Принимая во внимание формулы (8.8) и (8.11), из (8.13) при всех $\eta \in D_0$ получим:

$$(L_0 \eta, \bar{u} - u_0) = 0.$$

Но $L_0 \eta$ пробегает все пространство \mathfrak{H} , когда η пробегает все пространство D_0 . Поэтому $\bar{u} = u_0$, что невозможно. Следовательно, $D_1 \subset D_2$. Отсюда и из (8.12) имеем:

$$D_0 \subset D_1 \subset D_2 \subset \mathfrak{H}.$$

Следовательно, D_0 плотно в D_1 по метрике $[\]$ и по метрике $(\)$. Оператор S ограничен в \mathfrak{H} . Отсюда и из теоремы 8.1 непосредственно следует теорема 8.3.

Следствие 1.

$$\lambda_k = \inf_{\substack{u \in D_1 \\ (Su, Su_i)_{\mathfrak{H}} = 0, \\ i=1,2,\dots,l_k}} \frac{[u]^2}{\|Su\|_{\mathfrak{H}}^2}, \quad (8.14)$$

причем наименьшее значение λ_k достигается на функциях

$$u_{l_k+i} = \frac{1}{2}(\varphi_{l_k+i} + U\varphi_{l_k+i}), \quad i = 1, 2, \dots, \rho_k,$$

образующих собственное подпространство оператора L_0 , соответствующее собственному значению λ_k , и только на этих функциях.

На основании (7.15), (7.16) и доказанной теоремы достаточно установить, что функция u_0 , реализующая минимум в (8.14), удовлетворяет уравнению

$$L_0 u_0 = \lambda_k b S u_0, \quad u_0 \in D_0. \quad (8.15)$$

Если $u_0 \in D_1$ и реализует минимум функционала в (8.14), то для любой функции η_0 из $D_0 \subset D_1$, удовлетворяющей условиям

$$(S\eta_0, Su_i)_H = 0, \quad i = 1, 2, \dots, l_k, \quad (8.16)$$

имеет место равенство:

$$[u_0, \eta_0] - \lambda_k (Su_0, S\eta_0)_H = 0.$$

Принимая во внимание формулы (2.3) и (8.9), получим отсюда:

$$(L_0 \eta_0 - \lambda_k b S \eta_0, u_0) = 0 \quad (8.17)$$

для любой функции $\eta_0 \in D_0$, удовлетворяющей условиям (8.16). Докажем, что равенство (8.17) справедливо при всех $\eta \in D_0$. Действительно, полагая

$$\eta_0 = \eta - \sum_{i=1}^{l_k} (S\eta, Su_i)_H u_i,$$

получим, что $\eta_0 \in D_0$ и удовлетворяет условиям (8.16). Тогда из (8.17) имеем:

$$\begin{aligned} (L_0 \eta - \lambda_k b S \eta, u_0) &= (L_0 \eta_0 - \lambda_k b S \eta_0, u_0) + \sum_{i=1}^{l_k} (S\eta, Su_i)_H (L_0 u_i - \lambda_k b S u_i, u_0) = \\ &= \sum_{i=1}^{l_k} (S\eta, Su_i)_H (\lambda_i - \lambda_k) (b S u_i, u_0) = \\ &= \sum_{i=1}^{l_k} (S\eta, Su_i)_H (\lambda_i - \lambda_k) (Su_i, Su_0)_H = 0, \quad \eta \in D_0. \end{aligned}$$

Это значит, что

$$u \in D_{(L_0 - \lambda_k b S)^*} = D_{L_0 - \lambda_k b S} = D_{L_0} = D_0$$

и удовлетворяет уравнению (8.15).

Таким образом, хотя множество функций сравнения в (8.14) не удовлетворяет всем условиям дифференцируемости и граничным условиям, необходимым для принадлежности к D_0 , однако функция, реализующая минимум функционала в (8.14), принадлежит D_0 . Следовательно, упомянутые выше граничные условия оказываются естественными.

Следствие 2. Из теоремы 8.3 следуют оценки для собственных значений возмущенной задачи, когда a и b изменяются согласно (4.23):

$$(1 - \varepsilon_2)(1 - \varepsilon_1)^2 \bar{\lambda}_k \leq \lambda_k \leq (1 + \varepsilon_2) \frac{1 + \varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1} \bar{\lambda}_k. \quad (8.18)$$

Действительно, на основании (4.24) имеем:

$$\lambda_k = \sup_{F_i \in \mathcal{S}} \inf_{\substack{u \in D_1 \\ (Su, SF_i)_H = 0, \\ i=1, 2, \dots, k-1}} \frac{[u, u]}{\|Su\|_H^2} \leq$$

$$\begin{aligned}
& \leq \sup_{F_i \in \mathfrak{G}} \inf_{\substack{u \in D_1 \\ (Su, SF_i)_{H=0} \\ i=1,2,\dots,k-1}} \left(\frac{\int_{\Omega \times \pi_s} [u^2(s, Q + \xi_1 s) + u^2(s, Q + \eta_N s)] ds dQ}{\frac{1}{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)} \int_G \bar{a}(P) \bar{b}(P) \left[\int_{\Omega} u(s, P) ds \right]^2 dP} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{(1+\varepsilon_1) \int_{\Omega \times G} \frac{1}{\bar{a}(P)} (s, \text{grad } u)^2 ds dP + \frac{1}{1-\varepsilon_1} \int_{\Omega \times G} \bar{a}(P) u^2 ds dP}{\frac{1}{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)} \int_G \bar{a}(P) \bar{b}(P) \left[\int_{\Omega} u(s, P) ds \right]^2 dP} \right) \leq \\
& \leq (1+\varepsilon_2) \frac{1+\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1} \sup_{F_i \in \mathfrak{G}} \inf_{\substack{u \in D_1 \\ (Su, SF_i)_{H=0} \\ i=1,2,\dots,k-1}} \frac{\overline{[u, u]}}{\|Su\|_{\bar{H}}^2} = \\
& = (1+\varepsilon_2) \frac{1+\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1} \frac{\bar{a}\bar{b}}{\bar{a}\bar{b}} \sup_{G_i \in \mathfrak{G}} \inf_{\substack{u \in \bar{D}_1 \\ (Su, SG_i)_{\bar{H}=0} \\ i=1,2,\dots,k-1}} \frac{\overline{[u, u]}}{\|Su\|_{\bar{H}}^2}.
\end{aligned}$$

Через $\overline{[u, u]}$ и \bar{D}_1 мы обозначили форму $[u, u]$ и множество D_1 , где a и b заменены на \bar{a} и \bar{b} . В силу условий (4.24), вместе с функциями $\frac{\bar{a}\bar{b}}{ab} G_i$ функции G_i также пробегает все пространство \mathfrak{G} . В силу (4.25), \mathfrak{G} состоит из того же набора элементов, что и $\bar{\mathfrak{G}}$. Поэтому имеем:

$$\lambda_k \leq (1+\varepsilon_2) \frac{1+\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1} \sup_{G_i \in \mathfrak{G}} \inf_{\substack{u \in \bar{D}_1 \\ (Su, SG_i)_{\bar{H}=0} \\ i=1,2,\dots,k-1}} \frac{\overline{[u, u]}}{\|Su\|_{\bar{H}}^2} = (1+\varepsilon_2) \frac{1+\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1} \bar{\lambda}_k,$$

что и устанавливает справедливость правой части неравенства (8.18). Аналогично доказывается и левая часть неравенства (8.18).

Оценки (8.18) характеризуют поведение λ_k в зависимости от изменения коэффициентов a и b . В работе К. Фукса (6) даны другие соотношения, характеризующие поведение простого собственного значения λ_1 в зависимости от a и b .

Следствие 3. *Имеет место монотонная зависимость λ_k от коэффициента b : если $b(P) \leq \bar{b}(P)$, то $\bar{\lambda}_k \geq \lambda_k$, и наоборот.*

Следствие 4. *Имеет место монотонная зависимость λ_k от коэффициента a , если последний изменяется так, что $\bar{a}(P) = (1+\varepsilon_1)a(P)$ почти всюду на G . Тогда $\bar{\lambda}_k \geq \lambda_k$ при $\varepsilon_1 \geq 0$, $\lambda_k \leq \bar{\lambda}_k$ при $\varepsilon_1 \leq 0$.*

ТЕОРЕМА 8.4. *Решение и задачи (7.1) при $\lambda < \lambda_1$ сообщает функционалу*

$$[u, u] - \lambda \|Su\|_{\bar{H}}^2 - 2(u, F) \quad (8.19)$$

наименьшее значение в D_1 ; обратно, функция u из D_1 , реализующая минимум функционала (8.19), — единственная и является решением задачи (7.1).

Доказательство. В силу теоремы 8.1, при $\lambda < \lambda_1$ самосопряженный оператор $L_0 - \lambda bS$ положительно определенный. Кроме того, D_0 плотно в D_1 в метрике $[\]$ и в метрике $(\)$. Поэтому [см. (8), стр. 12], если u — решение задачи (7.1), то оно сообщает функционалу (8.19) наименьшее значение в D_1 .

Обратно, пусть $u_0 \in D_1$ и реализует минимум функционала (8.19) при $\lambda < \lambda_1$. Тогда при всех $\eta \in D_0$ будем иметь:

$$[u_0, \eta] - \lambda (Su_0, S\eta)_H - (\eta, F) = 0.$$

Отсюда, принимая во внимание формулы (2.3) и (8.8), при всех $\eta \in D_0$ получим:

$$(L_0 \eta - \lambda b S\eta, u_0) = (\eta, F),$$

откуда следует, что

$$u_0 \in D_{(L_0 - \lambda b S)^*} = D_0 \quad \text{и} \quad L_0 u_0 - \lambda b S u_0 = F.$$

В силу единственности решения задачи (7.1), эта функция u_0 — единственная. Теорема доказана.

Выражаю благодарность Н. Н. Боголюбсу за повседневное внимание и руководство при выполнении данной работы.

Поступило
25. IV. 1956

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Чандрасекар С., Перенос лучистой энергии, М., ИЛ, 1953.
- ² Фейнберг С. М., Некоторые вопросы теории уран-водной решетки, Сессия АН СССР по мирному использованию атомной энергии 1—5 июля 1955 г., заседания Отделения физико-математич. наук (1955), 185—216.
- ³ Сакс С., Теория интеграла, М., ИЛ, 1949.
- ⁴ Рисс Ф. и Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, М., ИЛ, 1954.
- ⁵ Peierls R., Critical conditions in the neutron multiplication, Proc. Cambridge Philos. Soc., 35 (1939), 610—615.
- ⁶ Fuchs K., Perturbation theory in neutron multiplication problems, Proc. Phys. Soc. A, 62 (1949), 791—799.
- ⁷ Петровский И. Г., Интегральные уравнения, Гостехиздат, М., 1948.
- ⁸ Михлин С. Г., Проблема минимума квадратичного функционала, Гостехиздат, М., 1952.
- ⁹ Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд-во ЛГУ, Л., 1950.
- ¹⁰ Крейн М. Г. и Рутман М. А., Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха, Успехи матем. наук, т. III, в. 1 (23) (1948), 3—95.
- ¹¹ Соломяк М. З., О собственных числах и собственных векторах возмущенного оператора, Доклады Ака. наук СССР, 90 (1954), 29—32.
- ¹² Канторович Л. В., Функциональный анализ и прикладная математика, Успехи матем. наук, т. III, № 6 (1948), 89—185.
- ¹³ Kellogg O. D., On the existence and closure of sets of characteristic functions, ath. Ann., 86 (1922), 14—17.
- ¹⁴ Люстерник Л. А., Замечания к численному решению краевых задач уравнений Лапласа и вычислению собственных значений методом сеток, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, XX (1947), 49—64.

Л. М. ГАЛОНЕН

О ФУНКЦИОНАЛЬНО-ИНВАРИАНТНЫХ РЕШЕНИЯХ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В n -МЕРНОЙ ОБЛАСТИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым)

В работе находятся функционально-инвариантные решения волнового уравнения с любым числом независимых переменных. Полученные результаты обобщают результаты Н. П. Еругина, относящиеся к случаю волнового уравнения с тремя и четырьмя переменными.

Известно, что функционально-инвариантным решением дифференциального уравнения называется такое его решение, произвольная функция от которого также является интегралом уравнения.

Вопросами функционально-инвариантных решений занимались В. И. Смирнов и С. Л. Соболев ⁽¹⁾, предложившие в 1932 г. новый метод решения задачи Коши для волнового уравнения в трехмерной области при помощи функционально-инвариантных решений и применившие результаты к решению ряда вопросов теории колебаний и других задач математической физики.

В 1948 г. Н. П. Еругин ⁽²⁾ дал другой метод конструктивного построения решений и нашел все классы вещественных и комплексных функционально-инвариантных решений волнового уравнения в двух- и трехмерных областях. М. М. Смирнов ⁽³⁾ применил метод Еругина к волновому уравнению в четырехмерной области, увеличив таким образом число независимых переменных на единицу. Но при этом рассуждения значительно усложнились и дальнейшее обобщение стало весьма затруднительным в связи с громоздкостью выкладок.

Можно, однако, изменить метод отыскания функционально-инвариантных решений, значительно упростив его и сделав возможным его применение к уравнению с любым числом независимых переменных. Такое упрощение для трехмерной области рассмотрено в работе автора ⁽⁴⁾.

Рассмотрим волновое уравнение в n -мерной области:

$$\sum_1^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (1)$$

Функционально-инвариантное решение этого уравнения определится, очевидно, системой:

$$\sum_1^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2, \quad \sum_1^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (2)$$

Второе из этих уравнений является уравнением характеристик. Полный интеграл его можно взять в виде:

$$u = \sum_1^n a_i x_i + \sqrt{\sum_1^n a_i^2} t + a_{n+1}, \quad (3)$$

где $a_i = \text{const.}$ Чтобы получить все решения уравнения, достаточно установить 1, 2, ..., n зависимостей между коэффициентами полного интеграла (3).

Будем варьировать произвольные постоянные a_i , считая их функциями x_i и выбирая так, чтобы производные первого порядка $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ не изменили своего вида при переменных a_i , т. е. чтобы решение (3) по-прежнему удовлетворяло уравнению характеристик.

Из всех получаемых при этом решений необходимо выбирать те, которые удовлетворяют и первому уравнению системы (2), а это возможно, как легко видеть, если коэффициенты a_i будут удовлетворять условию:

$$\sum_1^n \frac{\partial a_i}{\partial x_i} = \frac{\sum_1^n a_i \frac{\partial a_i}{\partial t}}{\sqrt{\sum_1^n a_i^2}}. \quad (4)$$

Проведем рассуждения для случая различного числа зависимостей между параметрами a_i полного интеграла (3).

Случай n зависимостей между параметрами a_i полного интеграла. Рассмотрим полный интеграл (3) уравнения характеристик и предположим, что между коэффициентами a_i существует n зависимостей:

$$\varphi_i(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n+1}) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n,$$

которые можно записать в виде:

$$a_k = a_k(a_1), \quad k = 2, 3, \dots, n+1.$$

Функционально-инвариантное решение определится в этом случае системой:

$$u = \sum_1^n a_i x_i + \sqrt{\sum_1^n a_i^2} t + a_{n+1}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial a_1} \equiv x_1 + \sum_2^n a'_i x_i + \frac{a_1 + \sum_2^n a_i a'_i}{\sqrt{\sum_1^n a_i^2}} t + a'_{n+1} = 0. \quad (5)$$

Исключение x_1 из уравнений (3) и (5) дает:

$$u = \sum_2^n (a_i - a_1 a'_i) \left(x_i + \frac{a_i t}{\sqrt{\sum_1^n a_i^2}} \right) + a_{n+1} - a_1 a'_{n+1}. \quad (6)$$

Дифференцируя это выражение по x_i , принимая во внимание условия (5), накладываемые на коэффициенты a_i , и подставляя в уравнение характеристик, после некоторых элементарных преобразований найдем, что коэффициенты a_i должны быть подчинены условию:

$$a_1^2 \left[\sum_{i=2}^n (a_i - a_1 a'_i)^2 + \sum_{i, k=2}^n (a_k a'_i - a_i a'_k)^2 \right] = 0. \quad (7)$$

Уравнение (7) распадается на два:

$$a_1 = 0$$

и

$$\sum_2^n (a_i - a_1 a'_i)^2 + \sum_{i, k=2}^n (a_k a'_i - a_i a'_k)^2 = 0. \quad (8)$$

Если $a_1 \neq 0$, то уравнение (8) можно переписать в виде:

$$\sum_2^n u_i'^2 + \sum_{i, k=2}^n (u_k u'_i - u_i u'_k)^2 = 0, \quad (9)$$

где

$$u_i = \frac{a_i}{a_1}, \quad u'_i = \frac{du_i}{da_1}.$$

Предположим, что $u_i = u_i(u_2)$, где $i = 3, 4, \dots, n$. Тогда уравнение (9) примет вид:

$$u_2'^2 \left[1 + \sum_3^n \left(\frac{du_i}{du_2} \right)^2 \right] + \sum_3^n \left(u_i - u_2 \frac{du_i}{du_2} \right)^2 + \sum_3^n \left(u_k \frac{du_i}{du_2} - u_i \frac{du_k}{du_2} \right)^2 = 0,$$

откуда следуют две возможности: или $u_2' = 0$, или

$$1 + \sum_3^n \left(\frac{du_i}{du_2} \right)^2 + \sum_3^n \left(u_i - u_2 \frac{du_i}{du_2} \right)^2 + \sum_3^n \left(u_k \frac{du_i}{du_2} - u_i \frac{du_k}{du_2} \right)^2 = 0. \quad (10)$$

Случай $u_2' = 0$ будет рассмотрен позже. Во втором случае уравнение (10) можно рассматривать как обобщенное уравнение Монжа с $n-3$ неизвестными функциями u_i , зависящими от u_2 .

Известно (5), что в случае двух независимых переменных уравнение в частных производных

$$F(x, y, u, p, q) = 0 \quad (11)$$

может быть приведено к уравнению Монжа с двумя неизвестными функциями:

$$M(x, y, u, y', u') = 0 \quad (12)$$

путем исключения p и q из уравнений

$$F = 0, \quad y' = \frac{\frac{\partial F}{\partial q}}{\frac{\partial F}{\partial p}}, \quad u' = \frac{p \frac{\partial F}{\partial p} + q \frac{\partial F}{\partial q}}{\frac{\partial F}{\partial p}},$$

и, наоборот, уравнение (12) приводится к уравнению (11) путем исключе-

ния y' и u' из уравнений

$$q = -\frac{\frac{\partial M}{\partial y'}}{\frac{\partial M}{\partial u'}}, \quad p = \frac{y' \frac{\partial M}{\partial y'} + u' \frac{\partial M}{\partial u'}}{\frac{\partial M}{\partial u'}}.$$

Это положение доказывается у Гильберта и Куранта ⁽⁵⁾ геометрическим путем. Доказательство можно провести и аналитическим путем, что значительно облегчит обобщение метода Монжа на случай любого числа неизвестных функций и на уравнение в частных производных с несколькими неизвестными функциями. Действительно, уравнение (11) эквивалентно системе:

$$\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial F}{\partial q}} = \frac{du}{p \frac{\partial F}{\partial p} + q \frac{\partial F}{\partial q}} = \frac{-dp}{\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u} p} = -\frac{dq}{\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u} q}.$$

Полагая $y = y(x)$ и замечая, что при этом

$$u' = p + qy',$$

найдем:

$$y' = \frac{\frac{\partial F}{\partial q}}{\frac{\partial F}{\partial p}}, \quad u' = \frac{p \frac{\partial F}{\partial p} + q \frac{\partial F}{\partial q}}{\frac{\partial F}{\partial p}}.$$

Исключение p и q из этих уравнений и уравнения (11) приводит к уравнению (12).

Обратное положение можно доказать введением тангенциальных координат. Рассматривая уравнение (12) и переходя к тангенциальным координатам

$$p = X, \quad q = Y, \quad px + qy - u = U, \quad u' = p + qy' = X + Yy',$$

получим уравнение в частных производных с параметром y' :

$$M(P, Q, PX + QY - U, y', X + Yy') = 0,$$

которое, очевидно, эквивалентно системе:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{\frac{\partial M}{\partial P} + \frac{\partial M}{\partial u} X} &= \frac{dY}{\frac{\partial M}{\partial Q} + \frac{\partial M}{\partial u} Y} = \frac{dU}{P \left(\frac{\partial M}{\partial P} + \frac{\partial M}{\partial u} X \right) + Q \left(\frac{\partial M}{\partial Q} + \frac{\partial M}{\partial u} Y \right)} = \\ &= -\frac{dP}{\frac{\partial M}{\partial u'}} = -\frac{dQ}{y' \frac{\partial M}{\partial u'}}. \end{aligned}$$

Возвращаясь к старым координатам, найдем:

$$p' = -\frac{\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial u} p}{\frac{\partial M}{\partial u'}}, \quad q' = -\frac{\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial M}{\partial u} q}{\frac{\partial M}{\partial u'}}, \quad (13)$$

где p' и q' — производные p и q по x .

С другой стороны, дифференцируя уравнение (12) по x и замечая, что

$$u' = p + qy', \quad u'' = p' + q'y' + qy'',$$

получим:

$$\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} y' + \frac{\partial M}{\partial u} u' + \frac{\partial M}{\partial u'} (p' + q' y' + qy'') + \frac{\partial M}{\partial y'} y'' = 0.$$

Исключение p' и q' из этого уравнения и уравнений (13) дает при $y'' \neq 0$:

$$\frac{\partial M}{\partial y'} + \frac{\partial M}{\partial u'} q = 0,$$

т. е.

$$q = -\frac{\frac{\partial M}{\partial y'}}{\frac{\partial M}{\partial u'}}, \quad p = u' - qy' = \frac{y' \frac{\partial M}{\partial y'} + u' \frac{\partial M}{\partial u'}}{\frac{\partial M}{\partial u'}}.$$

Дальнейшее решение уравнения Монжа совпадает с решением, приведенным у Гильберта и Куранта, и сводится к исключению параметра a из полного интеграла уравнения (11) и его производных первого и второго порядка:

$$v(x, y, u, a, b) = 0, \quad \frac{dv}{da} = 0, \quad \frac{d^2 v}{da^2} = 0, \quad b = \varphi(a).$$

В таком виде рассуждения легко обобщаются на уравнения с любым числом неизвестных и на случай уравнения в частных производных с несколькими неизвестными функциями. В первом случае для приведения уравнения

$$M(x_1, x_2, \dots, x_n, u, x'_2, x'_3, \dots, x'_n, u') = 0, \quad x_i = x_i(x_1), \quad (14)$$

к уравнению

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0, \quad p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad (15)$$

достаточно исключить $x'_2, x'_3, \dots, x'_n, u'$ из уравнений

$$M = 0, \quad p_i = \frac{\frac{\partial M}{\partial x_i}}{\frac{\partial M}{\partial u'}}, \quad p_1 = \frac{\sum_1^n \frac{\partial M}{\partial x_i} x'_i}{\frac{\partial M}{\partial u'}}.$$

Если обобщенное уравнение Монжа зависит от нескольких неизвестных функций нескольких аргументов каждая,

$$M\left(x_1, x_2, \dots, x_k, u_1, u_2, \dots, u_{n-k}, \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u_1}{\partial x_k}, \dots, \frac{\partial u_{n-k}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u_{n-k}}{\partial x_k}\right) = 0,$$

то аналогичным путем можно показать, что для приведения такого уравнения к уравнению в частных производных с одной неизвестной функцией достаточно исключить $k(n-k+1)$ величин $\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ из $k(n-k+1)+1$

уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_i} &= p_i + \sum_{j=1}^{n-k} p_{k+j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \\ \frac{\partial M}{\partial \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)} + \frac{\partial M}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)} p_{k+i} &= 0, \\ M &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

где $i = 1, 2, \dots, k$, $j = 1, 2, \dots, n-k$, $u = u_{n-k}$, а через p_i обозначены производные u по x_i в предположении, что $u = u(x_1, x_2, \dots, x_k, u_1, \dots, u_{n-k})$, т. е.

$$p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad p_{j+i} = \frac{\partial u}{\partial u_j}.$$

Применяя эти рассуждения к уравнению (10), найдем, что оно может быть приведено к уравнению в частных производных:

$$1 + \sum_2^{n-1} p_i^2 + \left(\sum_3^{n-1} p_i u_i - u \right)^2 = 0, \quad (17)$$

которое является обобщенным уравнением Клеро. Здесь

$$p_i = \frac{du_n}{du_i}, \quad u_n = u_n(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}).$$

Полный интеграл уравнения (17) будет:

$$u_n = \sum_3^{n-1} A_i u_i + i \sqrt{1 + \sum_3^{n-1} A_i^2},$$

где $A_i = \text{const}$. Варьируя произвольные постоянные и положив $A_i = A_i(A_3)$ ($i = 4, 5, \dots, n-1$), мы получим решение уравнения Монжа (10), исключая A_3 из уравнений:

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_3^{n-1} A_i u_i + i \sqrt{1 + \sum_3^{n-1} A_i^2}, \\ \frac{du_n}{dA_3} &= 0, \quad \frac{d^2 u_n}{dA_3^2} = 0, \dots, \quad \frac{d^{n-2} u_n}{dA_3^{n-2}} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Отсюда найдем:

$$u_i = \varphi_i(u_2), \quad i = 3, 4, \dots, n,$$

или, возвращаясь к старым переменным:

$$a_i = a_1 \varphi_i \left(\frac{a_2}{a_1} \right).$$

Подстановка в уравнения (3) и (5) дает искомого функционально-инвариантное решение в параметрической форме:

$$u = a_1 \left[x_1 + \frac{a_2}{a_1} x_2 + \sum_3^n \varphi_i \left(\frac{a_2}{a_1} \right) x_i + \sqrt{1 + \sum_3^n \varphi_i^2 t} \right] + a_{n+1}(a_1),$$

$$x_1 + \frac{da_2}{da_1} x_2 + \sum_3^n \frac{d}{da_1} \left[a_1 \varphi_i \left(\frac{a_2}{a_1} \right) \right] x_i + \\ + \frac{1 + \frac{a_2}{a_1} \frac{da_2}{da_1} + \sum_3^n \varphi_i \left(\frac{a_2}{a_1} \right) \frac{d(a_1 \varphi_i)}{da_1}}{\sqrt{1 + \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2 + \sum_3^n \varphi_i^2}} t + a'_{n+1} = 0$$

с параметром a_1 .

В частности, при $n = 3$ условие (8), накладываемое на коэффициенты полного интеграла (3) уравнения характеристик, имеет вид:

$$(a_2 - a_1 a'_2)^2 + (a_3 - a_1 a'_3)^2 + (a_2 a'_3 - a_3 a'_2)^2 = 0.$$

При $u'_1 \neq 0$ уравнение (10) запишется в виде:

$$1 + \left(\frac{du_2}{du_1} \right)^2 + \left(u_1 \frac{du_2}{du_1} - u_2 \right)^2 = 0.$$

Интегрируя его, находим:

$$u_2 = Cu_1 \pm a_1 i \sqrt{1 + C^2}, \quad C = \text{const.}$$

Подстановка в уравнения (3) и (5) и исключение a_1 дает:

$$u = a_1 (x_1 + i \sqrt{1 + C^2} x_2 + C i x_4) + a_2 (x_2 + C x_3 + \sqrt{1 + C^2} x_4), \\ x_1 + i \sqrt{1 + C^2} x_2 + C i x_4 + a'_2 (x_2 + C x_3 + \sqrt{1 + C^2} x_4) = 0,$$

откуда следует:

$$u = \varphi (x_1 + i \sqrt{1 + C^2} x_2 + C i x_4, x_2 + C x_3 + \sqrt{1 + C^2} x_4). \quad (19)$$

Мы получили решение (125) работы Еругина ⁽²⁾ (стр. 128).

Рассуждения проведены в предположении, что коэффициент a_1 в уравнении (3) не равен нулю. В случае же, если $a_1 = 0$, то зависимости между a_i могут быть записаны в виде:

$$a_1 = 0, \quad \varphi_k(a_2, a_3, \dots, a_{n+1}) = 0, \quad k = 2, 3, \dots, n,$$

или

$$a_i = a_i(a_2), \quad i = 3, 4, \dots, n+1.$$

Система, определяющая функционально-инвариантное решение, будет задана уравнениями:

$$u = \sum_2^n a_i x_i + \sqrt{\sum_2^n a_i^2} t + a_{n+1}, \\ \frac{\partial u}{\partial a_2} \equiv x_2 + \frac{a_2 + \sum_3^n a_i \frac{da_i}{da_2}}{\sqrt{\sum_2^n a_i^2}} t + \frac{da_{n+1}}{da_2} = 0. \quad (20)$$

Рассуждения, аналогичные предыдущим, приведут, очевидно, к решению, не зависящему от x_1 .

При $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, ..., $a_{k-1} = 0$, $a_k \neq 0$, решение определится системой:

$$\left. \begin{aligned} u &= a_k x_k + a_{k+1} x_{k+1} + \sum_{i=k+2}^n \varphi_i \left(\frac{a_{k+1}}{a_k} \right) x_i + \\ &+ a_k \sqrt{1 + \sum_{k+2}^n \varphi_i^2 t} + a_{n+1}(a_k) = 0, \\ \frac{du}{da_k} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Если $k = n$, т. е. $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 0$, $a_n \neq 0$, то получим:

$$\begin{aligned} u &= a_n(x_n + t) + a_{n+1}(a_n), \\ \frac{\partial u}{\partial a_n} &\equiv x_n + t + a'_{n+1} = 0, \end{aligned}$$

откуда $u = \varphi(x_n + t)$, где φ — произвольная функция.

Вернемся к первому случаю выполнения условия (9), когда $u'_2 = 0$ или $u_2 = C$ ($C = \text{const}$). Уравнение (9) в этом случае примет вид:

$$(1 + C^2) \sum_3^n u_i'^2 + \sum_3^n (u_i u'_k - u_k u'_i)^2 = 0, \quad (22)$$

где $u_i = \frac{a_i}{a_1}$. Полагая $u_i = u_i(u_3)$, $i = 4, 5, \dots, n$, получим, при $u'_3 \neq 0$, уравнение:

$$(1 + C^2) \left(1 + \sum_4^n u_i'^2 \right) + \sum_4^n (u_i - u_3 u'_i)^2 + \sum_4^n (u_i u'_k - u_k u'_i)^2 = 0. \quad (23)$$

Применяя к нему указанный выше обобщенный метод Монжа, получим уравнение в частных производных:

$$(1 + C^2) \left(1 + \sum_3^{n-1} p_i^2 \right) + \left(\sum_3^{n-1} p_i u_i - u_n \right)^2 = 0, \quad (24)$$

где $p_i = \frac{\partial u_n}{\partial u_i}$ или

$$u_n = \sum_3^{n-1} p_i u_i + i \sqrt{(1 + C^2) \left(1 + \sum_3^{n-1} p_i^2 \right)}. \quad (24')$$

Исключая A_3 из полного интеграла этого уравнения и его производных по A_3 , т. е. из системы

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_3^n A_i u_i + i \sqrt{(1 + C^2) \left(1 + \sum_3^n A_i^2 \right)}, \\ \frac{d^k u_n}{dA_3^k} &= 0, \quad k = 3, 4, \dots, n-1, \quad A_i = \text{const}, \end{aligned} \quad (25)$$

мы получим $n-3$ уравнения, которые могут служить для определения u_k в функциях от u_3 :

$$\dot{u}_k = \varphi_k(u_3), \quad \text{где } u_k = \frac{a_k}{a_1}.$$

Искомый класс функционально-инвариантных решений определится уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} u &= a_1 x_1 + C a_1 x_2 + a_3 x_3 + \sum_4^n a_1 \varphi_i \left(\frac{a_3}{a_1} \right) x_i + \\ &+ a_1 \sqrt{1 + C^2 + a_3^2 + \sum_4^n \varphi_i^2 t + a_{n+1}(a_1)}, \\ \frac{du}{da_1} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

где a_1 — параметр. В частности, при $n=4$ мы получим решение (38) работы М. М. Смирнова (3).

В случае $u'_2=0$, $u'_3=0$, ..., $u'_k=0$ вспомогательное уравнение (21) будет иметь вид:

$$\left(1 + \sum_{i=1}^k C_i^2\right) \left(1 + \sum_{k+1}^n u_i'^2\right) + \sum_{k+1}^n (u_i u_j' - u_j u_i')^2 = 0. \quad (27)$$

Его также можно привести к обобщенному уравнению Клеро вида:

$$u_n = \sum_k^{n-1} p_i u_i + \sqrt{\left(1 + \sum_1^n C_i^2\right) \left(1 + \sum_k^{n-1} p_i^2\right)},$$

полный интеграл которого

$$u_n = \sum_k^{n-1} A_i u_i + i \sqrt{\left(1 + \sum_1^k C_i^2\right) \left(1 + \sum_{k+1}^n A_i^2\right)}. \quad (28)$$

Присоединяя сюда уравнения

$$\frac{d^m u_n}{dA_k^m} = 0, \quad m = k+1, k+2, \dots, n-1,$$

и исключая A_k , найдем:

$$u_i = \varphi_i(u_k), \quad a_i = a_1 \varphi_i \left(\frac{a_k}{a_1} \right), \quad i = k+1, \dots, n.$$

Решение получится, если исключить a_1 из уравнений:

$$\left. \begin{aligned} u &= a_1 \left(x_1 + \sum_2^{k-1} C_i^2 x_i \right) + a_k x_k + \sum_{k+1}^n \varphi_i x_i + \\ &+ \sqrt{a_1^2 \left(1 + \sum_2^{k-1} C_i^2 \right) + a_k^2 + \sum_{k+1}^n \varphi_i^2 t + a_{n+1}}, \\ \frac{du}{da_1} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

При $k = n - 1$, т. е. если $u'_2 = 0$, $u'_3 = 0, \dots, u'_{n-1} = 0$, $u_n \neq 0$, мы получим или тривиальное решение

$$f(u) = \sum_1^{n-1} C_i x_i + \sqrt{\sum_1^{n-1} C_i^2 t}, \quad C_i = \text{const},$$

являющееся частным случаем формулы Смирнова—Соболева, или если

$$1 + \sum_2^{n-1} C_i^2 = 0, \quad (30)$$

то будем иметь:

$$u = \varphi \left(x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_{n-2} x_{n-2} + i \sqrt{1 + \sum_2^{n-2} C_i^2 t}, x_n \right). \quad (31)$$

Случай одной зависимости между коэффициентами a_i . Предположим, что между коэффициентами a_i полного интеграла уравнения характеристик

$$u = \sum_1^n a_i x_i + \sqrt{\sum_1^n a_i^2 t} + a_{n+1} \quad (3)$$

существует одна зависимость:

$$\varphi(a_1, a_2, \dots, a_{n+1}) = 0.$$

Допустим, что это уравнение разрешимо относительно одной из величин a_i . Пусть, например,

$$a_{n+1} = a_{n+1}(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Соответствующий класс функционально-инвариантных решений определится в этом случае системой:

$$\begin{aligned} u &= \sum_1^n a_i x_i + \sqrt{\sum_1^n a_i^2 t} + a_{n+1}, \\ \frac{\partial u}{\partial a_i} &\equiv x_i + \frac{a_i t}{\sqrt{\sum_1^n a_i^2}} + \frac{\partial a_{n+1}}{\partial a_i} = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Исключение x_i из этой системы дает:

$$u = a_{n+1} - \sum_1^n a_i \frac{\partial a_{n+1}}{\partial a_i}. \quad (33)$$

Кроме того, исключая x_1, x_2, \dots, x_n, t из выражения (3), его производных по a_i и уравнения (33), получим:

$$\sum_1^n a_i \frac{\partial u}{\partial a_i} = 0, \quad (34)$$

откуда

$$u = \varphi\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_1}, \dots, \frac{a_n}{a_1}\right). \quad (35)$$

Для определения a_{n+1} имеем, очевидно, уравнение:

$$\sum_1^n a_i \frac{\partial a_{n+1}}{\partial a_i} = a_{n+1} - \varphi\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_1}, \dots, \frac{a_n}{a_1}\right), \quad (36)$$

интегрируя которое, получим:

$$a_{n+1} = \varphi\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_1}, \dots, \frac{a_n}{a_1}\right) + a_1 \psi\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_1}, \dots, \frac{a_n}{a_1}\right), \quad (37)$$

где φ и ψ — произвольные функции.

Введем новые переменные, полагая

$$\frac{a_i}{a_1} = \xi_i, \quad i = 2, 3, \dots, n. \quad (38)$$

Уравнения (35), (32), в силу (37), (38), примут вид:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + \sum_2^n \xi_i x_i + \sqrt{1 + \sum_2^n \xi_i^2} t + \psi(\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n) &= 0, \\ x_i + \frac{\xi_i t}{\sqrt{1 + \sum_2^n \xi_i^2}} + \frac{\partial a_{n+1}}{\partial a_i} &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

$$u = \varphi(\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n). \quad (35')$$

Полученная система (39)—(35') определяет решения уравнения характеристик. Чтобы оно было функционально-инвариантным решением, необходимо, чтобы u удовлетворяло и волновому уравнению (1), а это возможно, если функция φ будет подчинена некоторому условию. Найдем его.

Дифференцируя уравнения (3) по x_i , в силу (32) получим:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\sum_1^n a_i \frac{\partial a_i}{\partial t}}{\sqrt{\sum_1^n a_i^2}}. \quad (40)$$

Вместо того, чтобы, следуя методу Еругина, дифференцировать эти выражения и подставлять в уравнение (1), что для n переменных приведет потом к решению весьма громоздких систем, определяющих производные $\frac{\partial a_i}{\partial x_j}$, исключим a_i из уравнений (40) и (38). Мы получим:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \xi_i \frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \sqrt{1 + \sum_2^n \xi_i^2} \frac{\partial u}{\partial x_1}. \quad (41)$$

Дифференцируя эти уравнения по x_i и подставляя в уравнение (1),

найдем:

$$\sum_2^n \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} = \frac{\sum_2^n \xi_i \frac{\partial \xi_i}{\partial t}}{\sqrt{1 + \sum_2^n \xi_i^2}}. \quad (42)$$

С другой стороны, дифференцируя уравнение (35') по x_i , подставляя в (41) и учитывая, что уравнения (41) должны удовлетворять условию

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i},$$

мы, исключая производные из полученных уравнений и уравнения (42), найдем, что функция φ должна удовлетворять уравнению:

$$\sum_2^n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i} \right)^2 + \left(\sum_2^n \xi_i \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i} \right)^2 = 0. \quad (43)$$

Для интегрирования этого уравнения применим преобразование Лагранжа. Введем новые переменные, полагая

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i} = X_i, \quad \sum_2^n \xi_i \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i} - \varphi = Z,$$

что дает:

$$\frac{\partial Z}{\partial X_i} = \xi_i, \quad Z = \sum_2^n \xi_i X_i - \varphi.$$

Уравнение (43) примет вид:

$$\sum_2^n X_i^2 + \left(\sum_2^n X_i \frac{\partial Z}{\partial X_i} \right)^2 = 0.$$

Общий интеграл его будет:

$$Z = i \sqrt{X_2^2 + X_3^2 + \dots + X_n^2} + \Phi \left(\frac{X_3}{X_2}, \frac{X_4}{X_2}, \dots, \frac{X_n}{X_2} \right),$$

где Φ — произвольная функция. Возвращаясь к старым переменным, мы получим:

$$\varphi = \Phi(\lambda_3, \lambda_4, \dots, \lambda_n),$$

где

$$\lambda_i = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i}}{\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2}},$$

причем λ_i должно, очевидно, удовлетворять уравнению:

$$1 + \sum_3^n \lambda_i^2 + \left(\xi_2 + \sum_3^n \lambda_i \xi_i \right)^2 = 0$$

или

$$1 + \xi_2^2 + \sum_3^n (1 + \xi_i^2) \lambda_i^2 + 2 \xi_2 \sum_3^n \lambda_i \xi_i = 0. \quad (44)$$

Таким образом, мы получили еще один класс функционально-инвариантных решений, отвечающий случаю одной зависимости между a_i :

$$\left. \begin{aligned}
 x_1 + \sum_2^n \xi_i x_i + \sqrt{1 + \sum_2^n \xi_i^2} t + \psi(\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n) &= 0, \\
 x_i + \frac{\xi_i t}{\sqrt{1 + \sum_2^n \xi_i^2}} + \frac{\partial a_{n+1}}{\partial a_i} &= 0, \\
 a_{n+1} &= \varphi(\xi_2, \dots, \xi_n) + a_1 \psi(\xi_2, \dots, \xi_n), \\
 u &= \varphi(\lambda_3, \lambda_4, \dots, \lambda_n), \quad \lambda_i = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i}}{\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2}}, \\
 1 + \xi_2^2 + \sum_3^n (1 + \xi_i^2) \lambda_i + 2 \xi_2 \sum_3^n \lambda_i \xi_i &= 0,
 \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

где $\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ являются параметрами. В частности, при $n = 3$ уравнения (45) и (35') принимают вид:

$$1 + \xi_2^2 + 2 \xi_1 \xi_2 \lambda + (1 + \xi_1^2) \lambda^2 = 0, \quad u = \varphi(\lambda),$$

и мы получаем третий класс решений Еругина, определяемый формулами:

$$x_1 + \xi_1 x_2 + \xi_2 x_3 + \sqrt{1 + \xi_1^2 + \xi_2^2} t + \psi(\xi_1, \xi_2) = 0,$$

$$x_i + \frac{\xi_i t}{\sqrt{1 + \xi_1^2 + \xi_2^2}} + \frac{\partial a_4}{\partial a_i} = 0, \quad a_4 = \varphi + a_1 \psi, \quad i = 1, 2,$$

$$u = \varphi(\lambda), \quad \lambda = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i}}{\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2}}, \quad 1 + \xi_2^2 + 2 \xi_1 \xi_2 \lambda + (1 + \xi_1^2) \lambda^2 = 0,$$

или решения (84), (85), (86) работы Еругина (2).

Случай любого числа зависимостей между a_i . Рассмотрим еще раз полный интеграл уравнения характеристик

$$u = \sum_1^n a_i x_i + \sqrt{\sum_1^n a_i^2} t + a_{n+1} \quad (3)$$

и предположим, что между параметрами a_i существует $n - k + 1$ зависимость, где k может принимать значения $k = 2, 3, \dots, n - 1$. Представим эти зависимости в виде $a_i = a_i(a_1, a_2, \dots, a_k)$, где $i = k + 1, k + 2, \dots, n + 1$. Искомый класс функционально-инвариантных решений определится системой

$$u = \sum_1^n a_i x_i + \sqrt{\sum_1^n a_i^2} t + a_{n+1}, \quad (46)$$

$$\frac{\partial u}{\partial a_m} \equiv x_m + \sum_{i=k+1}^n \frac{\partial a_i}{\partial a_m} x_i + \frac{a_m + \sum_{i=k+1}^n a_i \frac{\partial a_i}{\partial a_m}}{\sqrt{\sum_1^n a_i^2}} t + \frac{\partial a_{n+1}}{\partial a_m} = 0,$$

где $m = 1, 2, \dots, k$, причем a_i должны еще удовлетворять уравнению (4).

Исключая из уравнений (46) k переменных x_i , получим:

$$u = \sum_{i=k+1}^n \left(a_i - \sum_{m=1}^k a_m \frac{\partial a_i}{\partial a_m} \right) \left(x_i + \frac{a_i t}{\sqrt{\sum_{i=k+1}^n a_i^2}} \right) + a_{n+1} - \sum_{m=1}^k a_m \frac{\partial a_{n+1}}{\partial a_m} = 0. \quad (47)$$

Это выражение u должно по-прежнему удовлетворять уравнению характеристик. Дифференцируя (47), подставляя в уравнение характеристик и принимая во внимание уравнения $\frac{\partial u}{\partial a_m} = 0$, мы получим:

$$\sum_{i=k+1}^n \left(a_i - \sum_{m=1}^k a_m \frac{\partial a_i}{\partial a_m} \right)^2 = \frac{\left[\sum_{i=k+1}^n a_i \left(a_i - \sum_{m=1}^k a_m \frac{\partial a_i}{\partial a_m} \right) \right]^2}{\sum_{i=1}^n a_i^2}, \quad (48')$$

или, после некоторых преобразований,

$$\sum_{i=1}^k a_i^2 \sum_{j=k+1}^n \left(a_j - \sum_{m=1}^k a_m \frac{\partial a_j}{\partial a_m} \right)^2 + \sum_{i,j=k+1}^n \left[a_i \left(a_j - \sum_{m=1}^k a_m \frac{\partial a_j}{\partial a_m} \right) - a_j \left(a_i - \sum_{m=1}^k a_m \frac{\partial a_i}{\partial a_m} \right) \right]^2 = 0. \quad (48)$$

Это уравнение может служить для определения коэффициентов a_i . С другой стороны, исключая x_i из выражения (47) и его производных по a_i , в силу уравнения (48) найдем:

$$\sum_{i=1}^k a_i \frac{\partial u}{\partial a_i} = 0. \quad (49)$$

Общий интеграл этого уравнения будет

$$u = \varphi \left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_1}, \dots, \frac{a_n}{a_1} \right), \quad (50)$$

т. е. u является функцией a_1, a_2, \dots, a_k , где a_{k+j} определяются уравнением (48).

Уравнение (48) можно рассматривать как обобщенное уравнение Монжа в частных производных с $n-k$ неизвестными функциями $a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n$ аргументов каждая. Применим к нему изложенный выше обобщенный метод Монжа.

Введем обозначения:

$$a_i = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad a_{k+j} = u_j, \quad j = 1, 2, \dots, n-k.$$

Уравнение (48) можно записать в форме:

$$M = \sum_{i=1}^k y_i^2 \sum_{j=1}^{n-k} \left(u_j - \sum_{m=1}^k y_m \frac{\partial u_j}{\partial y_m} \right)^2 + \sum_{i,j=1}^{n-k} \left[u_i \left(u_j - \sum_{m=1}^k y_m \frac{\partial u_j}{\partial y_m} \right) - u_j \left(u_i - \sum_{m=1}^k y_m \frac{\partial u_i}{\partial y_m} \right) \right]^2 = 0. \quad (51)$$

Если предположить, что $u_i = u_i(u_1)$, где $i = 2, 3, \dots, n-k$, то уравне-

ие (51) приведет к виду:

$$1 + \sum_2^{n-k} u_i'^2 + \sum_2^{n-k} (u_1 u_i' - u_i)^2 + \sum_2^{n-k} (u_i u_k' - u_k u_i')^2 = 0; \quad (52)$$

последнее уравнение, очевидно, эквивалентно обобщенному уравнению Глоро:

$$1 + \sum_1^{n-k-1} p_i^2 + \left(\sum_1^{n-k-1} p_i u_i - u_{n-k} \right)^2 = 0.$$

Полный интеграл его

$$u_{n-k} = \sum_1^{n-k-1} A_i u_i + i \sqrt{1 + \sum_1^{n-k-1} A_i^2}, \quad A_i = \text{const.} \quad (53)$$

Полагая $A_i = A_i(A_1)$, дифференцируя (53) по A_1 до порядка $n-k-1$ и исключая A_1 из уравнения (53) и его производных

$$\frac{d^j u_{n-k}}{dA_1^j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n-k-1.$$

мы получим $n-k-1$ уравнений, которые могут служить для определения

$$u_i = u_i(u_1), \quad i = 2, 3, \dots, n-k,$$

ли, возвращаясь к старым переменным,

$$a_m = a_m(a_{k+1}), \quad m = k+2, k+3, \dots, n.$$

Решение определится уравнениями (46) и (50), в которых $a_m = a_m(a_{k+1})$.

В общем случае, полагая в уравнении (51)

$$u_{n-k} = u_{n-k}(y_1, y_2, \dots, y_k, u_1, u_2, \dots, u_{n-k-1}),$$

мы сможем привести его к уравнению в частных производных с одной известной функцией, применив к нему изложенный выше обобщенный метод Монжа. Уравнение (51) можно переписать в форме:

$$M = \sum_1^k y_i^2 \sum_1^{n-k} U_i^2 + \sum_{i,j=1}^{n-k} (u_i U_j - u_j U_i)^2 = 0, \quad (51')$$

де

$$U_i = u_i - \sum_1^k y_m \frac{\partial u_i}{\partial y_m}. \quad (54)$$

Первые k равенств системы (16) примут вид:

$$\frac{\partial u_{n-k}}{\partial y_i} = p_i + \sum_{j=1}^{n-k-1} p_{k+j} \frac{\partial u_i}{\partial y_j}, \quad (55)$$

е

:

$$p_i = \frac{\partial u_{n-k}}{\partial y_i}, \quad p_{k+j} = \frac{\partial u_{n-k}}{\partial u_j}.$$

Отсюда

$$U_{n-k} = D + \sum_{i=1}^{n-k-1} p_{k+i} U_i, \quad (56)$$

где

$$D = u_{n-k} - \sum_1^k y_i p_i - \sum_1^{n-k} u_j p_j.$$

Дифференцируя уравнение (51') по $\frac{\partial u_i}{\partial y_k}$ и подставляя в остальные уравнения системы (16), после элементарных преобразований получим систему:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_1^k y_i^2 + \sum_1^{n-k-1} u_i^2 \right) \sum_1^{n-k} U_i^2 - \left(\sum_1^{n-k} u_i U_i \right)^2 = 0, \\ & \left(\sum_1^k y_i^2 + \sum_1^{n-k-1} u_i^2 \right) (U_j + p_{k+j} U_{n-k}) - (u_j + p_{k+j} u_{n-k}) \sum_1^{n-k} u_i U_i = 0, \end{aligned} \quad (57)$$

или

$$\begin{aligned} & \left(\sum_1^k y_i^2 + \sum_1^{n-k} u_i^2 \right) (U_j + p_{k+j} U_{n-k}) - (u_j + p_{k+j} u_{n-k}) \sum_1^{n-k} u_i U_i = 0 \\ & (j = 1, 2, \dots, n-k). \end{aligned} \quad (57')$$

Исключая отсюда U_j ($j = 1, 2, \dots, n-k$), найдем:

$$\frac{U_1 + p_{k+1} U_{n-k}}{u_1 + p_{k+1} u_{n-k}} = \dots = \frac{U_{n-k-1} + p_{n-1} U_{n-k}}{u_{n-k-1} + p_{n-1} u_{n-k}} = \frac{U_{n-k}}{u_{n-k}} = K,$$

где, в силу уравнения (56),

$$K = \frac{D}{u_{n-k} - \sum_1^{n-k-1} p_i u_i}. \quad (58)$$

Отсюда

$$U_{n-k} = K u_{n-k},$$

что дает:

$$U_i = K u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-k-1.$$

Подставляя это значение U_i в первое уравнение (57), найдем:

$$K^2 \left[\left(\sum_1^k y_i^2 + \sum_{k+1}^n u_i^2 \right) \cdot \sum_1^n u_i^2 - \left(\sum_1^{n-k} u_i^2 \right)^2 \right] = 0,$$

откуда $K = 0$, или $\sum_1^k y_i^2 = 0$, или $\sum_1^{n-k} u_i^2 = 0$.

При $K = 0$ имеем

$$D \equiv u_{n-k} - \sum_1^k p_i y_i - \sum_{j=1}^{n-k-1} p_j u_j = 0, \quad (59)$$

т. е. u_{n-k} определяется линейным уравнением в частных производных.

Его общий интеграл можно взять в виде:

$$u_{n-k} = y_1 \psi \left(\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}, \dots, \frac{y_k}{y_1}, \frac{u_1}{y_1}, \dots, \frac{u_{n-k-1}}{y_1} \right), \quad (60)$$

где ψ — произвольная функция. Но при $K=0$ имеем $U_i = 0$, или, в раскрытом виде,

$$u_i - \sum_1^k y_j \frac{\partial u_i}{\partial y_j} = 0,$$

что дает:

$$u_i = y_1 \varphi_i \left(\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}, \dots, \frac{y_k}{y_1} \right) \quad (61)$$

и, следовательно,

$$u_{n-k} = \varphi_{n-k} \left(\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}, \dots, \frac{y_k}{y_1} \right). \quad (62)$$

В этом случае уравнение (47) принимает вид:

$$u = a_{n+1} - \sum_{m=1}^k a_m \frac{\partial a_{n+1}}{\partial a_m}.$$

Интегрируя полученное линейное относительно a_{n+1} уравнение, найдем, в силу (61):

$$a_{n+1} = a_1 \varphi_{n-k+1} \left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_1}, \dots, \frac{a_k}{a_1} \right) + \psi \left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_1}, \dots, \frac{a_k}{a_1} \right),$$

где ψ и φ_i — произвольные функции.

Таким образом, решение определится системой:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + \sum_1^k \xi_i x_i + \sum_{k+1}^n \varphi_j (\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k) x_j + \sqrt{1 + \sum_2^n \xi_i^2} t + \psi(\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k) &= 0, \\ x_i + \sum_{k+1}^n \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi_i} x_j + \frac{a_i + \sum_{k+1}^n a_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi_i}}{\sqrt{\sum_1^n a_i^2}} t + \frac{\partial a_{n+1}}{\partial a_i} &= 0, \\ u &= \varphi(\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k), \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

где $\xi_i = \frac{a_i}{a_1}$, $i = 2, 3, 4, \dots, k$. Полученное решение еще не является функционально-инвариантным решением, так как оно должно удовлетворять также и волновому уравнению (1). Для этого необходимо, чтобы функция φ удовлетворяла добавочному условию.

Проводя рассуждения, аналогичные случаю одной зависимости между коэффициентами a_i , найдем, что φ определяется уравнением:

$$\sum_{n-k+2}^n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i} \right)^2 + \left(\sum_{n-k+2}^n \xi_i \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i} \right)^2 = 0,$$

откуда следует, что

$$\varphi = \Phi(\lambda_{n-k+3}, \lambda_{n-k+4}, \dots, \lambda_n), \quad (64)$$

где

$$\lambda_i = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i}}{\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_{n-k+3}}},$$

причем λ_i должны удовлетворять уравнению:

$$1 + \xi_{n-k+1}^2 + \sum_{n-k+3}^n (1 + \xi_i^2) \lambda_i^2 + 2\xi_{n-k+2} \sum_{n-k+3}^n \lambda_i \xi_i = 0. \quad (65)$$

Соответствующий класс функционально-инвариантных решений определится уравнениями (63), в которых последнее равенство $u = \varphi$ должно быть заменено уравнениями (64), (65).

Мы рассмотрели случай, когда исключение U_i из системы (57) приводит к уравнению $D = 0$. Случай

$$\sum_1^k y_i^2 = 0, \quad \sum_1^{n-k} u_i^2 = 0$$

не дают принципиально новых результатов, так как меняют на единицу число зависимостей между a_i , т. е. увеличивают на единицу число k , правда, при этом несколько меняется и форма функционально-инвариантных решений. Они определяются системой типа (63), (64), (65), в которой первое уравнение (63) будет иметь вид:

$$x_1 + \sum_2^{k-1} \xi_i x_i + i \sqrt{\xi_2^2 + \sum_3^{k-1} \xi_i^2} x_k + \sum_{k+1}^n \bar{\varphi}_j(\xi_2, \dots, \xi_k) x_j + \\ + \sqrt{1 + \sum_2^n \xi_i^2} t + \psi = 0;$$

остальные рассуждения аналогичны предыдущим.

В частном случае, при $k = 2$, например, уравнение (49) будет иметь вид:

$$a_1 \frac{\partial u}{\partial a_1} + a_2 \frac{\partial u}{\partial a_2} = 0,$$

откуда

$$u = \varphi\left(\frac{a_2}{a_1}\right), \quad \frac{a_2}{a_1} = f(u). \quad (66)$$

Уравнение (48'), определяющее a_i , в этом случае будет:

$$\sum_{i=3}^n \left(a_i - a_1 \frac{\partial a_i}{\partial a_1} - a_2 \frac{\partial a_i}{\partial a_2}\right)^2 = \frac{\left[\sum_3^n a_i \left(a_i - a_1 \frac{\partial a_i}{\partial a_1} - a_2 \frac{\partial a_i}{\partial a_2}\right)\right]^2}{a_1^2 + a_2^2}.$$

Полагая

$$a_i - a_1 \frac{\partial a_i}{\partial a_1} - a_2 \frac{\partial a_i}{\partial a_2} = 0$$

и интегрируя это уравнение, будем иметь:

$$\frac{a_i}{a_1} = \varphi_i\left(\frac{a_2}{a_1}\right) = f_i(u). \quad (67)$$

При этом

$$u = a_{n+1} - a_1 \frac{\partial a_{n+1}}{\partial a_1} - a_2 \frac{\partial a_{n+1}}{\partial a_2}$$

и, следовательно,

$$a_{n+1} = \varphi\left(\frac{a_2}{a_1}\right) + a_1 \psi\left(\frac{a_2}{a_1}\right). \quad (68)$$

Легко проверить, что в этом случае условие (4) выполняется. Исключая $\frac{a_2}{a_1}$ из уравнения (3), уравнения $\frac{\partial u}{\partial a_1} = 0$ и из уравнений (66), (67) (68), мы получим формулу Смирнова — Соболева:

$$x_1 + \sum_2^n f_i(u) x_i + \sqrt{1 + \sum_2^n f_i^2 t} + f_1(u) = 0,$$

где f_i — произвольные функции.

При $n = 4$, $k = 3$ имеем:

$$u = \varphi\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_1}\right).$$

Условие (48') будет иметь вид:

$$\left(a_4 - \sum_1^3 a_i \frac{\partial a_4}{\partial a_i}\right)^2 = \frac{\left[a_4 \left(a_4 - \sum_1^3 a_i \frac{\partial a_4}{\partial a_i}\right)\right]^2}{\sum_1^3 a_i^2}.$$

Если ограничиться вещественными решениями, т. е. предположить, что

$$a_4 - \sum_1^3 a_i \frac{\partial a_4}{\partial a_i} = 0,$$

то получим:

$$u = \varphi\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_1}\right), \quad a_5 = \varphi\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_1}\right) + a_1 \psi\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_1}\right).$$

Исключая $\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_1}$ из этих уравнений, уравнений полного интеграла (3)

и его производных $\frac{\partial u}{\partial a_i} = 0$, мы получим формулы (159), (161), (162) работы Смирнова (3).

Таким образом, мы рассмотрели случаи одной, n и $n - k + 1$ зависимостей между параметрами a_i полного интеграла (3) уравнения характеристик. Давая k различные значения $k = 2, 3, \dots, n - 1$ и присоединяя сюда два первых случая, получим различные классы функционально-инвариантных решений. Решения Еругина и Смирнова получаются из них при $n = 3$, $n = 4$ и соответствующих значениях k .

Поступило
8. XII. 1955

ЛИТЕРАТУРА

Smirnoff V. et Soboleff S., Sur une méthode nouvelle dans le problème plan des vibrations élastiques, Труды Сейсмологич. ин-та Ак. наук СССР, 20 (1932), 1—32.

Smirnoff V. et Soboleff S., Sur l'application de la méthode nouvelle à l'étude des vibrations élastiques dans l'espace à symétrie axiale, Труды Сейсмологич. ин-та Ак. наук СССР, 29 (1933), 1—49.

- ¹ С о б о л е в С. Л., Функционально-инвариантные решения волнового уравнения, Труды физико-матем. ин-та им. Стеклова, V (1934), 259—264.
 - ² Е р у г и н Н. П., О функционально-инвариантных решениях, Учен. записки ЛГУ, серия матем., вып. 15 (1948), 101—134.
 - ³ С м и р н о в М. М., Функционально-инвариантные решения волнового уравнения, Учен. записки ЛГУ, серия матем., вып. 21 (1950), 127—202.
 - ⁴ Г а л о н е н Л. М., О некотором упрощении метода отыскания функционально-инвариантных решений волнового уравнения, Учен. записки РГУ, т. XXXII, вып. 4 (1955), 173—178.
 - ⁵ Г и л ь б е р т Д. и К у р а н т Р., Методы математической физики, т. 2, ГТТИ, М.—Л., 1951.
-

А. Ф. ФИЛИПОВ

О РАЗНОСТНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым)

В работе приведено разностное уравнение, решение которого сходится к решению задачи Трикоми для дифференциального уравнения $u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$.

В работах (1), (2) метод конечных разностей применяется к решению задачи Трикоми для уравнения

$$k(y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

где $k(y) = 1$ при $y > 0$, $k(y) = -1$ при $y < 0$. В литературе нет указаний о применении метода конечных разностей к уравнению смешанного типа с непрерывными коэффициентами. В настоящей работе приведено разностное уравнение, решение которого сходится к решению задачи Трикоми для уравнения (1), где $k(y) \equiv y$, если последнее решение существует. Сходимость имеет место и в тех случаях, когда решение дифференциального уравнения имеет особенности в точках пересечения границы области с прямой $y = 0$. Метод доказательства сходимости во многом совпадает с методом, использованным К. И. Бабенко (3) для доказательства существования решения дифференциального уравнения (1) при произвольной достаточно гладкой функции $k(y)$.

Л. И. Коваленко показала, что изложенный здесь разностный метод применим к уравнению (1) и при $k(y) = |y|^n \operatorname{sign} y$, где $0 < n < \infty$.

§ 1. Основные предположения

Пусть задана область D (рис. 1), ограниченная простой дугой OAB , лежащей в полуплоскости $y > 0$, с характеристиками OC и BC дифференциального уравнения

$$Lu \equiv y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y). \quad (2)$$

Будем предполагать *, что куски дуги OAB в окрестностях точек O и B таковы, что они имеют с каждой из кривых $x - x_0 = Cy^{\frac{1}{2}}$ ($-\infty < C < +\infty$) не более одной общей точки; x_0 — постоянное число, заключенное между абсциссами точек O и B . Для выполнения этого условия достаточно, чтобы куски дуги OAB в окрестностях точек O и B могли быть

* Это предположение используется лишь в лемме 8 и теореме 5.

заданы уравнениями $x = f_1(y)$ вблизи O и $x = f_2(y)$ вблизи B , где $f'_1(y) \geq -M > -\infty$, $f'_2(y) \leq M < +\infty$ (ограничения на производные нужны только в том случае, если эти куски не являются выпуклыми).

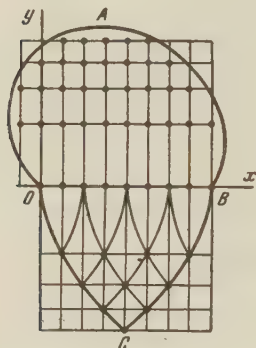


Рис. 1

Задача Трикоми состоит в том, чтобы найти решение уравнения (2) в области D , если известны его значения на дугах OAB и OC :

$$u|_{OAB} = \varphi, \quad u|_{OC} = \psi. \quad (3)$$

Предположим, что при заданных φ и ψ существует непрерывное в \bar{D} (черта означает замыкание) решение этой задачи, имеющее внутри D непрерывные $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, что разность $\frac{\partial u}{\partial y} - \sqrt{-y} \frac{\partial u}{\partial x}$ непрерывна также и на OC , кроме, может быть, точки O (в окрестности

точки O при $y < 0$ имеем $\frac{\partial u}{\partial x} = o(|y|^{-\frac{3}{2}})$, $\frac{\partial u}{\partial y} = o(|y|^{-1})$, и что $f(x, y)$ непрерывна в \bar{D} .

Мы покажем, что в случае выполнения этих условий решение разностного уравнения (построенного ниже) сходится к решению уравнения (2).

§ 2. Аппроксимация дифференциального уравнения разностным

Пусть граница области D пересекает ось абсцисс в точках $O(0, 0)$ и $B(x_B, 0)$. Разделим отрезок OB на равные части. Через точки деления проведем характеристики:

$$x + \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} = 2nh, \quad x - \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} = 2nh \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

уравнения (2). Взяв при $y < 0$ точки пересечения этих линий, а при $y \geq 0$ — точки вида $x = nh$, $y = \left(\frac{3}{2}mh\right)^{\frac{2}{3}}$ (m и n — целые), попавшие внутрь или на границу области D , получим сетку D_h . Все точки сетки расположены на прямых $y = y_m$ и $y = -y_m$, $m = 0, 1, 2, \dots$, причем

$$y_m = \left(\frac{3}{2}mh\right)^{\frac{2}{3}}, \quad l_m = y_m - y_{m-1}. \quad (4)$$

При $y < 0$ уравнение (2) аппроксимируется уравнением:

$$R_h u_h \equiv \frac{1}{l_m l_{m+1}} \left[\frac{2l_{m+1}}{l_m + l_{m+1}} u_h(x, -y_{m-1}) + \frac{2l_m}{l_m + l_{m+1}} u_h(x, -y_{m+1}) - u_h(x+h, -y_m) - u_h(x-h, -y_m) \right] = f(x, -y_m) \quad (5)$$

и при $y > 0$ — уравнением

$$R_h u_h \equiv \frac{y_m}{h^2} [u_h(x-h, y_m) - 2u_h(x, y_m) + u_h(x+h, y_m)] + \frac{2}{l_m l_{m+1}} \left[\frac{l_{m+1}}{l_m + l_{m+1}} u_h(x, y_{m-1}) - u_h(x, y_m) + \frac{l_m}{l_m + l_{m+1}} u_h(x, y_{m+1}) \right] = f(x, y_m). \quad (6)$$

При $y = 0$ уравнение (2) принимает вид $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, 0)$ и аппроксимируется уравнением

$$R_h u_h \equiv \frac{1}{y_k^2} [u_h(x, y_k) - 2u_h(x, 0) + u_h(x, -y_k)] = f(x, 0), \quad (7)$$

где $k = 2$ для $x = 2nh$, $k = 1$ для $x = (2n + 1)h$, n — целое.

Назовем граничными точками сетки D_h , во-первых, точки D_h , лежащие на OC , и, во-вторых, те точки области D_h , лежащие в полуплоскости $y \geq 0$, для которых не все соседние точки принадлежат D_h .

Для точки (x, y_m) , где $y_m > 0$, соседними назовем четыре точки, входящие в уравнение (6), а для точки вида $(x, 0)$ — две точки (x, y_k) и $(x, -y_k)$, входящие в уравнение (7).

Множество граничных точек сетки обозначим через Γ_h ; часть Γ_h , лежащую в полуплоскости $y \geq 0$, обозначим через Γ_h^+ .

Граничные условия (3) заменим такими:

1) в точках сетки, лежащих на OC , положим $u_h = \psi$;

2) непрерывно продолжим в область OAB функцию φ , заданную на дуге OAB (способ продолжения произволен, но не зависит от h при $h \rightarrow 0$); в точках Γ_h^+ положим $u_h = \varphi$.

Дифференциальное уравнение (2) заменим системой уравнений вида (5), (6), (7); число этих уравнений равно числу точек множества $D_h - \Gamma_h$. Эту систему и граничные условия запишем так:

$$R_h u_h = f, \quad (8)$$

$$u_h = \psi \text{ на } OC, \quad u_h = \varphi \text{ на } \Gamma_h^+. \quad (9)$$

В линейной системе уравнений (8), (9) число уравнений равно числу неизвестных (неизвестными являются значения функции u_h в точках сетки D_h). В § 3 доказывается, что при любых φ и ψ эта система имеет единственное решение и что это решение можно найти способом итераций (как решение задачи Дирихле на сетке).

Исследуем точность аппроксимации.

а) Предположим сначала, что существуют $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$ и $\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$. Разлагая значения функции u , входящие в (5), по формуле Тейлора в окрестности точки $(x, -y_m)$, получим, что при $y < 0$

$$Lu - R_h u = \left(\frac{h^2}{l_m l_{m+1}} - y_m \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^4}{12 l_m l_{m+1}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^4} \Big|_{\text{сред}} - \frac{l_m - l_{m+1}}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{l_m^2 - l_m l_{m+1} + l_{m+1}^2}{12} \frac{\partial^2 u}{\partial y^4} \Big|_{\text{сред}}, \quad (10)$$

где

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{\text{сред}} = \frac{\partial^4 u(x + \theta h, -y_m)}{\partial x^4}, \quad |\theta| < 1$$

и т. п. Точно так же при $y > 0$ получим из (6):

$$Lu - R_h u = -\frac{h^4}{12 y_m} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{\text{сред}} + \frac{l_m - l_{m+1}}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{l_m^2 - l_m l_{m+1} + l_{m+1}^2}{12} \frac{\partial^2 u}{\partial y^4} \Big|_{\text{сред}}. \quad (11)$$

Оценим коэффициенты этих формул. В силу (4),

$$\begin{aligned}
 l_m l_{m+1} &= \left(\frac{3}{2} h\right)^{\frac{4}{3}} \left[\left(1 - \frac{1}{m}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 - \left(1 - \frac{1}{m^2}\right)^{\frac{2}{3}} \right] = \\
 &= \left(\frac{3}{2} h\right)^{\frac{4}{3}} m^{-\frac{2}{3}} \left[\frac{4}{9} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdots (k - \frac{5}{3})}{k!} - 2 \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdots (2k - \frac{5}{3})}{(2k)!} \right) m^{\frac{1}{2k-2}} \right] = \\
 &= \left(\frac{3}{2} h\right)^{\frac{4}{3}} m^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{4}{9} \left(1 + \frac{13}{108 m^2} + \frac{71}{1458 m^4} + \cdots \right). \quad (*)
 \end{aligned}$$

Легко доказать, что все коэффициенты ряда положительны. В самом деле, это доказательство сводится к доказательству неравенства

$$\left(1 - \frac{5}{3(k+1)}\right) \left(1 - \frac{5}{3(k+2)}\right) \cdots \left(1 - \frac{5}{3 \cdot 2k}\right) < \frac{1}{2},$$

которое справедливо, так как логарифм левой части меньше, чем

$$\sum_{n=k+1}^{2k} \left(-\frac{5}{3n}\right) \leq -\frac{5}{3 \cdot 2k} \cdot k = -\frac{5}{6} < \ln \frac{1}{2}.$$

С другой стороны, положив в формуле (*) $m = 1$, получим, что сумма всех коэффициентов ряда равна

$$\frac{9}{4} (2^{\frac{2}{3}} - 1) = 1,32 \dots$$

С помощью этих и аналогичных оценок получим при $m > 1$:

$$\left. \begin{aligned}
 0 < y_m - \frac{h^2}{l_m l_{m+1}} &< 0,33 \cdot \left(\frac{3}{2} h\right)^{\frac{2}{3}} m^{-\frac{4}{3}} = 0,33 \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{h^2}{y_m^2}, \\
 0 < \frac{h^4}{12 l_m l_{m+1}} &< \frac{h^3}{12} y_m, \quad 0 < \frac{l_m - l_{m+1}}{3} < 0,14 \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{h^3}{y_m^2}, \\
 0 < \frac{l_m^2 - l_m l_{m+1} + l_{m+1}^2}{12} &< \frac{l_m^2}{12} \leq \frac{1}{12} \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{h^3}{y_m}
 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Так как в (5), (6) и (12) $m \geq 1$, $y_m \geq \left(\frac{3}{2} h\right)^{\frac{2}{3}}$, то выражения (10) и (11) — величины порядка $O(h^{\frac{2}{3}})$, т. е. уравнения (5) и (6) аппроксимируют уравнение (2) с ошибкой порядка $h^{\frac{2}{3}}$.

Заметим, что при любом $\eta_0 > 0$ уравнения (5) в области $y \leq -\eta_0$ и (6) в области $y \geq \eta_0$ дают аппроксимацию порядка h^2 .

Наконец, из (7) получим, что при $y = 0$

$$Lu - R_h u = -\frac{y_k^3}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \Big|_{\text{сред}} = -\frac{1}{12} \left(\frac{3}{2} kh\right)^{\frac{4}{3}} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \Big|_{\text{сред}}. \quad (13)$$

б) Будем теперь требовать только существование и непрерывность $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Тогда формулы (10), (11), (13) заменятся следующими:

$$\left. \begin{aligned} Lu - R_h u &= \left(\frac{h^2}{l_m l_{m+1}} - y_m \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^2}{l_m l_{m+1}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{\text{сред}} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{\text{сред}} \right), \quad y < 0, \\ Lu - R_h u &= y_m \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{\text{сред}} \right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{\text{сред}} \right), \quad y > 0, \\ Lu - R_h u &= \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{\text{сред}}, \quad y = 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

В силу оценок (12) и непрерывности $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, имеем:

$$Lu - R_h u \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0.$$

§ 3. Существование решения разностного уравнения

В § 3 и далее предполагается, что область D лежит в полосе $-Y_1 \leq y \leq Y_2$. Обозначения Γ_h , Γ_h^+ , y_1, y_2, \dots, y_m и т. д. — те же, что в § 2; D_h^+ и D_h^- — части D_h , лежащие в областях $y \geq 0$ и $y \leq 0$.

ЛЕММА 1. Если функция u_h определена в сетчатой области D_{h_2} , содержащейся в D_h^+ или совпадающей с ней, $R_h u_h \geq 0$ и $u_h \leq C$ на Γ_{h_2} (Γ_{h_2} — множество граничных точек D_{h_2}), то $u_h \leq C$ в D_h^+ .

Доказательство. Предположим, что в области D_{h_2} $\max u_h = C_1 > C$. Этот максимум достигается не на Γ_{h_2} , поэтому найдется точка (x, y_m) , принадлежащая D_{h_2} вместе с четырьмя соседними точками и такая, что в этой точке $u_h = C_1$, а в четырех соседних точках $u_h \leq C_1$, но не во всех этих точках $u_h = C_1$. Тогда, в силу (6), в этой точке (x, y_m) $R_h u_h < 0$, что противоречит условию. Итак, неравенство $\max u_h > C$ невозможно.

ЛЕММА 2. Если функция u_h определена в D_h^+ , $R_h u_h \geq 0$, $u_h \leq 0$ на Γ_h^+ , $u_h \leq C$ на OB , $C > 0$, то $u_h \leq qC$ в D_h^+ при $y \geq y_1$, где $q < 1$.

Доказательство. Пусть

$$v(x, y) = C \left(1 - \frac{y}{Y_2} \right).$$

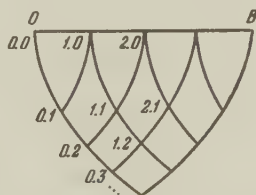


Рис. 2

Тогда в D_h^+ $0 \leq v \leq C$, $R_h v = 0$, $R_h(u_h - v) \geq 0$; на Γ_h^+ и на OB $u_h - v \leq 0$. Отсюда, в силу леммы 1, следует, что $u_h - v \leq 0$ в D_h^+ , т. е. при $y \geq y_1$

$$u_h \leq C \left(1 - \frac{y}{Y_2} \right) \leq C \left(1 - \frac{y_1}{Y_2} \right).$$

Рассмотрим область D_h^- . Каждую точку этой области обозначим двумя индексами так, как на рис. 2.

Уравнение (5) запишем в виде:

$$R_h u_h \equiv \frac{1}{l_m l_{m+1}} [(1 - a_m) u_{k, m-1} + (1 + a_m) u_{k-1, m-1} - u_{k, m} - u_{k-1, m}] = 0,$$

где $u_{k, m}$ — значение функции u_h в точке с индексами (k, m) ,

$$a_m = \frac{l_m - l_{m+1}}{l_m + l_{m+1}} = \frac{-(m+1)^{\frac{2}{3}} + 2m^{\frac{2}{3}} - (m-1)^{\frac{2}{3}}}{(m+1)^{\frac{2}{3}} - (m-1)^{\frac{2}{3}}}.$$

Докажем, что имеют место неравенства:

$$0 < a_m < a_{m-1} < 1, \quad (1 - a_m)(1 + a_{m-1}) > 1 \quad (m = 2, 3, 4, \dots). \quad (15)$$

Действительно, из неравенства $0 < l_{m+1} < l_m$ следует, что $0 < a_m < 1$. Остается доказать, что $\frac{1}{a_m} - \frac{1}{a_{m-1}} > 1$. Для этого оценим $\frac{1}{a_m}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_m} &= \frac{l_m + l_{m+1}}{l_m - l_{m+1}} = \frac{(m+1)^{\frac{2}{3}} - (m-1)^{\frac{2}{3}}}{2m^{\frac{2}{3}} - (m+1)^{\frac{2}{3}} - (m-1)^{\frac{2}{3}}} = \\ &= 6m \frac{1 + \sum_{k=2}^{\infty} \left[m^{-2k+2} \prod_{s=2}^{2k-1} \left(1 - \frac{5}{3s} \right) \right]}{1 + \sum_{k=2}^{\infty} \left[m^{-2k+2} \prod_{s=3}^{2k} \left(1 - \frac{5}{3s} \right) \right]} = 6m \cdot \frac{1 + S_1}{1 + S_2} = 6m \cdot \left(1 - \frac{S_2 - S_1}{1 + S_2} \right) = \\ &= 6m - \frac{20}{9m(1 + S_2)} \cdot \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{i=2}^{\infty} \left[m^{-2i+2} \left(1 - \frac{1}{i+1} \right) \prod_{s=4}^{2i+1} \left(1 - \frac{5}{3s} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Так как отношение каждого члена ряда, стоящего в фигурных скобках, к соответствующему члену ряда $1 + S_2$ заключено между $\frac{1}{2}$ и $\frac{9}{4}$, то

$$6m - \frac{5}{m} < \frac{1}{a_m} < 6m - \frac{10}{9m}. \quad (16)$$

Отсюда следует, что $\frac{1}{a_m} - \frac{1}{a_{m-1}} > 4$ при $m \geq 2$.

ЛЕММА 3. Если функция u_h определена в D_h^- , $R_h u_h \leq 0$ и если на OB $u_h \geq 0$, а на OC

$$u_0, m \geq 0, \quad (1 + a_m) u_{0, m+1} \geq u_{0, m} \quad (m = 1, 2, 3, \dots), \quad (17)$$

то в D_h^-

$$u_h \geq 0, \quad (1 + a_m) u_{k, m+1} \geq u_{k, m} \geq 0 \quad (k = 1, 2, \dots; \quad m = 0, 1, 2, \dots). \quad (18)$$

Доказательство проводится по индукции. Пусть неравенства (18) доказаны для $k = 0, 1, \dots, K-1$ ($K \geq 1$). Из $R_h u_h \leq 0$ следует, что

$$u_{K, m} \geq (1 - a_m) u_{K, m-1} \geq (1 + a_m) u_{K-1, m+1} - u_{K-1, m}.$$

Правая часть неотрицательна, поэтому

$$u_{K, m} \geq (1 - a_m) u_{K, m-1} \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (19)$$

Так как $a_m < 1$, $u_{K, 0} \geq 0$ (по условию, $u_h \geq 0$ на OB), то из (19)

находим:

$$u_{K, m} \geq 0 \quad (m = 1, 2, \dots).$$

В силу (15), из (19) следует:

$$(1 + a_{m-1}) u_{K, m} \geq u_{K, m-1} \quad (m = 1, 2, \dots),$$

т. е. неравенства (18) справедливы и при $k = K$.

ЛЕММА 4. Пусть функция u_h в точках сетки, лежащих на OC , принимает значения, равные значениям непрерывной функции ψ , заданной на OC и не зависящей от шага сетки h . Пусть $\frac{d\psi}{dy}$ существует и непрерывна, кроме, может быть, точки O . Тогда для выполнения условия (17) при сколь угодно мелкой сетке необходимо и достаточно, чтобы на OC

$$\psi \geq 0, \quad g(\psi) \equiv \psi + 4y \frac{d\psi}{dy} \geq 0. \quad (20)$$

Если функция ψ равна на OC некоторой функции $u(x, y)$, заданной в D , то

$$\frac{d\psi}{dy} = \frac{du}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{OC} + \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{OC} \cdot \frac{dx}{dy} \Big|_{OC} = \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{OC} - \sqrt{-y} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{OC}. \quad (21)$$

Докажем достаточность условия (20). Пусть оно выполнено. Взяв произвольное $\varepsilon > 0$, имеем:

$$\psi + \varepsilon > 0, \quad \psi + \varepsilon + 4y \frac{d(\psi + \varepsilon)}{dy} > 0, \quad y < 0.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{d(\psi + \varepsilon)}{\psi + \varepsilon} < -\frac{dy}{4y}.$$

Интегрируя от $y = -y_{m+1}$ до $y = -y_m$ и обозначая

$$\psi(-y_m) = u_{0, m}, \quad \psi(-y_{m+1}) = u_{0, m+1},$$

получим:

$$\ln(u_{0, m} + \varepsilon) - \ln(u_{0, m+1} + \varepsilon) < \frac{1}{4} (\ln y_{m+1} - \ln y_m),$$

$$u_{0, m} - u_{0, m+1} < \left[\left(\frac{y_{m+1}}{y_m} \right)^{\frac{1}{4}} - 1 \right] (u_{0, m+1} + \varepsilon) < a_m (u_{0, m+1} + \varepsilon),$$

так как, в силу (4) и (16),

$$\left(\frac{y_{m+1}}{y_m} \right)^{\frac{1}{4}} - 1 = \left(1 + \frac{1}{m} \right)^{\frac{1}{6}} - 1 < \frac{1}{6m} < a_m.$$

Ввиду произвольной малости ε неравенство (17) доказано.

Докажем необходимость условия (20). Пусть (20) не выполнено, т. е. в какой-либо точке на OC (а значит, и в ее окрестности) имеем:

$$\psi > 0, \quad \frac{d\psi}{dy} > \frac{p}{4y} \cdot \psi,$$

где $p > 1$. Деля на ψ и интегрируя, получим:

$$u_{0, m} - u_{0, m+1} > \left[\left(\frac{y_{m+1}}{y_m} \right)^{\frac{p}{4}} - 1 \right] u_{0, m+1}.$$

При измельчении сетки $m \rightarrow +\infty$, $\left(\frac{y_{m+1}}{y_m}\right)^{\frac{p}{4}} - 1 \sim \frac{p}{6m}$, $a_m \sim \frac{1}{6m}$, значит, при мелкой сетке неравенство (17) не выполнено.

ЛЕММА 5. Если функция u_h определена в D_h , $R_h u_h \leq 0$ и если на Γ_h $u_h \geq 0$, а на OC выполнено условие (17) (или (20)), то в D_h $u_h \geq 0$.

Доказательство. Предположим, что

$$\min_{OB} u_h = -m < 0. \quad (22)$$

Тогда на Γ_h^+ имеем $-u_h \leq 0$, на OB $-u_h \leq m$; $R_h(-u_h) \geq 0$. Применяя лемму 2 к функции $-u_h$, получим, что $-u_h \leq qm$ при $y \geq y_1$, т. е. $u_h \geq -qm$, где $q < 1$.

С другой стороны, функция $u_h + m$ удовлетворяет условиям леммы 3, поэтому в D_h^- имеем:

$$u_h + m \geq 0, \quad u_h \geq -m.$$

Рассмотрим $R_h u_h$ в той точке отрезка OB , где достигается $\min u_h = -m$. Так как при $y \geq y_1$ имеем $u_h \geq -qm$, а при $y < 0$ $u_h \geq -m$, то, в силу (7), получаем:

$$R_h u_h \geq \frac{1}{y_k^2} m(1-q) > 0.$$

Но это противоречит условию. Значит, неравенство (22) невозможно.

Итак, $u_h \geq 0$ на OB . Отсюда, в силу леммы 3, имеем: $u_h \geq 0$ в D_h^- . С другой стороны, применяя лемму 1 к функции $-u_h$, получим, что $-u_h \leq 0$ в D_h^+ , т. е. $u_h \geq 0$. Таким образом, везде $u_h \geq 0$.

ТЕОРЕМА 1. Система уравнений (8), (9) имеет единственное решение при любых заданных функциях f , φ и ψ .

Доказательство. Пусть v_h — решение однородной системы $R_h v_h = 0$, $v_h = 0$ на Γ_h^+ и OC . Тогда каждая из функций v_h и $-v_h$ удовлетворяет условиям леммы 5. Следовательно, $v_h \equiv 0$, т. е. однородная система имеет только нулевое решение. Значит, детерминант системы не равен нулю, и неоднородная система (8), (9) имеет единственное решение при любых правых частях.

Покажем, что систему (8), (9) можно решать способом последовательных приближений (так же, как соответствующую систему для задачи Дирихле на сетке).

Для этого занумеруем все точки множества $D_h - \Gamma_h$ в таком порядке: сначала все точки в области $y > 0$ (в произвольном порядке), затем все точки на линии OB (в произвольном порядке), затем все точки в области $y < 0$ в следующем порядке: сначала точки на характеристике $x - \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} = 2h$ (в порядке возрастания $|y|$), затем точки на характеристике $x - \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} = 4h$ (в том же порядке), затем точки на следующей характеристике и т. д.

Разрешим каждое из уравнений системы (8) относительно значения u_h в одной из точек, а именно: уравнения вида (5) — относительно $u_h(x+h, -y_m)$, уравнения вида (6) — относительно $u_h(x, y_m)$, уравнения вида (7) — относительно $u_h(x, 0)$. Входящие в эти уравнения значения u_h

в точках Γ_h заменим известными значениями φ и ψ согласно (9). Тогда система примет вид:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_{nk} u_k + \sum_{k=n+1}^N a_{nk} u_k + f_n \quad (n=1, 2, \dots, N), \quad (23)$$

где u_n — значение функции u_h в точке с номером n .

ТЕОРЕМА 2. *Решение системы (23) может быть получено итерационным процессом Зейделя, т. е. если обозначить через $u_1^{(i)}, \dots, u_N^{(i)}$ i -е приближение к решению системы (23), задать нулевое приближение произвольно, а дальнейшие приближения вычислять по формуле*

$$u_n^{(i+1)} = \sum_{k=1}^{n-1} a_{nk} u_k^{(i+1)} + \sum_{k=n+1}^N a_{nk} u_k^{(i)} + f_n \quad (n=1, 2, \dots, N),$$

то при $i \rightarrow +\infty$ получим: $u_n^{(i)} \rightarrow u_n$, где u_n — решение системы (23).

Доказательство. Обозначим $u_n^{(i)} - u_n$ через $v_n^{(i)}$. Тогда

$$v_n^{(i+1)} = \sum_{k=1}^{n-1} a_{nk} v_k^{(i+1)} + \sum_{k=n+1}^N a_{nk} v_k^{(i)}$$

и на Γ_h $v^{(i)} = v^{(i+1)} = 0$. Пусть $M > 0$, $w(x, y) = M$ при $y \leq 0$, $w(x, y) = M\left(1 - \frac{y^2}{Y_2^2}\right)$ при $y > 0$. Предположим, что в D_h $v^{(i)} \leq w$. С помощью (6), путем индукции по n , доказывается, что

$$v_n^{(i+1)} \leq \left(1 - \frac{h^2}{2Y_2^2}\right)w$$

в области $y > 0$. Затем, используя (7), получаем, что при $y = 0$

$$v_n^{(i+1)} \leq \left(1 - \frac{h^2}{4Y_2^2}\right)M. \quad (24)$$

Наконец, учитывая нумерацию точек в области $y < 0$, мы заключаем, что в этой области R_h $v^{(i+1)} = 0$. Отсюда и из неравенства (24) при помощи леммы 3 выводим, что (24) справедливо и при $y < 0$.

Итак, если в D_h $v^{(i)} \leq w$, то $v^{(i+1)} \leq qw$, где $q = 1 - \frac{h^2}{4Y_2^2}$. Следовательно, $\max v^{(i)} \leq Cq^i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow +\infty$. Аналогично, $\min v^{(i)} \rightarrow 0$.

§ 4. Оценки решения разностного уравнения

ТЕОРЕМА 3. *Задача Трикоми для разностного уравнения (8) — (9) поставлена корректно, т. е. если функции f , φ , ψ и $\frac{\Delta\psi}{\Delta y}$ изменить * меньше, чем на δ , то решение u_h изменится меньше, чем на ε , где при $\delta \rightarrow 0$ имеем $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по h (или: разностное уравнение (8) — (9) устойчиво по отношению к изменениям правой части и граничных усло-*

* $\frac{\Delta\psi}{\Delta y}$ означает $\frac{\psi_m - \psi_{m+1}}{y_{m+1} - y_m}$, где $\psi_m = \psi(-y_m)$.

вий). Имеет место оценка:

$$\begin{aligned} \min \left\{ \varphi, \psi, \psi_{m+1} - \frac{\psi_m - \psi_{m+1}}{a_m} \right\} - \frac{1}{2} K_2 M^2 \leq u_h \leq \\ \leq \max \left\{ \varphi, \psi, \psi_{m+1} - \frac{\psi_m - \psi_{m+1}}{a_m} \right\} + \frac{1}{2} K_1 M^2, \end{aligned} \quad (25)$$

где $M = \frac{(Y_2 + Y_1)(Y_2 + 9Y_1)}{2(Y_2 + 5Y_1)}$, а неотрицательные числа K_1, K_2 таковы, что $-K_1 \leq f(x, y) \leq K_2$ в области D_h .

Если функция ψ определена не только в точках сетки, но и на всей линии OC , то в силу леммы 4 оценка (25) остается справедливой, если $\psi_{m+1} - \frac{\psi_m - \psi_{m+1}}{a_m}$ заменить на $\psi + 4y \frac{d\psi}{dy}$.

Доказательство. Пусть

$$v(y) = \frac{1}{2} (Y_2 - y) \left(y + \frac{Y_1(9Y_1 + 5Y_2)}{5Y_1 + Y_2} \right).$$

Тогда в области D имеем:

$$0 \leq v \leq \frac{1}{2} M^2, \quad R_h v \equiv -1,$$

на OC при $-Y_1 \leq y \leq 0$ имеем:

$$v \geq 0, \quad v + 4y \frac{dv}{dy} \geq 0.$$

Отсюда, в силу леммы 4, следует, что

$$v_{m+1} - \frac{v_m - v_{m+1}}{a_m} \geq 0,$$

где $v_m = v(-y_m)$. Для функции $z = u_h + K_2 v - P$, где

$$P = \min \left\{ \varphi, \psi, \psi_{m+1} - \frac{\psi_m - \psi_{m+1}}{a_m} \right\},$$

имеем

$$R_h z \leq 0 \text{ в } D_h, \quad z \geq 0 \text{ на } \Gamma_h, \quad z_{m+1} - \frac{z_m - z_{m+1}}{a_m} \geq 0 \text{ на } OC.$$

В силу леммы 3, $z \geq 0$ в D_h , т. е.

$$u_h \geq P - K_2 v \geq P - \frac{1}{2} K_2 M^2.$$

Второе из неравенств (25) доказывается аналогично.

В силу линейности уравнения, из оценки (25) следует корректность в указанном выше смысле. При этом нужно учесть, что

$$\left| \frac{\psi_m - \psi_{m+1}}{a_m} \right| \leq 4y_m \left| \frac{\Delta\psi}{\Delta y} \right|.$$

ЛЕММА 6. Если $u_h = 0$ на OC , $|u_h| \leq \varepsilon$ на Γ_h^+ , $|R_h u_h| \leq \frac{h^2}{y^2} N$

при $|y| \geq y_1 = \left(\frac{3}{2} h\right)^{\frac{2}{3}}$, $|R_h u_h| \leq 0,9 h^{\frac{2}{3}} N$ при $y = 0$, $Y = \max \{Y_1, Y_2\}$,

то в D

$$|u_h| \leq \varepsilon + \frac{10}{3} h^{\frac{4}{3}} NY. \quad (26)$$

Доказательство. Пусть

$v(x, 0) = 0$, $v(x, y) = 2|y| - h^{-\frac{2}{3}} \ln \left(4|y| h^{-\frac{2}{3}} \right)$ при $|y| \geq y_1$,
 $v(x, y)$ линейна при $0 < |y| < y_1$. Тогда, в силу (7), при $y = 0$

$$R_h v > 0,9 h^{-\frac{2}{3}},$$

а при $|y| \geq y_2$, в силу (5) и (6), получим:

$$\begin{aligned} R_h v &= -h^{\frac{2}{3}} R_h (\ln |y|) = \\ &= -\frac{2h^{\frac{2}{3}}}{l_m + l_{m+1}} \left[\frac{1}{l_m} \ln \left(1 - \frac{l_m}{y_m} \right) + \frac{1}{l_{m+1}} \ln \left(1 + \frac{l_{m+1}}{y_m} \right) \right], \end{aligned}$$

так как

$$y_{m-1} = y_m - l_m, \quad y_{m+1} = y_m + l_{m+1}.$$

Разлагая логарифмы в ряды, сокращая на $l_m + l_{m+1}$ и замечая, что $l_{m+1} < l_m$, получим, что при $|y| \geq y_2$

$$R_h v > h^{\frac{2}{3}} y_m^{-2}.$$

Простым подсчетом убеждаемся, что это же неравенство справедливо и при $|y| = y_1$.

Рассмотрим две функции:

$$w_i = (-1)^i u_h + \varepsilon + h^{\frac{4}{3}} N \left(\frac{10}{3} Y - \frac{4}{3} y - v - h^{\frac{2}{3}} \right) \quad (i = 1, 2).$$

Пользуясь сделанными оценками для v , получим, что в D_h $R_h w_i \leq 0$, на Γ_h $w_i \geq 0$, а на OC w_i удовлетворяет условию (20). В силу лемм 3 и 4 $w_i \geq 0$ в D_h ($i = 1, 2$), т. е.

$$\pm u_h \leq \varepsilon + h^{\frac{4}{3}} N \max_{|y| \leq Y} \left(\frac{10}{3} Y - \frac{4}{3} y - v - h^{\frac{2}{3}} \right).$$

Вычислив максимум правой части, получим оценку (26).

§ 5. Сходимость решения разностного уравнения к решению дифференциального

ТЕОРЕМА 4. а) Если существует решение задачи Трикоми для дифференциального уравнения (2) с граничными условиями (3), имеющее в \bar{D} непрерывные $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, то при $h \rightarrow 0$ решение разностного уравнения (8)

с граничными условиями (9) сходится к решению дифференциального уравнения: $\max_D |u_h - u| \rightarrow 0$.

б) Если же в \bar{D} $\frac{\partial^2 u}{\partial x^4}$ и $\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$ непрерывны и граничное условие $u = \varphi$ на OAB переносится с точностью до ε на граничные точки Γ_h^+ сетки (т. е. если на Γ_h^+ имеем $|u_h - u| < \varepsilon$, где u — точное решение дифференциального уравнения), то имеет место оценка:

$$|u_h - u| \leq \varepsilon + \frac{10}{3} h^{\frac{4}{3}} NY,$$

где Y — то же, что в лемме 6,

$$N = \frac{3}{4} \max \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right| + \frac{Y^3}{12} \max \left| \frac{\partial^3 u}{\partial x^4} \right| + \frac{1}{3} \max \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^3} \right| + \frac{3}{16} Y \max \left| \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right|.$$

Доказательство. а) В силу равномерной непрерывности $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ в области \bar{D} и оценок (14), можно выбрать такое малое h_0 , что при $h < h_0$

$$|Lu - R_h u| < \varepsilon, \quad (27)$$

где u — решение уравнения $Lu = f$. Пусть u_h — решение уравнения (8) с граничными условиями (9). При $h \rightarrow 0$ точки множества Γ_h^+ приближаются к дуге OAB , поэтому при $h < h_1$

$$|u_h - u| < \varepsilon \text{ на } \Gamma_h^+. \quad (28)$$

Так как $Lu = R_h u_h = f$, то из (27) следует, что

$$|R_h(u_h - u)| < \varepsilon. \quad (29)$$

На OC $u_h - u = 0$, поэтому из (28) и (29), в силу теоремы 3, следует, что при $h < \min \{h_0, h_1\}$ в D_h

$$|u_h - u| < \varepsilon + \varepsilon \frac{M^2}{2},$$

что и требовалось доказать.

Утверждение б) доказывается тем же способом, только вместо теоремы 3 надо использовать лемму 6 и оценки (10) — (13) для $Lu - R_h u$.

ЛЕММА 7. Дана ограниченная односвязная область D_1 в полуплоскости $y \geq \eta_1$, где $\eta_1 > 0$. В D_1 определена непрерывная функция φ и построена сетка D_{h_1} ; Γ_{h_1} — граничные точки сетки (см. § 2). Тогда решение разностного уравнения (6) с граничным условием $u_h = \varphi$ на Γ_{h_1} равномерно сходится при $h \rightarrow 0$ к решению дифференциального уравнения (2) с граничным условием $u = \varphi$ на границе области D_1 .

Доказательства мы не приводим, так как утверждение леммы 7 является частным случаем известного утверждения о сходимости метода сеток для эллиптических уравнений второго порядка с переменными коэффициентами.

ЛЕММА 8. Дана область D_1 , ограниченная характеристиками OC и BC уравнения (2) и простой дугой $OKLB$, лежащей в полуплоскости $y > 0$. Предположим, что при некотором x_0 , заключенном между абсциссами точек O и B , дуга $OKLB$ имеет только одну общую точку с любой кривой вида $x - x_0 = Cy^{\frac{3}{2}}$ ($-\infty < C < +\infty$). Если существует решение задачи Трикоми (2) — (3) в области D , обладающее свойствами, указанными

в § 1, то решение разностного уравнения (8) — (9) сходится к нему при $h \rightarrow 0$.

Доказательство. В силу предположений об области D и о решении $u(x, y)$, функция

$$u_\alpha(x, y) = u(\alpha^3(x - x_0) + x_0, \alpha^2 y),$$

где $0 < \alpha < 1$, определена в \bar{D} , имеет в \bar{D} непрерывные $\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial y^2}$ и удовлетворяет уравнению вида (2) с заменой $f(x, y)$ на функцию

$$f_\alpha(x, y) \equiv \alpha^4 f(\alpha^3(x - x_0) + x_0, \alpha^2 y).$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ и такое α_1 , чтобы в \bar{D} при $\alpha_1 < \alpha < 1$

$$|u - u_\alpha| < \varepsilon. \quad (30)$$

Это возможно, так как в силу равномерной непрерывности $u(x, y)$ в \bar{D} $u_\alpha \rightarrow u$ при $\alpha \rightarrow 1$. Обозначим через $u_{\alpha h}$ решение разностного уравнения $R_h u_{\alpha h} = f_\alpha$ с граничным условием

$$u_{\alpha h} = u_\alpha \text{ на } \Gamma_h. \quad (31)$$

Докажем, что в D_h

$$|u_{\alpha h} - u_h| < 3\varepsilon, \quad (32)$$

где u_h — решение уравнения (8) с граничными условиями (9).

При достаточно малом h ($h < h_1$) имеем: $|u - u_h| < \varepsilon$ на Γ_h^+ , $u_h = u$ на OC . Отсюда, из (30) и (31) следует, что при $\alpha_1 < \alpha < 1$, $h < h_1$ имеем на Γ_h :

$$|u_{\alpha h} - u_h| < 2\varepsilon. \quad (33)$$

Оценим разность $g(u_\alpha - u)$, где g — то же, что в (20). По условию в окрестности точки O при $-\delta < y < 0$ имеем:

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| < \frac{\varepsilon}{16} |y|^{-\frac{3}{2}}, \quad \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| < \frac{\varepsilon}{16} |y|^{-1}. \quad (34)$$

В силу определения функции $u_\alpha(x, y)$ и неравенств (34), при $-\delta < y < 0$, $\alpha_2 < \alpha < 1$ имеем на OC :

$$\left| \frac{\partial u_\alpha(x, y)}{\partial x} \right| = \left| \alpha^3 \frac{\partial u(\alpha^3(x - x_0) + x_0, \alpha^2 y)}{\partial x} \right| < \frac{\varepsilon}{16} |y|^{-\frac{3}{2}}.$$

Аналогично оценивается $\frac{\partial u_\alpha}{\partial y}$. Из этих оценок и неравенств (34) получим, что на OC при $-\delta < y < 0$

$$\left| \frac{\partial(u_\alpha - u)}{\partial y} - \sqrt{-y} \frac{\partial(u_\alpha - u)}{\partial x} \right| < \frac{\varepsilon}{4} |y|^{-1}. \quad (35)$$

Теперь возьмем такое α_3 , чтобы на той части линии OC , где $y \leq -\delta$, при $\alpha_3 < \alpha < 1$ было также выполнено неравенство (35); это возможно в силу непрерывности $\frac{\partial u}{\partial y} - \sqrt{-y} \frac{\partial u}{\partial x}$ на этой части OC .

Из (30) и (35) следует, в силу (20) и (21), что на OC

$$|g(u_\alpha - u)| < 2\varepsilon. \quad (36)$$

При $\alpha \rightarrow 1$ имеем $f_\alpha \rightarrow f$, поэтому при $\alpha_4 < \alpha < 1$

$$|R_h(u_{\alpha h} - u_h)| < \frac{\varepsilon}{M^2}, \quad (37)$$

где M — то же, что в (25).

Возьмем $\alpha_5 > \max\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$, $\alpha_5 < 1$, $h < h_1$. Тогда из (33), (36) и (37), в силу теоремы 3, следует неравенство (32).

В области \bar{D} $\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial y^2}$ непрерывны, поэтому, в силу теоремы 4 а), при $\alpha = \alpha_5$, $h < h_2$ получаем:

$$|u_\alpha - u_{\alpha h}| < \varepsilon. \quad (38)$$

Взяв $\alpha = \alpha_5$, $h < \min\{h_1, h_2\}$, получим из (30), (32) и (38), что $u - u_h < 5\varepsilon$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 5. Пусть в области D (такой же, как в § 1) существует решение дифференциального уравнения (2) с граничными условиями (3), обладающее свойствами, указанными в § 1. Тогда при $h \rightarrow 0$ решение разностного уравнения (8) — (9) равномерно сходится к решению дифференциального уравнения.

Доказательство. Отрезком KL , параллельным OB , разделим область D на две части так, чтобы одна из них (область $COKLB$) удовлетворяла условиям леммы 8. Это возможно в силу условий, которым удовлетворяет дуга OAB вблизи точек O и B . Проведем отрезок MN , параллельный OB ; точка M лежит на OK , N — на BL (рис. 3). Обозначим область $COKLB$ через D_1 , $MKALNM$ — через D_2 , соответствующие сетчатые области — через D_{h1} и D_{h2} . Граничные точки D_{h1} разобьем на два множества: Γ_{h1} и Γ_{KL} , где Γ_{h1} — точки, являющиеся граничными одновременно для D_{h1} и для D_h , Γ_{KL} — остальные граничные точки D_{h1} (они расположены на одной прямой, параллельной KL или совпадающей с ней). Аналогично, $\Gamma_{h2} + \Gamma_{MN}$ — граничные точки D_{h2} . Пусть h столь

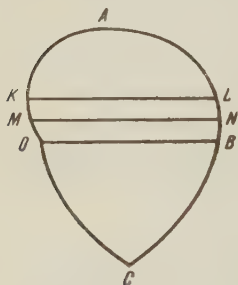


Рис. 3

мало, что диаметр ячейки сетки меньше $\frac{d}{4}$, где d — расстояние между KL и MN . Тогда расстояние между Γ_{KL} и Γ_{MN} больше $\frac{d}{2}$.

Пусть u и u_h — решения уравнений (2) — (3) и (8) — (9) в областях D и D_h ; $v_h^{(0)}$ и $w_h^{(0)}$ — решения уравнения (8) в областях D_{h1} и D_{h2} с граничными условиями $v_h^{(0)} = u_h$ на Γ_{h1} , $v_h^{(0)} = u$ на Γ_{KL} ; $w_h^{(0)} = u_h$ на Γ_{h2} , $w_h^{(0)} = u$ на Γ_{MN} . Согласно леммам 7 и 8, имеем:

$$|v_h^{(0)} - u| \leq \varepsilon(h) \text{ в } D_{h1}, \quad |w_h^{(0)} - u| \leq \varepsilon(h) \text{ в } D_{h2}, \quad (39)$$

где $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.

Покажем, что решение u_h может быть получено из $v_h^{(0)}$ и $w_h^{(0)}$ при помощи альтернирующего метода и что оно мало отличается от u при малых h .

Построим две последовательности решений $v_h^{(i)}$ и $w_h^{(i)}$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) разностного уравнения (8). При $i = 0$ эти решения уже построены; пусть при $i > 0$

$$\left. \begin{aligned} R_h v_h^{(i)} &= f \text{ в } D_{h1}, & v_h^{(i)} &= u_h \text{ на } \Gamma_{h1}, & v_h^{(i)} &= w_h^{(i-1)} \text{ на } \Gamma_{KL}, \\ R_h w_h^{(i)} &= f \text{ в } D_{h2}, & w_h^{(i)} &= u_h \text{ на } \Gamma_{h2}, & w_h^{(i)} &= v_h^{(i)} \text{ на } \Gamma_{MN}. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Покажем, что при $i \geq 0$

$$|v_h^{(i+1)} - v_h^{(i)}| \leq 2q^i \cdot \varepsilon(h) \text{ в } D_{h1}, \quad |w_h^{(i+1)} - w_h^{(i)}| \leq 2q^{i+1} \cdot \varepsilon(h) \text{ в } D_{h2}, \quad (41)$$

где $q < 1$, q не зависит от h .

Пусть $i = 0$. Имеем:

$$\begin{aligned} R_h (v_h^{(1)} - v_h^{(0)}) &\equiv 0 \text{ в } D_{h1}, & v_h^{(1)} - v_h^{(0)} &= 0 \text{ на } \Gamma_{h1}, \\ |v_h^{(1)} - v_h^{(0)}| &= |w_h^{(0)} - u| \leq \varepsilon(h) \text{ на } KL. \end{aligned}$$

В силу теоремы 3,

$$|v_h^{(1)} - v_h^{(0)}| \leq \varepsilon(h) \text{ в } D_{h1}.$$

Далее, на Γ_{MN}

$$|w_h^{(1)} - w_h^{(0)}| = |v_h^{(1)} - u| \leq |v_h^{(1)} - v_h^{(0)}| + |v_h^{(0)} - u| \leq 2\varepsilon(h),$$

на Γ_{h2}

$$w_h^{(1)} - w_h^{(0)} = 0,$$

в D_{h2}

$$R_h (w_h^{(1)} - w_h^{(0)}) \equiv 0.$$

В силу леммы 1, в D_{h2}

$$|w_h^{(1)} - w_h^{(0)}| \leq 2\varepsilon(h).$$

Итак, неравенства (41) доказаны при $i = 0$. Докажем по индукции что они справедливы при любом i , если взять $q = 1 - \frac{d}{2Y_2}$, Y_2 — то же, что в § 3. Пусть

$$|v_h^{(i)} - v_h^{(i-1)}| \leq 2q^{i-1} \varepsilon(h) \text{ в } D_{h1}, \quad |w_h^{(i)} - w_h^{(i-1)}| \leq 2q^{i-1} \varepsilon(h) \text{ в } D_{h2}. \quad (42)$$

Рассмотрим две функции:

$$z_{1,2} = \pm (w_h^{(i)} - w_h^{(i-1)}) - \left(1 - \frac{(y - y_h)}{Y_2}\right) 2q^{i-1} \varepsilon(h),$$

где y_h — ордината точек множества Γ_{MN} . Так как на Γ_{h2} $w_h^{(i)} - w_h^{(i-1)} = 0$, а на Γ_{MN} имеет место (42), то на $\Gamma_{h2} + \Gamma_{MN}$ $z_1 \leq 0$, $z_2 \leq 0$. В D_{h2} имеем:

$$R_h z_1 \equiv R_h z_2 \equiv 0.$$

В силу леммы 1, в D_{h2} $z_1 \leq 0$, $z_2 \leq 0$. Следовательно, в D_{h2}

$$|w_h^{(i)} - w_h^{(i-1)}| \leq \left(1 - \frac{(y - y_h)}{Y_2}\right) 2q^{i-1} \varepsilon(h).$$

В частности, на Γ_{KL} имеем:

$$y - y_h > \frac{d}{2},$$

поэтому на Γ_{KL} —

$$|w_h^{(i)} - w_h^{(i-1)}| \leq 2q^i \varepsilon(h).$$

Значит, на Γ_{KL}

$$|v_h^{(i+1)} - v_h^{(i)}| \leq 2q^i \varepsilon(h). \quad (43)$$

Так как на Γ_{h1}

$$v_h^{(i+1)} - v_h^{(i)} = 0,$$

а в D_{h1}

$$R_h(v_h^{(i+1)} - v_h^{(i)}) \equiv 0,$$

то, в силу теоремы 3, неравенство (43) имеет место в D_{h1} .

Теперь, согласно (40), на Γ_{h2} имеем

$$w_h^{(i+1)} - w_h^{(i)} = 0,$$

на Γ_{MN} —

$$|w_h^{(i+1)} - w_h^{(i)}| \leq 2q^i \varepsilon(h), \quad (44)$$

а в D_{h2} —

$$R_h(w_h^{(i+1)} - w_h^{(i)}) \equiv 0.$$

В силу леммы 1, отсюда следует, что (44) имеет место в D_{h2} .

Итак, из (42) следует (41). Значит, неравенства (41) справедливы при любом i .

Из (41) следует существование пределов:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} v_h^{(i)} = v_h^\infty, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} w_h^{(i)} = w_h^\infty.$$

В силу (40), $R_h v_h^\infty = f$ в D_{h1} , $R_h w_h^\infty = f$ в D_{h2} , $v_h^\infty = w_h^\infty$ в граничных точках области $MKLN$. Следовательно, $v_h^\infty = w_h^\infty$ и во всей области $MKLN$. Функция, равная v_h^∞ в D_{h1} и w_h^∞ в D_{h2} , удовлетворяет во всей области D_h уравнению (8) и граничным условиям (9). Следовательно, она совпадает с u_h .

Чтобы оценить разность $u_h - u$, просуммируем неравенства (41) по i от 0 до ∞ . Мы получим:

$$|v_h^\infty - v_h^{(0)}| \leq \frac{2\varepsilon(h)}{1-q}, \quad |w_h^\infty - w_h^{(0)}| \leq \frac{2\varepsilon(h)}{1-q}. \quad (45)$$

Из (39) и (45) следует, что в D_h

$$|u_h - u| \leq \left(\frac{2}{1-q} + 1 \right) \varepsilon(h) = \left(\frac{4Y_2}{d} + 1 \right) \varepsilon(h).$$

При $h \rightarrow 0$ имеем $u_h \rightarrow u$.

Как следствие из теорем 3 и 5, можно получить известные оценки решения задачи Трикоми для дифференциального уравнения (2).

Если область D и решение u удовлетворяют требованиям, высказанным в § 1, то в области D

$$\min \{\varphi, \psi, g(\psi)\} - \frac{1}{2} K_2 M^2 \leq u \leq \max \{\varphi, \psi, g(\psi)\} + \frac{1}{2} K_1 M^2,$$

где K_1, K_2, M и $g(\psi)$ — то же, что в (25) и (20).

Более точные оценки получены в (3).

Поступило
3. XII. 1955

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Карманов В. Г., Об одной граничной задаче для уравнения смешанного типа, Доклады Ак. наук СССР, 95 (1954), 439—442.
- ² Халилов З. И., Решение задачи для уравнения смешанного типа методом сеток, Доклады Ак. наук Азерб. ССР, 9, № 4 (1953), 189—194.
- ³ Бабенко К. И., К теории уравнений смешанного типа, Докторская диссертация, Москва, 1951.

А. А. ТЕМЛЯКОВ

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ДВУХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым)

В работе устанавливается свойство функций, «аналитических изнутри», в двоякокруговой замкнутой области \bar{D} : значения функции $F(w, z)$ в области D определяются значениями оператора

$$L[fF] \equiv fF + w(fF)'_w + z(fF)'_z$$

на границе области \bar{D} , если известна функция $f(w, z)$ в этой области.

В настоящей работе в качестве областей определения функций двух комплексных переменных рассматриваются двоякокруговые области. Функция $F(w, z)$, определенная в какой-либо из этих областей \bar{D} (замкнутой), предполагается взятой из класса функций, аналитических в области D и «аналитических изнутри в замкнутой области \bar{D} ». Выделяемый класс функций включает в себя класс аналитических функций в замкнутой области \bar{D} и содержится в классе функций, аналитических в области D и непрерывных в замкнутой области \bar{D} .

В работе устанавливается свойство, присущее функциям этого класса: значения функции $F(w, z)$ в области D определяются значениями линейного дифференциального оператора:

$$L[F] \equiv F(w, z) + wF'_w(w, z) + zF'_z(w, z) \equiv \Phi(w, z)$$

на границе области \bar{D} . Из этого свойства следует и более общее предположение: если известна функция рассматриваемого класса $f(w, z)$ в области \bar{D} , то значения функции $F(w, z)$ в области D определяются значениями оператора $L[fF]$ на границе области \bar{D} .

Так как всякая функция $F(w, z)$ рассматриваемого класса может быть представлена в виде:

$$F(w, z) = F(0, 0) + F_1(w, z) + F_2(w, z),$$

где $F_1(0, z) = 0$ и $F_2(w, 0) = 0$, то устанавливается еще одно свойство функций этого класса: значения функции $F(w, z)$ в области D определяются значением ее в центре области D и значениями операторов

$$w \frac{\partial F_k}{\partial w} + z \frac{\partial F_k}{\partial z}, \quad k = 1, 2,$$

на границе области \bar{D} .

Определение. Возьмем двоякокруговую область D , являющуюся подобластью некоторой области регулярности, ограниченную неаналити-

ческими гиперповерхностями $|w| = r_1(\tau)$, $|z| = r_2(\tau)$, $0 \leq \tau \leq 1$, где

$$r_1(0) = 0, \quad 0 < r_1'(\tau) \leq \frac{r_1(\tau)}{\tau}, \quad r_1(1) < \infty,$$

$$r_2(\tau) = \exp - \int_0^\tau \frac{\tau}{1-\tau} d \ln r_1(\tau),$$

и функцию $F(w, z)$, определенную в замкнутой области \bar{D} .

Формулы, определяющие функции $r_1(\tau)$, $r_2(\tau)$, выражают следующее требование: кривая, определяемая уравнениями

$$x = r_1(\tau), \quad y = r_2(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq 1,$$

есть огибающая семейства прямых, заданного уравнением

$$\tau \frac{x}{r_1(\tau)} + (1-\tau) \frac{y}{r_2(\tau)} = 1, \quad 0 \leq \tau \leq 1,$$

и расположена под огибаемой.

Пусть $F(w, z)$ — аналитическая функция в области D и функции $F(w, z)$, $F'_w(w, z)$, $F'_z(w, z)$ непрерывны в замкнутой области \bar{D} . Здесь под производными $F'_w(w_0, z_0)$, $F'_z(w_0, z_0)$ в граничной точке (w_0, z_0) области D понимаются, соответственно,

$$\lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{F(w_0 + \Delta w, z_0) - F(w_0, z_0)}{\Delta w}, \quad \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(w_0, z_0 + \Delta z) - F(w_0, z_0)}{\Delta z},$$

если точки $(w_0 + \Delta w, z_0)$, $(w_0, z_0 + \Delta z)$ принадлежат замкнутой области \bar{D} . Функции, удовлетворяющие этим условиям, назовем функциями класса α .

Следствие 1. Если функция $F(w, z)$ принадлежит классу α , то функция $\Phi(w, z) = L[F]$ является аналитической в области D и непрерывной в замкнутой области \bar{D} .

ТЕОРЕМА. Если функция $F(w, z)$ принадлежит классу α , то для точки $(w, z) \in D$

$$F(w, z) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 d\tau \int_C \frac{\Phi[r_1(\tau)\zeta, r_2(\tau)\eta] d\zeta}{\zeta - u}, \quad (1)$$

где C — окружность $|\zeta| = 1$, $\eta = \zeta e^{-it}$, $u = \tau \frac{w}{r_1(\tau)} + (1-\tau) \frac{z}{r_2(\tau)} e^{it}$.

Эта формула устанавливает свойство, присущее функциям класса α : значения функции $F(w, z)$ в области D определяются поведением линейного дифференциального оператора $L[F] = \Phi(w, z)$ на границе области \bar{D} .

Доказательство. Пусть точка $(w, z) \in D$. Рассмотрим двоякоокруговую замкнутую подобласть \bar{D}' области D , ограниченную гиперповерхностями $|w| = \rho r_1(\tau)$, $|z| = \rho r_2(\tau)$, $0 < \rho < 1$, где ρ выбрано так, что точка $(w, z) \in D'$. Так как функция $F(w, z)$ регулярна в области \bar{D}' (область $\bar{D}' \subseteq D$), содержащей свой центр $(0, 0)$, то в этой области функция $F(w, z)$ может быть представлена равномерно сходящимся рядом [см. (1)]

$$F(w, z) = \sum_{k, l=0}^{\infty} a_{kl} w^k z^l.$$

Непосредственным подсчетом убеждаемся, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 \frac{d}{du} [u(r_1(\tau)u)^k (r_2(\tau)v)^l] d\tau = w^k z^l,$$

где числа k, l — любые положительные целые и

$$u = \tau \frac{w}{r_1(\tau)} + (1 - \tau) \frac{z}{r_2(\tau)} e^{it}, \quad v = u e^{-it}.$$

Принимая во внимание, что для любой точки $(w, z) \in D'$

$$|v| = |u| \leq \tau \frac{|w|}{r_1(\tau)} + (1 - \tau) \frac{|z|}{r_2(\tau)} < \rho, \quad 0 \leq \tau \leq 1,$$

и, в силу этого, при любых значениях параметров t и τ , где $0 \leq t \leq 2\pi$, $0 \leq \tau \leq 1$, точка $(r_1(\tau)u, r_2(\tau)v) \in \bar{D}'$, имеем:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 \frac{d}{du} [u F(r_1(\tau)u, r_2(\tau)v)] d\tau = F(w, z),$$

или

$$F(w, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 \Phi[r_1(\tau)u, r_2(\tau)v] d\tau.$$

Но функция $\Phi[r_1(\tau)u, r_2(\tau)v]$ при произвольных фиксированных значениях параметров t и τ — аналитическая функция переменного u в круге $|u| \leq \rho$. Поэтому

$$\Phi[r_1(\tau)u, r_2(\tau)v] = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\Phi[r_1(\tau)\zeta_1, r_2(\tau)\eta_1]}{\zeta_1 - u} d\zeta_1$$

и, следовательно,

$$F(w, z) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 d\tau \int_C \frac{\Phi[r_1(\tau)\zeta_1, r_2(\tau)\eta_1]}{\zeta_1 - u} d\zeta_1,$$

где $\zeta_1 = \rho e^{i\theta}$, C — окружность $|\zeta_1| = 1$ и $\eta_1 = \zeta_1 e^{-it}$.

Оценим разность

$$I = F(w, z) - \frac{1}{4\pi^2 i} \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 d\tau \int_C \frac{\Phi[r_1(\tau)\zeta, r_2(\tau)\eta]}{\zeta - u} d\zeta.$$

Мы имеем:

$$\begin{aligned} |I| &= \frac{1}{4\pi^2} \left| \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 d\tau \int_C \frac{\Phi[r_1(\tau)\zeta_1, r_2(\tau)\eta_1]}{\zeta_1 - u} d\zeta_1 - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 d\tau \int_C \frac{\Phi[r_1(\tau)\zeta, r_2(\tau)\eta]}{\zeta - u} d\zeta \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 d\tau \int_C \frac{|\Phi[r_1(\tau)\zeta_1, r_2(\tau)\eta_1] - \Phi[r_1(\tau)\zeta, r_2(\tau)\eta]|}{|\zeta_1 - u|} |d\zeta| + \\ &\quad + \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 d\tau \int_C \frac{|\zeta - \zeta_1| |\Phi[r_1(\tau)\zeta, r_2(\tau)\eta]|}{|\zeta_1 - u| |\zeta - u|} |d\zeta|. \end{aligned}$$

Учитывая, что точка $(w, z) \in D'$, а поэтому $\max |u| < \rho$, получаем:

$$\begin{aligned} |I| &< \frac{\max |\Phi[r_1(\tau)\zeta_1, r_2(\tau)\eta_1] - \Phi[r_1(\tau)\zeta, r_2(\tau)\eta]|}{\rho - \max |u|} + \\ &\quad + \frac{M(1 - \rho)}{(\rho - \max |u|)(1 - \max |u|)}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $M = \max |\Phi(w, z)|$. В силу равномерной непрерывности функции $\Phi(w, z)$ в замкнутой области \bar{D} ,

$$\max |\Phi[r_1(\tau)\zeta_1, r_2(\tau)\eta_1] - \Phi[r_1(\tau)\zeta, r_2(\tau)\eta]|$$

может быть сделан при стремлении ρ к 1 сколь угодно малым. Следовательно, правая часть неравенства (2) стремится к нулю при стремлении ρ к 1. Но так как I не зависит от ρ , то $I = 0$, т. е. справедлива формула (1).

Следствие 2. Если $F(0, z) = 0$ или $F(w, 0) = 0$, то для $(w, z) \in D$

$$F(w, z) = \frac{w}{4\pi^2 i} \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 d\tau \int_C \frac{\Phi_1[r_1(\tau)\zeta, r_2(\tau)\eta]}{\zeta - u} d\zeta, \quad \Phi_1(w, z) = \frac{1}{w} (wF'_w + zF'_z)$$

или

$$F(w, z) = \frac{z}{4\pi^2 i} \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 d\tau \int_C \frac{\Phi_2[r_1(\tau)\zeta, r_2(\tau)\eta]}{\zeta - u} d\zeta, \quad \Phi_2(w, z) = \frac{1}{z} (wF'_w + zF'_z),$$

т. е. значения функции $F(w, z)$ во всякой точке $(w, z) \in D$ определяются поведением линейного дифференциального оператора $wF'_w(w, z) + zF'_z(w, z)$ на границе области \bar{D} . Это следует из формулы (1), если в ней вместо функции $F(w, z)$ взять функцию $w^{-1}F(w, z)$ или функцию $z^{-1}F(w, z)$.

Следствие 3. Так как всякая функция класса α может быть представлена в виде:

$$F(w, z) = F(0, 0) + F_1(w, z) + F_2(w, z),$$

где $F_1(0, z) = 0$ и $F_2(w, 0) = 0$, то для $(w, z) \in D$

$$F(w, z) = F(0, 0) + \frac{w}{4\pi^2 i} \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 d\tau \int_C \frac{\Phi_1[r_1(\tau)\zeta, r_2(\tau)\eta]}{\zeta - u} d\zeta + \\ + \frac{z}{4\pi^2 i} \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 d\tau \int_C \frac{\Phi_2[r_1(\tau)\zeta, r_2(\tau)\eta]}{\zeta - u} d\zeta,$$

$$\text{где } \Phi_1(w, z) = w^{-1} \left(w \frac{\partial F_1}{\partial w} + z \frac{\partial F_1}{\partial z} \right), \quad \Phi_2(w, z) = z^{-1} \left(w \frac{\partial F_2}{\partial w} + z \frac{\partial F_2}{\partial z} \right).$$

Эта формула устанавливает, что значение функции $F(w, z)$ в точке $(w, z) \in D$ определяется значением ее в центре области D и значениями операторов $w \frac{\partial F_k}{\partial w} + z \frac{\partial F_k}{\partial z}$, $k = 1, 2$, на границе области \bar{D} .

Следствие 4. Если известно поведение линейного дифференциального оператора $L[fF] = \Phi(w, z)$ на границе области \bar{D} и известна функция $f(w, z)$ в области \bar{D} , то функция $F(w, z)$ в каждой точке $(w, z) \in D$ определяется формулой

$$f(w, z) F(w, z) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 d\tau \int_C \frac{\Phi[r_1(\tau)\zeta, r_2(\tau)\eta]}{\zeta - u} d\zeta.$$

Поступило
7. I. 1956

ЛИТЕРАТУРА

¹ Cartan H., Les fonctions de deux variables complexes et problème de la représentation analytique, Journ. Math. pures et appl., 10 (1931), 1—114.

С. Б. СТЕЧКИН

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ФУРЬЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым)

В работе исследуется, при каких ограничениях на систему неотрицательных функций $\{\Phi_n(u)\}$ существует непрерывная функция периода 2π

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \cos(nx - \alpha_n) \quad (\rho_n \geq 0),$$

для которой $\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\rho_n) = \infty$.

Введение

Начало качественному исследованию поведения коэффициентов Фурье непрерывных периодических функций

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \cos(nx - \alpha_n),$$

где $\rho_n \geq 0$, было положено Карлеманом ⁽⁴⁾ в 1918 г. Карлеман показал, что существует такая непрерывная функция $f(x)$, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^{2-\varepsilon} = \infty$$

для любого $\varepsilon > 0$.

Эти исследования Карлемана были продолжены многими авторами: Гронваллем ⁽⁵⁾, Банахом ⁽³⁾, Сидоном ⁽⁸⁾, Палеем ⁽⁷⁾, Стечкиным ⁽²⁾ см. также ⁽¹⁾, §§ 5.34, 9.604].

В настоящей работе рассматривается следующая задача. Пусть система функций $\{\Phi_n(u)\}$ удовлетворяет условиям:

$$\Phi_n(u) \geq 0 \quad (u \geq 0), \quad \Phi_n(u) \uparrow, \quad u^{-2} \Phi_n(u) \downarrow. \quad (0.1)$$

При каких дальнейших ограничениях на эту систему существует непрерывная периодическая функция $f(x)$, для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\rho_n) = \infty? \quad (0.2)$$

Оказывается, что если функции $\Phi_n(u)$ ведут себя достаточно правильно, то искомая функция $f(x)$ существует в том и только том случае, если

найдется числовая последовательность $\{r_n\}$, удовлетворяющая условиям:

$$r_n \geq 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} r_n^2 < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(r_n) = \infty. \quad (0.3)$$

Поскольку это не вызывает дополнительных осложнений, мы рассматриваем также аналогичную задачу о существовании функции

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

регулярной в круге $|z| < 1$ и непрерывной в замкнутом круге $|z| \leq 1$, для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(|c_n|) = \infty \quad (0.4)$$

(в дальнейшем указанный класс функций $F(z)$ обозначается через C).

Очевидно, условия, необходимые для существования непрерывной периодической функции $f(x)$, удовлетворяющей условию (0.2), будут одновременно необходимы для существования функции $F(z) \in C$, обладающей свойством (0.4). В самом деле, если существует функция $F(z) \in C$, для которой имеет место (0.4), то тем более существует непрерывная периодическая функция $f(x)$ с расходящимся рядом $\sum \Phi_n(\rho_n)$. Это сразу вытекает из того, что если положить

$$f(x) = \operatorname{Re} F(e^{ix}),$$

то будем иметь

$$\rho_n = |c_n|.$$

План работы таков. В § 1 даются необходимые и достаточные условия существования числовой последовательности $\{r_n\}$, обладающей свойствами (0.3). § 2 посвящен некоторым вспомогательным неравенствам. В § 3 доказывается основная теорема; при этом мы существенно опираемся на результаты нашей работы (2). Наконец, в § 4 мы показываем, что все результаты, полученные ранее в том же направлении, являются частными случаями нашей теоремы.

§ 1. Теорема о числовых рядах

В качестве подготовки к более трудной задаче о расходимости рядов, зависящих от коэффициентов Фурье или коэффициентов Тейлора непрерывных функций, рассмотрим аналогичную задачу для числовых рядов. Именно, зададим систему неотрицательных функций $\{\Phi_n(u)\}$ и исследуем вопрос о том, когда существует числовая последовательность $\{r_n\}$, удовлетворяющая условиям:

$$r_n \geq 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} r_n^2 < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(r_n) = \infty. \quad (1.1)$$

Очевидно, эта задача эквивалентна следующей: когда суще-

ствует функция $f(x) \in L^2$, для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\rho_n) = \infty, \quad (1.2)$$

или же функция $F(z) \in H^2$, для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(|c_n|) = \infty? \quad (1.3)$$

Поскольку для любой непрерывной периодической функции $f(x)$

$$\rho_n \geq 0 \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^2 < \infty,$$

то ясно, что условия, необходимые для существования последовательности $\{r_n\}$, будут одновременно необходимы для существования непрерывной периодической функции $f(x)$, для которой имеет место (1.2), и тем более необходимы для существования $F(z) \in C$, для которой выполняется (1.3).

Мы получим решение поставленной задачи в предположении, что система функций $\{\Phi_n(u)\}$ удовлетворяет условиям (0.1); при этом не исключается, что $\Phi_n(u) \equiv 0$ для некоторых номеров n .

Введенные в этом параграфе обозначения сохраняются на протяжении всей работы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть

$$\Phi_n(u) \geq 0 \quad (u \geq 0), \quad \Phi_n(u) \uparrow, \quad u^{-2}\Phi_n(u) \downarrow \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1.4)$$

Для того чтобы существовала последовательность $\{r_n\}$, удовлетворяющая условиям (1.1), необходимо и достаточно, чтобы система функций $\{\Phi_n(u)\}$ удовлетворяла следующему условию (A):

для любого $\xi > 0$ расходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2(\xi), \quad (1.5)$$

где $u_n(\xi)$ есть наибольший корень уравнения

$$\Phi_n(u_n(\xi)) = \xi u_n^2(\xi). \quad (1.6)$$

Сделаем несколько замечаний относительно определения чисел $u_n(\xi)$. Если для некоторых n и ξ

$$\lim_{u \rightarrow +0} u^{-2} \Phi_n(u) \leq \xi,$$

то мы полагаем $u_n(\xi) = 0$; если же для некоторых n и ξ

$$\lim_{u \rightarrow \infty} u^{-2} \Phi_n(u) \geq \xi,$$

то, по определению, $u_n(\xi) = \infty$ и $\sum u_n^2(\xi) = \infty$. Таким образом, строго говоря, формула (1.6) имеет место лишь в том случае, если

$$\lim_{u \rightarrow +0} u^{-2} \Phi_n(u) > \xi > \lim_{u \rightarrow \infty} u^{-2} \Phi_n(u).$$

Однако мы будем формально считать, что она справедлива и в перечисленных выше исключительных случаях.

В силу последнего условия (1.4), функция $u_n(\xi)$ является невозрастающей функцией от ξ при любом фиксированном n . Поэтому условие (A) равносильно утверждению, что существуют сколь угодно большие ξ , для которых расходится ряд (1.5). Дальнейшие замечания, относящиеся к условию (A), будут сделаны в конце этого параграфа.

Доказательство. Необходимость. Пусть для некоторого $\xi > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2(\xi) < \infty. \quad (1.7)$$

Зафиксируем произвольно последовательность $\{r_n\}$, удовлетворяющую условиям

$$r_n \geq 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} r_n^2 < \infty, \quad (1.8)$$

и покажем, что для нее

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(r_n) < \infty.$$

Для каждого номера n либо $r_n \leq u_n(\xi)$, либо $r_n > u_n(\xi)$. В первом случае, в силу условий $\Phi_n(u) \uparrow$ и (1.6), имеем:

$$\Phi_n(r_n) \leq \Phi_n(u_n(\xi)) = \xi u_n^2(\xi),$$

а во втором, в силу $u^{-2} \Phi_n(u) \uparrow$ и (1.6), —

$$\Phi_n(r_n) = r_n^2 \frac{\Phi_n(r_n)}{r_n^2} \leq r_n^2 \frac{\Phi_n(u_n(\xi))}{u_n^2(\xi)} = \xi r_n^2.$$

Таким образом, в обоих случаях

$$\Phi_n(r_n) \leq \xi \{r_n^2 + u_n^2(\xi)\},$$

откуда, учитывая (1.7) и (1.8), получаем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(r_n) \leq \xi \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} r_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2(\xi) \right\} < \infty,$$

и необходимость доказана.

Достаточность. Пусть выполняется условие (A). Покажем, что существует последовательность $\{r_n\}$, удовлетворяющая всем условиям (1.1).

Расходимость ряда (1.5) может быть обусловлена двумя причинами: 1) может оказаться, что для любого $\xi > 0$ существуют такие номера n , для которых $u_n(\xi) = \infty$, и 2) может оказаться, что для всех достаточно больших ξ

$$u_n(\xi) < \infty \quad (n=1, 2, \dots), \quad \text{но} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2(\xi) = \infty. \quad (1.9)$$

Первый случай сравнительно прост. Прежде всего отметим, что если для любого $\xi > 0$ существуют номера n , для которых $u_n(\xi) = \infty$, то таких номеров бесконечно много. Это сразу вытекает из того, что при любом фиксированном номере n $u_n(\xi)$ есть невозрастающая функция от ξ и $u_n(\xi) < \infty$ при $\xi \geq \xi(n)$. Далее, найдем возрастающую последовательность номеров $\{n_k\}$, для которой

$$u_{n_k}(k) = \infty \quad (k=1, 2, \dots).$$

В силу сделанного выше соглашения это означает, что

$$\lim_{u \rightarrow \infty} u^{-2} \Phi_{n_k}(u) \geq k,$$

откуда, поскольку $u^{-2} \Phi_n(u) \downarrow$,

$$\Phi_{n_k}(u) \geq ku^2 \quad (u \geq 0; \quad k = 1, 2, \dots). \quad (1.10)$$

Наконец, положим

$$r_{n_k} = \frac{1}{k} \quad (k = 1, 2, \dots), \quad r_n = 0 \quad (n \neq n_k).$$

Тогда будем иметь $r_n \geq 0$ ($n = 1, 2, \dots$) и

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n^2 = \sum_{k=1}^{\infty} r_{n_k}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} < \infty.$$

Кроме того, в силу (1.10),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(r_n) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_{n_k}(r_{n_k}) \geq \sum_{k=1}^{\infty} k r_{n_k}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} = \infty.$$

Переходим к рассмотрению второго случая. Итак, пусть выполняются условия (1.9). Положим

$$g_n = \Phi_n(+0) = \lim_{u \rightarrow +0} \Phi_n(u).$$

Снова возможны два случая:

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n = \infty \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} g_n < \infty.$$

Первый из этих случаев почти тривиален. В самом деле, пусть $\{r_n\}$ — произвольная последовательность, удовлетворяющая условиям

$$r_n > 0 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} r_n^2 < \infty.$$

В силу монотонности функций $\Phi_n(u)$ получаем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(r_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(+0) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n = \infty.$$

Остается рассмотреть основной случай, когда выполняются условия (1.9) и условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n < \infty.$$

Поскольку отбрасывание конечного числа первых членов не влияет на сходимость и расходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(r_n),$$

мы имеем право предполагать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n < 1. \quad (1.11)$$

Изучим некоторые простейшие свойства функций $\Phi_n(u)$ и $u_n(\xi)$. Прежде всего, при любом $n=1, 2, \dots$ функция $\Phi_n(u)$ непрерывна для всех $u > 0$. В самом деле, если $\Phi(u) \uparrow$, $u^{-2} \Phi(u) \downarrow$ и, например, $0 < u < v$, то

$$\Phi(u) \leq \Phi(v) \leq \frac{v^2}{u^2} \Phi(u) = \Phi(u) + \frac{v^2 - u^2}{u^2} \Phi(u) \leq \Phi(u) + \varepsilon,$$

если только $v \leq u + \eta(\varepsilon)$. Аналогично рассматривается случай $0 < v < u$. Отсюда и из условия $u^{-2} \Phi_n(u) \uparrow$ вытекает, что функция

$$\xi = \xi_n(u) = u^{-2} \Phi_n(u)$$

непрерывна и не возрастает при $u > 0$. Обратная функция $u_n = u_n(\xi)$ не возрастает и стремится к 0 при $\xi \rightarrow \infty$. Кроме того, функция $u_n(\xi)$ непрерывна слева, и если в точке ξ_0 она имеет разрыв, т. е.

$$u_n(\xi_0 + 0) = \lim_{\xi \rightarrow \xi_0 + 0} u_n(\xi) < u_n(\xi_0),$$

то для любого u , удовлетворяющего условиям

$$u_n(\xi_0 + 0) \leq u \leq u_n(\xi_0),$$

выполняется соотношение:

$$u^{-2} \Phi_n(u) = \xi_0. \quad (1.12)$$

Переходим к построению искомой последовательности $\{r_n\}$. Положим $n_0 = 0$ и построим индуктивно возрастающую последовательность номеров $\{n_k\}$. Именно, если числа n_0, \dots, n_{k-1} уже определены, то положим n_k равным наименьшему натуральному числу, для которого

$$\sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} \Phi_n(u_n(k^2)) \geq 1. \quad (1.13)$$

Так как

$$\sum_{n=n_{k-1}+1}^{\infty} \Phi_n(u_n(k^2)) = k^2 \sum_{n=n_{k-1}+1}^{\infty} u_n^2(k^2) = \infty,$$

то такое число заведомо существует.

В силу условий $u_n(\eta) \rightarrow 0$ ($\eta \rightarrow \infty$) и (1.11), получаем, что

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} \Phi_n(u_n(\eta)) = \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} g_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} g_n < 1.$$

Отсюда и из (1.13), учитывая, что функции $u_n(\eta)$ непрерывны слева, выводим существование такого числа $\eta_k \geq k^2$, для которого

$$\sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} \Phi_n(u_n(\eta_k + 0)) \leq 1 \leq \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} \Phi_n(u_n(\eta_k)). \quad (1.14)$$

В силу непрерывности функций $\Phi_n(u)$ отсюда вытекает, что существуют числа $u_n^*(\eta_k)$, удовлетворяющие условиям:

$$u_n(\eta_k + 0) \leq u_n^*(\eta_k) \leq u_n(\eta_k) \quad (n_{k-1} < n \leq n_k) \quad (1.15)$$

$$\sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} \Phi_n(u_n^*(\eta_k)) = 1. \quad (1.16)$$

Согласно (1.12) и (1.15), для них

$$\Phi_n(u_n^*(\eta_k)) = \eta_k u_n^{*2}(\eta_k) \quad (n_{k-1} < n \leq n_k). \quad (1.17)$$

Наконец, положим

$$r_n = u_n^*(\eta_k) \quad (n_{k-1} < n \leq n_k; \quad k = 1, 2, \dots). \quad (1.18)$$

При таком выборе последовательности $\{r_n\}$ имеем, в силу (1.17), (1.16) и оценки $\eta_k \geq k^2$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} r_n^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} r_n^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} u_n^{*2}(\eta_k) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k^{-1} \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} \Phi_n(u_n^*(\eta_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k^{-1} \leq \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} < \infty. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(r_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} \Phi_n(u_n^*(\eta_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty,$$

и теорема полностью доказана.

Эта теорема содержит в себе весьма большое число различных предположений о сходимости и расходимости числовых рядов. Отметим несколько ее частных случаев.

Следствие 1.1. Пусть

$$d_n \geq 0, \quad r_n \geq 0, \quad \varphi(u) \geq 0 \quad (u \geq 0), \quad \varphi(u) \uparrow, \quad u^{-2}\varphi(u) \downarrow.$$

Для того чтобы ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n \varphi(r_n)$$

сходился всякий раз, как сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n^2,$$

необходимо и достаточно, чтобы ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi^2\left(\frac{d_n}{\xi}\right),$$

где $\psi(v)$ — функция, обратная к $u^2/\varphi(u)$, сходился для некоторого $\xi > 0$.

В частности, полагая $\varphi(u) = u^p$, где $0 < p < 2$, и заменяя d_n на d_n^{2-p} , получаем такое хорошо известное предложение.

Следствие 1.2. Пусть $0 < p < 2$, $d_n \geq 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 = \infty$. Тогда существует последовательность $r_n \geq 0$, для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n^2 < \infty \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} d_n^{2-p} r_n^p = \infty.$$

Более общее предложение было установлено Орличем ⁽⁶⁾:

Следствие 1.3. Пусть $0 < \gamma_n < 2$, $d_n \geq 0$, $r_n \geq 0$ ($n = 1, 2, \dots$). Для того чтобы из сходимости ряда $\sum r_n^2$ всякий раз вытекала сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n r_n^{\gamma_n},$$

необходимо и достаточно, чтобы ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\eta d_n)^{\frac{2}{2-\gamma_n}}$$

сходился для некоторого $\eta > 0$.

В формулировку условия (A) входит параметр ξ . Однако, например, в случае следствия 1.2 соответствующие ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2(\xi)$$

сходятся или расходятся одновременно для всех ξ в зависимости от сходимости или расходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2.$$

Мы покажем сейчас на примере, что такое явление для некоторых систем $\{\Phi_n(u)\}$ может и не наблюдаться.

Положим

$$\Phi_n(u) = u^{2-\varepsilon_n},$$

где $\varepsilon_n = \frac{M}{\ln(n+1)}$ и $0 < M < \frac{2}{\ln 2}$. Тогда уравнение (1.6) принимает вид:

$$\{u_n(\xi)\}^{2-\varepsilon_n} = \xi u_n^2(\xi),$$

откуда

$$u_n^2(\xi) = \xi^{-\frac{2}{\varepsilon_n}} = e^{-\frac{2 \ln \xi}{M} \ln(n+1)} = (n+1)^{-\frac{2 \ln \xi}{M}}.$$

Таким образом, в этом случае ряд (1.5) расходится при $\xi \leq e^{\frac{M}{2}}$ и сходится при $\xi > e^{\frac{M}{2}}$.

С другой стороны, можно указать простые достаточные условия, при выполнении которых ряды (1.5) сходятся или расходятся одновременно для всех ξ . Например, таким условием является

$$\langle u^{-p} \Phi_n(u) \rangle \downarrow \text{ для некоторого } p < 2. \quad (1.19)$$

В самом деле, тогда

$$\frac{\Phi_n(u)}{u^2} \cdot u^{2-p} \geq \frac{\Phi_n(v)}{v^2} \cdot v^{2-p} \quad (0 < u < v).$$

Поэтому, если, скажем, $\xi > 1$ и, следовательно, $u_n(\xi) \leq u_n(1) = d_n$, то

$$\xi u_n^{2-p}(\xi) \geq d_n^{2-p}$$

$$u_n(\xi) \geq \xi^{-\frac{1}{2-p}} d_n.$$

Таким образом, справедливо

Следствие 1.4. Пусть $0 < p < 2$,

$$\Phi_n(u) \geq 0 \quad (u \geq 0), \quad \Phi_n(u) \uparrow, \quad u^{-p}\Phi_n(u) \downarrow \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1.20)$$

Для того чтобы существовала последовательность $\{r_n\}$, удовлетворяющая условиям (1.1), необходимо и достаточно, чтобы расходился ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2,$$

где d_n есть корень уравнения $\Phi_n(d_n) = d_n^2$.

Никаких оговорок относительно понимания этого корня уже не требуется, так как в силу условий (1.20) либо $\Phi_n(u) \equiv 0$, либо функция $u^{-p}\Phi_n(u)$ строго убывает при возрастании u и обладает свойствами:

$$\lim_{u \rightarrow +0} u^{-p}\Phi_n(u) = \infty, \quad \lim_{u \rightarrow \infty} u^{-p}\Phi_n(u) = 0.$$

§ 2. Леммы о числовых рядах

Установим несколько лемм, относящихся к числовым рядам.

ЛЕММА 1. Пусть $0 < p < 2$, $r_k \geq 0$ ($k = 1, 2, \dots, N$),

$$\Phi_k(u) \geq 0 \quad (u \geq 0), \quad \Phi_k(u) > 0 \quad (u > 0), \quad \Phi_k(u) \uparrow, \quad u^{-p}\Phi_k(u) \downarrow \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (2.1)$$

и d_k есть корень уравнения

$$d_k^2 = \Phi_k(d_k). \quad (2.2)$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^N \Phi_k(r_k) \geq \sum_{k=1}^N d_k^{2-p} r_k^p - \sum_{k=1}^n r_k^2. \quad (2.3)$$

Доказательство. Отметим, что, согласно замечанию к следствию 1.4,

$$d_k > 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N),$$

и рассмотрим два случая: $r_k \geq d_k$ и $0 \leq r_k < d_k$. В первом случае имеем

$$d_k^{2-p} r_k^p \leq r_k^2,$$

а во втором, в силу условий (2.2) и $u^{-p}\Phi_k(u) \downarrow$,

$$d_k^{2-p} r_k^p = \frac{d_k^2}{\Phi_k(d_k)} \cdot d_k^{-p} \Phi_k(d_k) \cdot r_k^p \leq r_k^{-p} \Phi_k(r_k) \cdot r_k^p = \Phi_k(r_k).$$

Таким образом, при всех $r_k \geq 0$ имеем:

$$d_k^{2-p} r_k^p \leq \Phi_k(r_k) + r_k^2 \quad (k = 1, 2, \dots, N),$$

откуда

$$\sum_{k=1}^N d_k^{2-p} r_k^p \leq \sum_{k=1}^N \Phi_k(r_k) + \sum_{k=1}^N r_k^2.$$

Это неравенство эквивалентно (2.3), и лемма доказана. Для приложений

важен тот случай, когда

$$\sum_{k=1}^N d_k^2 \rightarrow \infty \quad (N \rightarrow \infty). \quad (2.4)$$

ЛЕММА 2. Пусть $0 < p < 2$, $0 \leq M < N$, $B > 0$, $D_M \geq 0$,
 $\Phi_k(u) \geq 0$ ($u \geq 0$), $\Phi_k(u) > 0$ ($u > 0$), $u^{-p}\Phi_k(u) \uparrow$,
 $u^{-2}\Phi_k(u) \downarrow$, $u^{-2}\Phi_k(u) \rightarrow \infty$ ($u \rightarrow 0$) ($k = M+1, \dots, N$).

(2.5)

Тогда система уравнений

$$\frac{B^p d_k^2}{D_k^{\frac{p}{2}}} = \Phi_k \left(\frac{B d_k}{\sqrt{D_k}} \right) \quad (k = M+1, \dots, N), \quad (2.6)$$

где

$$D_k = D_M + \sum_{x=M+1}^k d_x^2 \quad (k = M+1, \dots, N),$$

имеет единственное положительное решение $\{d_k\}$.

Если, кроме того, система функций $\{\Phi_n(u)\}$ бесконечна* и удовлетворяет условию (A), то

$$\sum_{k=M+1}^{\infty} d_k^2 = \infty. \quad (2.7)$$

Доказательство. Введем в рассмотрение функции

$$\varphi_k(u) = u^{-p}\Phi_k(u).$$

В силу (2.5), они обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \varphi_k(u) \geq 0 \quad (u \geq 0), \quad \varphi_k(u) > 0 \quad (u > 0), \quad \varphi_k(u) \uparrow, \\ u^{p-2}\varphi_k(u) \downarrow, \quad u^{p-2}\varphi_k(u) \rightarrow \infty \quad (u \rightarrow 0); \end{aligned} \quad (2.8)$$

в частности, как при доказательстве теоремы 1, убеждаемся, что все функции $\varphi_k(u)$ непрерывны при $u > 0$. Система уравнений (2.6) в наших новых обозначениях имеет вид:

$$d_k^{2-p} = \varphi_k \left(\frac{B d_k}{\sqrt{D_k}} \right) \quad (k = M+1, \dots, N). \quad (2.9)$$

Пусть числа d_{M+1}, \dots, d_{k-1} уже определены. Покажем, что k -е уравнение (2.9) имеет единственное положительное решение d_k . Это уравнение можно записать в форме

$$d_k^{2-p} = \varphi_k \left(\frac{B d_k}{\sqrt{D_{k-1} + d_k^2}} \right), \quad (2.10)$$

где D_{k-1} — известная неотрицательная константа. Если $D_{k-1} = 0$ (это возможно лишь в случае $k = M+1$, $D_M = 0$), то уравнение (2.10) принимает вид:

$$d_k^{2-p} = \varphi_k(B),$$

* Т. е. $N = \infty$

откуда

$$d_k = \{\varphi_k(B)\}^{\frac{1}{2-p}} > 0.$$

Обратимся к рассмотрению основного случая, когда $D_{k-1} > 0$. Положим

$$\psi_k(u) = \frac{u^{2-p}}{\varphi_k\left(\frac{B^2 u}{\sqrt{D_{k-1} + u^2}}\right)}$$

и сделаем замену переменной:

$$t = t(u) = \frac{Bu}{\sqrt{D_{k-1} + u^2}}, \quad u = \frac{t \sqrt{D_{k-1}}}{\sqrt{B^2 - t^2}}.$$

Так как

$$\frac{dt}{du} = \frac{BD_{k-1}}{(D_{k-1} + u^2)^{\frac{3}{2}}} > 0,$$

то при возрастании u от 0 до ∞ функция $t(u)$ строго возрастает от $t(0) = 0$ до $t(\infty) = B$. Имеем:

$$\psi_k(u) = \frac{D_{k-1}^{1-\frac{p}{2}}}{(B^2 - t^2)^{1-\frac{p}{2}}} \cdot \frac{t^{2-p}}{\varphi_k(t)} \quad (t = t(u)).$$

Здесь первый множитель строго возрастает вместе с t , а второй — не убывает. Таким образом, $\psi_k(u)$ является непрерывной и строго возрастающей функцией от u . Так как, кроме того,

$$\psi_k(0) = \frac{D_{k-1}^{1-\frac{p}{2}}}{B^{2-p}} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^{2-p}}{\varphi_k(t)} = 0,$$

$$\psi_k(\infty) = \lim_{t \rightarrow B-0} \frac{D_{k-1}^{1-\frac{p}{2}}}{(B^2 - t^2)^{1-\frac{p}{2}}} \cdot \frac{t^{2-p}}{\varphi_k(t)} = \infty,$$

то при возрастании u от 0 до ∞ $\psi_k(u)$ строго возрастает от 0 до ∞ . Отсюда следует, что уравнение

$$\psi_k(u) = 1$$

имеет единственный положительный корень d_k , для которого

$$d_k^{2-p} = \varphi_k\left(\frac{Bd_k}{\sqrt{D_k}}\right).$$

Остается показать, что если система функций $\{\varphi_k(u)\}$ бесконечна и удовлетворяет условию (A), то

$$\sum_{k=M+1}^{\infty} d_k^2 = \infty.$$

Допустим противное. Пусть

$$\sum_{k=M+1}^{\infty} d_k^2 < \infty,$$

т. е.

$$D_k \rightarrow D_\infty < \infty \quad (k \rightarrow \infty).$$

Положим

$$u_k = \frac{B d_k}{\sqrt{D_k}}.$$

Тогда система (2.6) принимает вид:

$$\Phi_k(u_k) = \frac{D_k^{1-\frac{p}{2}}}{B^{2-p}} u_k^2 \quad (k = M+1, \dots). \quad (2.11)$$

Отсюда следует, что

$$\Phi_k(u_k) < \frac{D_\infty^{1-\frac{p}{2}}}{B^{2-p}} u_k^2 \quad (k = M+1, \dots). \quad (2.12)$$

Рассмотрим еще вспомогательную систему

$$\Phi_k(v_k) = \frac{D_\infty^{1-\frac{p}{2}}}{B^{2-p}} v_k^2 \quad (k = M+1, \dots). \quad (2.13)$$

В силу условия (A),

$$\sum_{k=M+1}^{\infty} v_k^2 = \infty,$$

из (2.12) и (2.13) следует, что

$$u_k^{-2} \Phi_k(u_k) < v_k^{-2} \Phi_k(v_k).$$

Но $u^{-2} \Phi_k(u) \downarrow$. Поэтому $u_k \geq v_k$ и

$$\sum_{k=M+1}^{\infty} u_k^2 = \infty.$$

В силу же определения последовательности $\{u_k\}$, имеем:

$$\sum_{k=M+1}^{\infty} u_k^2 = B^2 \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{d_k^2}{D_k} \leq \frac{B^2}{D_{M+1}} \sum_{k=M+1}^{\infty} d_k^2.$$

Поэтому

$$\sum_{k=M+1}^{\infty} d_k^2 = \infty,$$

что противоречит сделанному предположению. Отсюда вытекает, что

$$\sum_{k=M+1}^{\infty} d_k^2 = \infty,$$

и лемма полностью доказана.

ЛЕММА 3. Пусть $0 < p < 2$, $B > 0$, $r_k \geq 0$ ($k = M+1, \dots, N$), система функций $\{\Phi_k(u)\}$ удовлетворяет условиям (2.5) и $\{d_k\}$ ($k = M+1, \dots, N$) — положительное решение системы уравнений (2.6) при некотором $D_M \geq 0$.

Тогда

$$\sum_{k=M+1}^N \Phi_k(r_k) \geq \sum_{k=M+1}^N d_k^{2-p} r_k^p - \frac{B^p}{1 - \frac{p}{2}} \left\{ \sum_{k=M+1}^N d_k^2 \right\}^{1 - \frac{p}{2}}. \quad (2.14)$$

Доказательство. Положим

$$g_k = \frac{B d_k}{\sqrt{D_k}} \quad (k = M+1, \dots, N) \quad (2.15)$$

и рассмотрим два случая: $r_k \leq g_k$ и $r_k > g_k$. В первом случае имеем

$$d_k^{2-p} r_k^p \leq d_k^{2-p} g_k^p,$$

а во втором, в силу определения d_k и условия $u^{-p} \Phi_k(u) \uparrow$, —

$$d_k^{2-p} r_k^p = \frac{d_k^{2-p}}{g_k^{-p} \Phi_k(g_k)} g_k^{-p} \Phi_k(g_k) r_k^p \leq \Phi_k(r_k).$$

Таким образом, в обоих случаях

$$d_k^{2-p} r_k^p \leq \Phi_k(r_k) + d_k^{2-p} g_k^p.$$

Отсюда следует:

$$\sum_{k=M+1}^N d_k^{2-p} r_k^p \leq \sum_{k=M+1}^N \Phi_k(r_k) + \sum_{k=M+1}^N d_k^{2-p} g_k^p. \quad (2.16)$$

Остается оценить последнюю сумму. Согласно (2.15) имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{k=M+1}^N d_k^{2-p} g_k^p &= B^p \sum_{k=M+1}^N \frac{d_k^2}{D_k^{\frac{p}{2}}} = B^p \sum_{k=M+1}^N \frac{D_k - D_{k-1}}{D_k^{\frac{p}{2}}} \leq \\ &\leq B^p \sum_{k=M+1}^N \int_{D_{k-1}}^{D_k} u^{-\frac{p}{2}} du = B^p \int_{D_M}^{D_N} u^{-\frac{p}{2}} du = B^p \frac{D_N^{1-\frac{p}{2}} - D_M^{1-\frac{p}{2}}}{1 - \frac{p}{2}} \leq \\ &\leq \frac{B^p}{1 - \frac{p}{2}} (D_N - D_M)^{1-\frac{p}{2}} = \frac{B^p}{1 - \frac{p}{2}} \left\{ \sum_{k=M+1}^N d_k^2 \right\}^{1-\frac{p}{2}} *. \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.16) получаем:

$$\sum_{k=M+1}^N d_k^{2-p} r_k^p \leq \sum_{k=M+1}^N \Phi_k(r_k) + \frac{B^p}{1 - \frac{p}{2}} \left\{ \sum_{k=M+1}^N d_k^2 \right\}^{1-\frac{p}{2}},$$

и лемма доказана.

Отметим, что, согласно лемме 2, если последовательность $\{\Phi_k(u)\}$ бесконечна и удовлетворяет дополнительному условию (A), то

$$\sum_{k=M+1}^{\infty} d_k^2 = \infty.$$

* Мы воспользовались элементарным неравенством:

$$(a+b)^{\alpha} \leq a^{\alpha} + b^{\alpha} \quad (a \geq 0, b \geq 0, 0 < \alpha < 1).$$

§ 3. Основные теоремы

В этом параграфе мы выведем несколько предложений о расходимости рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(|c_n|), \quad (3.1)$$

зависящих от коэффициентов Тейлора функций

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \in C.$$

Нам неизвестно, будут ли условия теоремы 1 достаточны для того, чтобы существовала функция $F(z) \in C$ с расходящимся рядом (3.1). Однако мы покажем, что это действительно так, если функции $\Phi_n(u)$ удовлетворяют некоторым дополнительным условиям правильности поведения.

Мы будем опираться на результаты, установленные в моей работе ⁽²⁾ и представляющие собой обобщение и уточнение одной теоремы Палея ⁽⁷⁾. Полагая в следствии 1.1 и теореме 2 указанной работы $d_n = 0$ ($n \neq n_k$) и заменяя d_{n_k} на d_k , немедленно убеждаемся в справедливости следующих двух предложений:

ЛЕММА 4. Пусть $0 < p < 2$, $\{n_k\}$ — возрастающая последовательность номеров, $0 \leq M \leq N$ и $d_k \geq 0$ ($k = M, M+1, \dots, N$). Тогда существует многочлен вида

$$P_{M,N}(z) = \sum_{n=n_M}^{n_N} c_n z^n \neq 0,$$

удовлетворяющий условию:

$$\sum_{k=M}^N d_k^{2-p} |c_{n_k}|^p \geq B \left\{ \sum_{k=M}^N d_k^2 \right\}^{1-\frac{p}{2}} \|P_{M,N}(z)\|^p, \quad (3.2)$$

где B — абсолютная положительная константа и

$$\|\psi(z)\| = \max_{|z| \leq 1} |\psi(z)|.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $0 < p < 2$, $\{n_k\}$ — возрастающая последовательность номеров,

$$d_k \geq 0 \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 = \infty. \quad (3.3)$$

Тогда найдется функция

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \in C,$$

для которой

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k^{2-p} |c_{n_k}|^p = \infty. \quad (3.4)$$

Переходим к исследованию ряда (3.1).

ТЕОРЕМА 3. Пусть $0 < p < 2$, $\{n_k\}$ — возрастающая последовательность номеров и система функций $\{\Phi_k(u)\}$ удовлетворяет следующим условиям (B_1) :

$$\Phi_k(u) \geq 0 \quad (u \geq 0), \quad \Phi_k(u) \uparrow, \quad u^{-p} \Phi_k(u) \downarrow \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Для того чтобы существовала функция

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \in C,$$

для которой

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(|c_{n_k}|) = \infty, \quad (3.5)$$

необходимо и достаточно, чтобы расходился ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k^2, \quad (3.6)$$

где d_k есть корень уравнения

$$d_k^2 = \Phi_k(d_k). \quad (3.7)$$

Доказательство. Необходимость условий теоремы непосредственно вытекает из теоремы 1 или следствия 1.4. Установим их достаточность.

Без ограничения общности можно считать, что

$$\Phi_k(u) > 0 \quad (u > 0), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.8)$$

В самом деле, в силу условий (B_1) либо $\Phi_k(u) > 0$ ($u > 0$), либо $\Phi_k(u) \equiv 0$, и в последнем случае $d_k = 0$. Поэтому из расходимости ряда (3.6) вытекает, что первый случай встречается для бесконечного множества значений k , скажем, для $k = k_l$ ($l = 1, 2, \dots$). Полагая

$$\bar{\Phi}_l(u) = \Phi_{k_l}(u), \quad \bar{n}_l = n_{k_l}, \quad \bar{d}_l = d_{k_l}$$

и учитывая, что

$$\sum_{l=1}^{\infty} \bar{d}_l^2 = \sum_{l=1}^{\infty} d_{k_l}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 = \infty,$$

мы сводим дело к рассмотрению случая (3.8).

Воспользуемся леммой 1, все условия которой, очевидно, выполняются. Получаем, что

$$\sum_{k=1}^N \Phi_k(r_k) \geq \sum_{k=1}^N d_k^{2-p} r_k^p - \sum_{k=1}^N r_k^2 \quad (r_k \geq 0).$$

Полагая здесь $r_k = |c_{n_k}|$, выводим, что

$$\sum_{k=1}^N \Phi_k(|c_{n_k}|) \geq \sum_{k=1}^N d_k^{2-p} |c_{n_k}|^p - \sum_{k=1}^N |c_{n_k}|^2. \quad (3.9)$$

Пусть теперь функция $F(z)$ имеет тот же вид, что и в теореме 2.

Тогда

$$\sum_{k=1}^N d_k^{2-p} |c_{n_k}|^p \rightarrow \infty \quad (N \rightarrow \infty)$$

и

$$\sum_{k=1}^N |c_{n_k}|^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{i\theta})|^2 d\theta \leq \|F(z)\|^2.$$

Отсюда и из (3.9) следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(|c_{n_k}|) = \infty,$$

и теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $0 < p < 2$, $\{n_k\}$ — возрастающая последовательность номеров и система функций $\{\Phi_k(u)\}$ удовлетворяет следующим условиям (B_2) :

$$\begin{aligned} \Phi_k(u) &\geq 0 \quad (u \geq 0), \quad u^{-p} \Phi_k(u) \uparrow, \quad u^{-2} \Phi_k(u) \downarrow, \\ u^{-2} \Phi_k(u) &\rightarrow \infty \quad (u \rightarrow 0), \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Для того чтобы существовала функция

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \in C,$$

для которой

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(|c_{n_k}|) = \infty, \quad (3.5)$$

необходимо и достаточно, чтобы система функций $\{\Phi_k(u)\}$ удовлетворяла условию (A).

Доказательство. Необходимость условий теоремы является следствием из теоремы 1. Докажем их достаточность.

Зададим последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_s\}$, удовлетворяющую условию

$$\sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon_s < \infty, \quad (3.10)$$

и положим

$$B_s = \left(\frac{B(2-p)}{4} \right)^{\frac{1}{p}} \varepsilon_s \quad (s = 1, 2, \dots), \quad (3.11)$$

где B имеет то же значение, что и в лемме 4. После этого, положив $k_0 = 0$, $d_0 = 0$, построим индуктивно возрастающую последовательность номеров $\{k_s\}$; именно, если k_0, \dots, k_{s-1} и $d_0, \dots, d_{k_{s-1}}$ уже определены, то положим

$$D_{k_{s-1}} = \sum_{k=1}^{k_{s-1}} d_k^2$$

и для чисел B_s и $D_{k_{s-1}}$ построим последовательность $\{d_{k_s}, s\}$ ($k = k_{s-1} + 1$,

$k_{s-1} + 2, \dots$), определив ее из уравнений

$$d_{k,s}^{2-p} = \left(\frac{B_s d_{k,s}}{V D_{k,s}} \right)^{-p} \Phi_s \left(\frac{B_s d_{k,s}}{V D_{k,s}} \right) \quad (k > k_{s-1}),$$

где

$$D_{k,s} = D_{k_{s-1}} + \sum_{x=k_{s-1}+1}^k d_{x,s}^2.$$

Согласно лемме 2, эти уравнения разрешимы и

$$\sum_{k=k_{s-1}+1}^{\infty} d_{k,s}^2 = \infty.$$

Поэтому можно найти номер k_s из условий:

$$\left\{ \sum_{k=k_{s-1}+1}^{k_s} d_{k,s}^2 \right\}^{1-\frac{p}{2}} \geq \varepsilon_s^{-p} > \left\{ \sum_{k=k_{s-1}+1}^{k_s-1} d_{k,s}^2 \right\}^{1-\frac{p}{2}}. \quad (3.12)$$

После этого полагаем $d_k = d_{k,s}$ ($k_{s-1} < k \leq k_s$) и продолжаем конструкцию.

Воспользуемся леммой 4. Эта лемма показывает, что существует многочлен вида

$$P_s(z) = \sum_{n=k_{s-1}+1}^{k_s} c_n z^n \neq 0,$$

для которого

$$\sum_{k=k_{s-1}+1}^{k_s} d_k^{2-p} |c_{n_k}|^p \geq B \left\{ \sum_{k=k_{s-1}+1}^{k_s} d_k^2 \right\}^{1-\frac{p}{2}} \|P_s(z)\|^p. \quad (3.13)$$

В силу однородности этого неравенства, мы вправе считать, что

$$\|P_s(z)\| = \varepsilon_s. \quad (3.14)$$

Далее, пользуясь леммой 3 и учитывая (3.13), (3.14), (3.11) и (3.12), выводим, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=k_{s-1}+1}^{k_s} \Phi_k(|c_{n_k}|) &\geq \sum_{k=k_{s-1}+1}^{k_s} d_k^{2-p} |c_{n_k}|^p - \frac{B_s^p}{1-\frac{p}{2}} \left\{ \sum_{k=k_{s-1}+1}^{k_s} d_k^2 \right\}^{1-\frac{p}{2}} \geq \\ &\geq \left\{ B \|P_s(z)\|^p - \frac{B_s^p}{1-\frac{p}{2}} \right\} \left\{ \sum_{k=k_{s-1}+1}^{k_s} d_k^2 \right\}^{1-\frac{p}{2}} = \\ &= \frac{B}{2} \varepsilon_s^p \left\{ \sum_{k=k_{s-1}+1}^{k_s} d_{k,s}^2 \right\}^{1-\frac{p}{2}} \geq \frac{B}{2} \quad (s = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Таким образом, если положить

$$F(z) = \sum_{s=1}^{\infty} P_s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

то, в силу (3.10) и (3.14), функция $F(z) \in C$ и для нее

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(|c_{n_k}|) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=k_{s-1}+1}^{k_s} \Phi_k(|c_{n_k}|) \geq \frac{B}{2} \sum_{s=1}^{\infty} 1 = \infty.$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 5 (основная теорема). Пусть $\{n_k\}$ — возрастающая последовательность номеров и система функций $\{\Phi_k(u)\}$ удовлетворяет следующим условиям: существует число p ($0 < p < 2$) такое, что для каждого k либо

$$(B_1) \quad \Phi_k(u) \geq 0 \quad (u \geq 0), \quad \Phi_k(u) \uparrow, \quad u^{-p} \Phi_k(u) \downarrow,$$

либо

$$(B_2) \quad \Phi_k(u) \geq 0 \quad (u \geq 0), \quad u^{-p} \Phi_k(u) \uparrow, \quad u^{-2} \Phi_k(u) \downarrow, \\ u^{-2} \Phi_k(u) \rightarrow \infty \quad (u \rightarrow 0)^*.$$

Для того чтобы существовала функция

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \in C,$$

для которой

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(|c_{n_k}|) = \infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы система $\{\Phi_k(u)\}$ удовлетворяла условию (A).

Доказательство. Необходимость условия (A) очевидна. Для доказательства его достаточности обозначим через K_1 множество тех натуральных k , для которых выполняются условия (B_1) , и через K_2 — множество тех k , для которых выполняются условия (B_2) . Тогда либо

$$\sum_{k \in K_1} u_k^2(\xi) = \infty,$$

либо

$$\sum_{k \in K_2} u_k^2(\xi) = \infty$$

для любого $\xi > 0$. Каждый из этих случаев возвращает нас к одной из двух предыдущих теорем, и теорема доказана.

В дальнейшем мы встретимся с такими случаями, когда не выполняются условия ни одной из теорем 3 и 4, но выполняются все условия основной теоремы.

Отметим в качестве следствия аналогичное предложение о коэффициентах Фурье непрерывных периодических функций.

Следствие 5.1. Пусть $\{n_k\}$ — возрастающая последовательность номеров и система функций $\{\Phi_k(u)\}$ удовлетворяет всем условиям теоремы 5. Для того чтобы существовала непрерывная периодическая функция

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \cos(nx - \alpha_n) \quad (\rho_n \geq 0),$$

* Можно показать, что на самом деле последнее из этих условий излишне.

для которой

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(\rho_{n_k}) = \infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы система $\{\Phi_k(u)\}$ удовлетворяла условию (A).

§ 4. Частные случаи

Здесь мы рассмотрим ряд частных случаев теорем, установленных в предыдущем параграфе.

Теорема Гронвалля и ее обобщения. Гронвалль ⁽⁵⁾ доказал такую теорему:

ТЕОРЕМА ГРОНВАЛЛЯ. Пусть $\varphi(u) \rightarrow \infty$ ($u \rightarrow 0$). Тогда существует функция

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \in C,$$

для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \varphi(|c_n|) = \infty. \quad (4.1)$$

Эта теорема была обобщена Палеем ⁽⁷⁾. Аналогичное обобщение вытекает также из результатов Сидона ⁽¹⁰⁾ [см. (1), § 9.604].

ТЕОРЕМА ПАЛЕЯ — СИДОНА. Пусть $\{n_k\}$ — возрастающая последовательность номеров и $\varphi(u) \rightarrow \infty$ ($u \rightarrow 0$). Тогда существует функция

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \in C,$$

для которой

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_{n_k}|^2 \varphi(|c_{n_k}|) = \infty. \quad (4.2)$$

Покажем, что эта теорема может быть выведена из теоремы 4. Нам понадобится такая лемма:

ЛЕММА 5. Пусть $\varphi(u) > 0$ ($u > 0$), $\varphi(u) \rightarrow \infty$ ($u \rightarrow 0$). Тогда существует функция $\varphi_1(u)$ ($u > 0$), обладающая следующими свойствами:

$$1) \ 0 < \varphi_1(u) \leq \varphi(u) \quad (0 < u \leq u_0),$$

$$2) \ u \varphi_1(u) \uparrow,$$

$$3) \ \varphi_1(u) \downarrow, \ \varphi_1(u) \rightarrow \infty \ (u \rightarrow 0).$$

Доказательство. Положим $\varphi_2(u) = \inf_{0 < \eta \leq u} \varphi(\eta)$. Тогда, очевидно,

$$0 \leq \varphi_2(u) \leq \varphi(u), \quad \varphi_2(u) \downarrow \text{ и } \varphi_2(u) \rightarrow \infty \ (u \rightarrow 0).$$

Пусть $\varphi_2(u) \geq 1$ при $0 < u \leq u_0$. Положим

$$\varphi_1(u) = \frac{1}{u} \inf_{u \leq \eta \leq u_0} \eta \varphi_2(\eta) \quad (0 < u \leq u_0), \quad \varphi_1(u) = \varphi_1(u_0) \quad (u > u_0) \quad (4.3)$$

и покажем, что эта функция является искомой. Прежде всего, в силу (4.3), имеем:

$$\varphi_1(u) \leq \varphi_2(u) \quad (0 < u \leq u_0)$$

и так так $\varphi_2(\eta) \geq 1$ ($0 < \eta \leq u_0$), то $\varphi_1(u) \geq 1$. Таким образом,

$$0 < \varphi_1(u) \leq \varphi(u) \quad (0 < u \leq u_0).$$

Кроме того, очевидно, $u\varphi_1(u) \uparrow$.

Далее, покажем, что $\varphi_1(u) \downarrow$. Пусть $0 < u < v \leq u_0$. Возможны два случая: либо

$$\inf_{u \leq \eta \leq u_0} \eta \varphi_2(\eta) = \inf_{v \leq \eta \leq u_0} \eta \varphi_2(\eta),$$

либо

$$\inf_{u \leq \eta \leq u_0} \eta \varphi_2(\eta) = \inf_{u \leq \eta \leq v} \eta \varphi_2(\eta) < \inf_{v \leq \eta \leq u_0} \eta \varphi_2(\eta).$$

В первом случае имеем:

$$\varphi_1(u) = \frac{1}{u} \inf_{u \leq \eta \leq u_0} \eta \varphi_2(\eta) > \frac{1}{v} \inf_{u \leq \eta \leq u_0} \eta \varphi_2(\eta) = \frac{1}{v} \inf_{v \leq \eta \leq u_0} \eta \varphi_2(\eta) = \varphi_1(v),$$

а во втором —

$$\begin{aligned} \varphi_1(u) &= \frac{1}{u} \inf_{u \leq \eta \leq u_0} \eta \varphi_2(\eta) = \frac{1}{u} \inf_{u \leq \eta \leq v} \eta \varphi_2(\eta) = \\ &= \inf_{u \leq \eta \leq v} \left(\frac{\eta}{u} \right) \varphi_2(\eta) \geq \varphi_2(v) \geq \varphi_1(v). \end{aligned}$$

Наконец, докажем, что $\varphi_1(u) \rightarrow \infty$ ($u \rightarrow 0$). Пусть $0 < \varepsilon \leq u_0$. Имеем:

$$\begin{aligned} \varphi_1(u) &= \frac{1}{u} \inf_{u \leq \eta \leq u_0} \eta \varphi_2(\eta) = \min \left\{ \frac{1}{u} \inf_{u \leq \eta \leq \varepsilon} \eta \varphi_2(\eta), \frac{1}{u} \inf_{\varepsilon \leq \eta \leq u_0} \eta \varphi_2(\eta) \right\} \geq \\ &\geq \min \left\{ \varphi_2(\varepsilon), \frac{\varepsilon}{u} \right\}. \end{aligned}$$

Полагая в этом неравенстве $\varepsilon = \sqrt{u}$, получаем, что

$$\varphi_1(u) \geq \min \left\{ \varphi_2(\sqrt{u}), \frac{1}{\sqrt{u}} \right\} \rightarrow \infty \quad (u \rightarrow 0),$$

и лемма доказана.

Положим в теореме 4

$$\Phi_k(u) \equiv u^2 \varphi_1(u) \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Так как

$$u^{-1} \Phi(u) = u \varphi_1(u) \uparrow, \quad u^{-2} \Phi_k(u) = \varphi_1(u) \downarrow \text{ и } u^{-2} \Phi_k(u) = \varphi_1(u) \rightarrow \infty \quad (u \rightarrow 0),$$

то все ее условия выполнены. Кроме того, $u_k(\xi)$ есть корень уравнения

$$\varphi_1(u_k(\xi)) = \xi.$$

Поэтому $u_k(\xi) \equiv u(\xi) > 0$ для всех $\xi > 0$ и, следовательно, для системы $\{\Phi_k(u)\}$ выполняется условие (А). Теорема 4 показывает нам, что существует функция $F(z) \in C$, для которой

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(|c_{n_k}|) = \sum_{k=1}^{\infty} |c_{n_k}|^2 \varphi_1(|c_{n_k}|) = \infty.$$

Так как $\varphi_1(u) \leq \varphi(u)$ ($0 < u \leq u_0$) и $|c_{n_k}| \leq u_0$ ($k \geq k_0$), то отсюда вы-

текает, что для той же функции $F(z)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_{n_k}|^2 \varphi(|c_{n_k}|) = \infty,$$

и теорема Палей — Сидона доказана.

Теорема Палей и ее обобщения. Палей (7) доказал такую теорему:

ТЕОРЕМА ПАЛЕЯ. Пусть $d_n \geq 0$ ($n = 1, 2, \dots$). Для того чтобы существовала функция

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \in C,$$

для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n |c_n| = \infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы расходился ряд $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2$.

Очевидно, это частный случай нашей теоремы 2.

Рассмотрим более общую задачу о том, при каких ограничениях на последовательность $d_n \geq 0$ существует функция $F(z) \in C$, для которой расходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n \varphi(|c_n|),$$

где функция $\varphi(u)$ ($u \geq 0$) удовлетворяет нашим обычным условиям:

$$\varphi(u) \geq 0 \quad (u \geq 0), \quad \varphi(u) > 0 \quad (u > 0), \quad \varphi(u) \uparrow, \quad u^{-2}\varphi(u) \downarrow.$$

В этих обозначениях теорема Палей относится к случаю $\varphi(u) = u$, а теорема 2 — к случаю $\varphi(u) = u^p$ ($0 < p < 2$).

Наши методы не позволяют полностью решить поставленную задачу. Теорема 1 показывает, что для существования искомой функции $F(z)$ необходимо, чтобы для любого $\xi > 0$ расходился ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2(\xi),$$

где $u_n(\xi)$ есть корень уравнения

$$\xi = d_n \frac{\varphi(u_n)}{u_n^2},$$

т. е.

$$u_n(\xi) = \psi\left(\frac{\xi}{d_n}\right),$$

где $\psi(v)$ — функция, обратная к $\frac{\varphi(u)}{u^2}$. Что же касается достаточности этих условий, то результаты § 3 показывают лишь, что она имеет место при одном из следующих дополнительных ограничений на функцию $\varphi(u)$: либо если $u^{-p}\varphi(u) \uparrow$ для некоторого $p > 0$, либо если $u^{-2}\varphi(u) \downarrow$ для

некоторого $p < 2$. Понятно, что этот результат полностью покрывает как теорему Палая, так и наше ее обобщение.

Теорема Банаха и ее обобщения. С. Банах ⁽³⁾ показал, что существует положительная последовательность $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), такая, что найдется непрерывная периодическая функция $f(x)$, для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^{2-\varepsilon_n} = \infty.$$

Из результатов Банаха и С. Сидона ⁽⁸⁾ фактически вытекает, что для любой возрастающей последовательности номеров $\{n_k\}$ можно построить положительную последовательность $\{\varepsilon_k\}$, $\varepsilon_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$), такую, что найдется непрерывная периодическая функция $f(x)$, для которой

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho_{n_k}^{2-\varepsilon_k} = \infty.$$

Здесь мы рассмотрим следующую сходную задачу. Зафиксируем последовательность $\{n_k\}$; при каких ограничениях на последовательность $\{\varepsilon_k\}$ где $0 < \varepsilon_k < 2$, существует функция $F(z) \in C$, для которой

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_{n_k}|^{2-\varepsilon_k} = \infty?$$

Оказывается, что искомые условия на $\{\varepsilon_k\}$ не зависят от вида последовательности $\{n_k\}$. Именно, из теоремы 5 немедленно вытекает такое предложение:

ТЕОРЕМА 6. Пусть $0 < \varepsilon_k < 2$ ($k = 1, 2, \dots$). Для того чтобы существовала функция

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \in C,$$

для которой

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_{n_k}|^{2-\varepsilon_k} = \infty, \quad (4.4)$$

необходимо и достаточно, чтобы ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \eta^{\frac{1}{\varepsilon_k}} \quad (4.5)$$

расходился для любого $\eta > 0$.

Очевидно, это имеет место, например, если

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k > 0$$

или

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k \ln k = \infty.$$

Отметим, что теорема 6 содержит в себе теорему Карлемана ⁽⁴⁾ и теорему Сидона ⁽⁸⁾.

Остановимся еще специально на том частном случае, когда $\varepsilon_k \downarrow 0$. В этом случае условие расходимости ряда (4.5) может быть преобразовано к значительно более простому виду.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $0 < \varepsilon_k < 2$ и $\varepsilon_k \downarrow 0$. Для того чтобы существовала функция

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \in C,$$

для которой

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_{n_k}|^{2-\varepsilon_k} = \infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{\varepsilon_k\}$ удовлетворяла условию

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k \ln k = \infty. \quad (4.6)$$

Доказательство. Установим, что ряд (4.5) расходится для любого $\eta > 0$ в том и только том случае, если выполняется условие (4.6). Пусть ряд (4.5) сходится для некоторого $\eta > 0$. Так как это ряд с монотонными членами, то

$$\eta^{\frac{1}{\varepsilon_k}} = O\left(\frac{1}{k}\right),$$

откуда

$$\varepsilon_k \ln k \leq \ln \frac{1}{\eta} + C\varepsilon_k = O(1).$$

Обратно, если

$$\varepsilon_k \ln k \leq M \quad (k = 1, 2, \dots),$$

то

$$\frac{1}{\varepsilon_k} \geq \frac{\ln k}{M}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \eta^{\frac{1}{\varepsilon_k}} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{\varepsilon_k} \ln \frac{1}{\eta}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{\ln \frac{1}{\eta}}{M} \ln k} = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\frac{\ln \frac{1}{\eta}}{M}} < \infty$$

при $\eta < e^{-M}$.

Новый случай. Желая объединить результаты Палея, Банаха и Сидона, мы рассмотрим здесь вопрос о расходимости для функций $F(z) \in C$ рядов вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^{\varepsilon_n} |c_n|^{2-\varepsilon_n},$$

где $d_n \geq 0$ и $0 < \varepsilon_n < 2$. Применяя теорему 5, получаем такое предложение:

ТЕОРЕМА 8. Пусть $d_n \geq 0$ и $0 < \varepsilon_n < 2$ ($n = 1, 2, \dots$). Для того чтобы существовала функция $F(z) \in C$, для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^{\varepsilon_n} |c_n|^{2-\varepsilon_n},$$

необходимо и достаточно, чтобы ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 \eta^{\frac{1}{\varepsilon_n}} \quad (4.7)$$

расходился для любого $\eta > 0$.

Если $\varepsilon_n \geq \varepsilon > 0$ ($n = 1, 2, \dots$), то, очевидно, это условие эквивалентно тому, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 = \infty.$$

Если же, например, $d_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ и $\varepsilon_n \downarrow 0$, то оно эквивалентно условию

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n \ln \ln n = \infty.$$

Математический институт
имени В. А. Стеклова АН. наук СССР

Поступило
10. 1. 1956

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М.—Л., 1939.
- ² Стечкин С. Б., Одна экстремальная задача для многочленов, Изв. АН. наук СССР, сер. матем., 20 (1956), 765—774.
- ³ Banach S., Über einige Eigenschaften der lakünären trigonometrischen Reihen, Studia Math., 2 (1930), 207—220, 251.
- ⁴ Carleman T., Über die Fourierkoeffizienten einer stetigen Funktion, Acta Math., 41 (1918), 377—384.
- ⁵ Gronwall T. H., On the Fourier coefficients of a continuous function, Bull. Amer. Math. Soc., 27 (1921), 320—321.
- ⁶ Orlicz W., Über konjugierte Exponentenfolgen, Studia Math., 3 (1931), 200—211.
Paley R. E. A. C., A note on power series, Journ. London Math. Soc., 7 (1932), 122—130.
- ⁷ Sidon S., Ein Satz über trigonometrische Polynome mit Lücken und seine Anwendung in der Theorie der Fourier-Reihen, Journ. für die reine und angew. Math., 163 (1930), 251—252.
- ⁸ Sidon S., Ein Satz über trigonometrische Polynome und seine Anwendung in der Theorie der Fourier-Reihen, Math. Ann., 106 (1932), 536—539.
- ¹⁰ Sidon S., Bemerkungen über Fourier- und Potenzreihen, Acta Szeged, 7 (1934), 85—94.

С. Н. СЛУГИН

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ОДНОСТОРОННИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым)

В работе приводится одна общая схема построения приближений в смысле С. А. Чаплыгина — верхних и нижних приближений решения операторного уравнения в полуупорядоченном пространстве. Приближения чередуются: если предыдущее приближение — нижнее, то следующее — верхнее, и наоборот. Схема конкретизирована на некоторых типах уравнений.

При использовании метода С. А. Чаплыгина ⁽¹⁾ и различных видоизменений этого метода приходится либо накладывать условие *знакопостоянства* на соответствующие производные в нелинейной части рассматриваемого уравнения, либо действовать на участке изменения аргумента, *ограниченном* определенными условиями.

В настоящей работе предлагаются неограниченно применимые алгоритмы приближенного решения операторных уравнений, дающие, как и в методе С. А. Чаплыгина, монотонно сходящиеся к решению последовательности верхних и нижних приближений. Для применения предлагаемых алгоритмов достаточно выполнения вполне естественного условия ограниченности соответствующих производных.

В случае дифференциального уравнения n -го порядка в качестве вспомогательных линейных уравнений алгоритма берутся уравнения *первого* порядка с числовым коэффициентом.

Так же, как и в работе А. Н. Балуева ⁽²⁾, впервые применившего аппарат функционального анализа в полуупорядоченных пространствах см. ⁽³⁾] к исследованию метода С. А. Чаплыгина, в настоящей работе использован этот же аппарат.

§ 1. Операторное уравнение в полуупорядоченном пространстве

Пусть операторы U, V, W переводят K -пространство элементов x в себя. Если $\underline{x}_0 \leq x \leq \bar{x}_0$, то $x \in [\underline{x}_0, \bar{x}_0]$. Элементы, сравнимые с нулем, обозначим через Δx . J — тождественный оператор: $J(x) \equiv x$. V^n означает n -ю итерацию:

$$V^2(x) = V[V(x)], \quad V^3(x) = V[V^2(x)]$$

и т. д. Сходимость сверху (снизу) означает, что

$$|x_n - x^*| \rightarrow 0, \quad x_n > x_{n+1} \quad (x_n < x_{n+1}).$$

В пространстве непрерывных на $[t_0, t_1]$ функций $x(t)$ монотонная сходимость (если x^* принадлежит этому же пространству), как известно, является равномерной.

ЛЕММА 1. Пусть на $[\underline{x}_0, \bar{x}_0]$ определен монотонно возрастающий и монотонно непрерывный оператор W , $\underline{x}_0 \leq W(\underline{x}_0)$, $\bar{x}_0 \geq W(\bar{x}_0)$. Тогда уравнение $x = W(x)$ имеет на $[\underline{x}_0, \bar{x}_0]$ решения, наибольшее и наименьшее из которых \bar{x} , \underline{x} могут быть получены методом итераций:

$$\bar{x}_{n+1} = W(\bar{x}_n) \searrow \bar{x}, \quad \underline{x}_{n+1} = W(\underline{x}_n) \nearrow \underline{x}.$$

Эта лемма — несколько видоизмененная теорема 2.11 гл. XII работы (3). Методом математической индукции нетрудно установить, что \bar{x} и \underline{x} — наибольшее и наименьшее решения.

ЛЕММА 2. Пусть на $[\underline{x}_0, \bar{x}_0]$ определен монотонно убывающий и монотонно непрерывный оператор U и $\underline{x}_0 \leq U(\bar{x}_0)$, $\bar{x}_0 \geq U(\underline{x}_0)$. Тогда алгоритм $x_{n+1} = U(x_n)$ определяет последовательности

$$\bar{x}_{2n} \searrow \bar{x}, \quad \underline{x}_{2n+1} \searrow \bar{x}, \quad \underline{x}_{2n} \nearrow \underline{x}, \quad \bar{x}_{2n+1} \nearrow \underline{x},$$

где \bar{x} и \underline{x} — наибольшее и наименьшее на $[\underline{x}_0, \bar{x}_0]$ решения уравнения $x = U^2(x)$. Если $x_{n+1} - x_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то $\bar{x} = \underline{x} = x^*$ — единственное на $[\underline{x}_0, \bar{x}_0]$ решение уравнения $x = U(x)$.

Положив $U^2 = W$, можно доказать, что оператор W определен, монотонно возрастает и монотонно непрерывен на $[\underline{x}_0, \bar{x}_0]$.

Возьмем оператор U от обеих частей неравенства $U(\bar{x}_0) \geq \bar{x}_0$:

$$U^2(\bar{x}_0) \leq U(\bar{x}_0) \leq \bar{x}_0,$$

т. е.

$$W(\bar{x}_0) \leq \bar{x}_0.$$

Аналогично,

$$W(\underline{x}_0) \geq \underline{x}_0.$$

Согласно лемме 1,

$$\bar{x}_{2n} \searrow \bar{x}, \quad \underline{x}_{2n} \nearrow \underline{x},$$

где \bar{x} , \underline{x} — наибольшее и наименьшее на $[\underline{x}_0, \bar{x}_0]$ решения уравнения $x = U^2(x)$.

Легко установить, что \bar{x}_1 может служить нижним первоначальным приближением для решения уравнения $x = U^2(x)$ на том же отрезке, и поэтому

$$\bar{x}_{2n+1} \nearrow \underline{x}.$$

Аналогично,

$$\underline{x}_{2n+1} \searrow \bar{x}.$$

Переходя к пределу в равенствах

$$\bar{x}_{2n+1} = U(\bar{x}_{2n}), \quad \underline{x}_{2n+1} = U(\underline{x}_{2n}),$$

получим:

$$\underline{x} = U(\bar{x}), \quad \bar{x} = U(\underline{x}).$$

А так как, по условию, $\underline{x}_{2n+1} - \underline{x}_{2n} \rightarrow 0$, то $\underline{x} = \bar{x}$. Итак, $\underline{x} = \bar{x}$ — единственное решение.

ТЕОРЕМА. Пусть на $[\underline{x}_0, \bar{x}_0]$ определен оператор V , на множестве элементов Δx — аддитивные положительные операторы Γ и Λ , причем

$$\Lambda(\Delta x) \geq V(x + \Delta x) - V(x) \geq -\Gamma(\Delta x) \text{ при } \Delta x > 0,$$

$$\Lambda(\bar{x}_0 - \underline{x}_0) \leq V(\bar{x}_0) - \underline{x}_0, \quad \Lambda(\bar{x}_0 - \underline{x}_0) \leq \bar{x}_0 - V(\underline{x}_0);$$

пусть, кроме того, существует обратный положительный оператор $(J - \Lambda)^{-1}$ и последовательность элементов $(\Gamma + 2\Lambda)^n(\Delta x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и любом $\Delta x > 0$.

Тогда итерационный алгоритм

$$x_{n+1} = x_n - (J - \Lambda)^{-1}(J - V)(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

определяет последовательности $\bar{x}_{2n}, \underline{x}_{2n+1}$, сходящиеся сверху, и $\underline{x}_{2n}, \bar{x}_{2n+1}$, сходящиеся снизу к единственному на $[\underline{x}_0, \bar{x}_0]$ решению x^* уравнения $x = V(x)$. Оценка быстроты сходимости:

$$|x_n - x^*| \leq (\Gamma + 2\Lambda)^n(\bar{x}_0 - \underline{x}_0).$$

Для фактического проведения процесса достаточно взять за первоначальное приближение лишь одно из \underline{x}_0 и \bar{x}_0 , так как если, например, $x_0 = \bar{x}_0$, то $\bar{x}_{2n} \geq x^* \geq \bar{x}_{2n+1}$ и разность $\bar{x}_{2n} - \bar{x}_{2n+1} \rightarrow 0$ дает эффективную оценку погрешности приближения.

Алгоритм теоремы можно переписать в другом виде:

$$x_{n+1} = \Lambda(x_{n+1} - x_n) + V(x_n). \quad (1)$$

Доказательство теоремы. Положим

$$U = J - (J - \Lambda)^{-1}(J - V).$$

Монотонная непрерывность оператора U следует из монотонной непрерывности V . Взяв однородный оператор $(J - \Lambda)^{-1}$ от всех частей соотношения

$$(J - \Lambda)[U(x + \Delta x) - U(x)] = -\Lambda(\Delta x) + V(x + \Delta x) - V(x) \leq 0$$

(при $\Delta x > 0$), находим, что оператор U монотонно убывает. Взяв аддитивный и положительный оператор $(J - \Lambda)^{-1}$ от обеих частей неравенства

$$\bar{x}_0 - \underline{x}_0 - \Lambda(\bar{x}_0 - \underline{x}_0) \geq -\underline{x}_0 + V(\underline{x}_0),$$

получим $\bar{x}_0 \geq U(\underline{x}_0)$. Аналогично проверяем соотношение

$$\underline{x}_0 \leq U(\bar{x}_0).$$

Докажем, что $x_{n+1} - x_n \rightarrow 0$. По лемме 2, выполняется только одно из соотношений: либо 1) $x_{n-1} \leq x_{n+1} \leq x_n$, либо 2) $x_{n-1} \geq x_{n+1} \geq x_n$.

В первом случае из аддитивности и положительности оператора Λ следует:

$$\Lambda(x_n - x_{n-1}) \geq \Lambda(x_n - x_{n+1}).$$

Поэтому [см. (1)]

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \Lambda(x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n) + V(x_n) - V(x_{n-1}) \geq \\ &\geq 2\Lambda(x_{n-1} - x_n) + V(x_n) - V(x_{n-1}) \geq 2\Lambda(x_{n-1} - x_n) - \Gamma(x_n - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Итак,

$$0 \geq x_{n+1} - x_n \geq (\Gamma + 2\Lambda)(x_{n-1} - x_n).$$

Во втором случае аналогично

$$0 \leq x_{n+1} - x_n \leq (\Gamma + 2\Lambda)(x_n - x_{n-1}).$$

В обоих случаях

$$|x_{n+1} - x_n| \leq (\Gamma + 2\Lambda)(|x_n - x_{n-1}|),$$

причем элемент $x_n - x_{n-1}$ сравним с нулем, т. е.

$$|x_n - x_{n-1}| = \pm(x_n - x_{n-1}).$$

Поэтому, в силу однородности оператора $\Gamma + 2\Lambda$,

$$(\Gamma + 2\Lambda)(|x_n - x_{n-1}|) = |(\Gamma + 2\Lambda)(x_n - x_{n-1})|.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x_n| &\leq |(\Gamma + 2\Lambda)(x_n - x_{n-1})| \leq \\ &\leq |(\Gamma + 2\Lambda)^2(x_{n-1} - x_{n-2})| \leq \dots \leq |(\Gamma + 2\Lambda)^n(x_1 - x_0)| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$ по условию теоремы. Итак, $x_{n+1} - x_n \rightarrow 0$ и, по лемме 2, $x_n \rightarrow x^*$, где $x^* = U(x^*)$, т. е. $x^* = V(x^*)$.

Наконец, из неравенств

$$|x_n - x^*| \leq |x_{n+1} - x_n|, \quad |x_1 - x_0| \leq \bar{x}_0 - \underline{x}_0$$

и

$$|x_{n+1} - x_n| \leq (\Gamma + 2\Lambda)^n(|x_1 - x_0|)$$

следует, что

$$|x_n - x^*| \leq (\Gamma + 2\Lambda)^n(\bar{x}_0 - \underline{x}_0).$$

§ 2. Обыкновенное дифференциальное уравнение n -го порядка

Уравнение

$$y^{(m)} = f(t, y, y', \dots, y^{(m-1)}), \quad y^{(k)}(t_0) = \alpha_k \quad (k = 0, 1, \dots, m-1), \quad (2)$$

можно рассматривать как уравнение $x = V(x)$ относительно $x = y^{(m)}(t)$, так как $y^{(k)}$ вычисляются по $y^{(m)}$ и начальным условиям, а $\Delta x = \Delta y^{(m)}(t)$, где $\Delta y^{(k)}(t_0) = 0$. Выделим достаточно большую область определенных на $[t_0, t_0 + L]$ (число L — произвольное, но фиксированное) функций $y(t)$. Пусть эта область содержит в себе все функции $y(t)$, удовлетворяющие начальным условиям и неравенствам

$$\underline{y}_0^{(m)}(t) \leq y^{(m)}(t) \leq \bar{y}_0^{(m)}(t).$$

Функции \underline{y}_0 и \bar{y}_0 определены ниже.

Пусть в этой области

$$A_k \geq \frac{\partial f}{\partial y^{(k)}} \geq -B_k \quad (A_k \geq 0, B_k \geq 0).$$

Обозначая

$$f(t, y, \dots, y^{(m-1)}) = f[y],$$

находим, что при $\Delta y^{(m)} \geq 0$

$$\sum_{k=0}^{m-1} A_k \Delta y^{(k)} \geq f[y + \Delta y] - f[y] \geq - \sum_{k=0}^{m-1} B_k \Delta y^{(k)}.$$

Пусть

$$A \geq \sum_{k=0}^{m-1} \frac{A_k L^{m-k-1}}{(m-k-1)!}, \quad B \geq \sum_{k=0}^{m-1} \frac{B_k L^{m-k-1}}{(m-k-1)!}.$$

Нетрудно проверить, пользуясь выражением $\Delta y^{(k)}$ через $\Delta y^{(m)}$, что

$$\begin{aligned} \Lambda(\Delta y^{(m)}) &= A \int_{t_0}^t \Delta y^{(m)}(\tau) d\tau \geq f[y + \Delta y] - f[y] \geq \\ &\geq -B \int_{t_0}^t \Delta y^{(m)}(\tau) d\tau = -\Gamma(\Delta y^{(m)}). \end{aligned}$$

Пусть существуют m раз непрерывно дифференцируемые функции \underline{y}_0 , \bar{y}_0 , удовлетворяющие начальным условиям и неравенствам

$$\underline{y}_0^{(m)} \leq \bar{y}_0^{(m)}, \quad A(\bar{y}_0 - \underline{y}_0)^{(m-1)} \leq \begin{cases} f[\bar{y}_0] - \underline{y}_0^{(m)}, \\ \bar{y}_0^{(m)} - f[\underline{y}_0]. \end{cases}$$

Например, их можно искать в форме:

$$\begin{aligned} \bar{y}_0^{(m)} - A\bar{y}_0^{(m-1)} &= \max \{f[y] - Ay^{(m-1)}\}, \\ \underline{y}_0^{(m)} - A\underline{y}_0^{(m-1)} &= \min \{f[y] - Ay^{(m-1)}\}, \end{aligned}$$

где \max и \min берутся по указанной выше области. Хотя в определение самого числа A уже входят функции \underline{y}_0 , \bar{y}_0 , но здесь предполагается, что производные $\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}}$ равномерно ограничены настолько, что имеется возможность такого выбора функций \underline{y}_0 и \bar{y}_0 .

Если

$$(J - \Lambda)(\Delta y^{(m)}) = \varphi(t) \geq 0,$$

то отсюда следует:

$$\Delta y^{(m)} = (J - \Lambda)^{-1}(\varphi) = \varphi(t) + A \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} \varphi(\tau) d\tau \geq 0,$$

т. е. существует обратный положительный оператор $(J - \Lambda)^{-1}$.

Проверим выполнение условия теоремы для $(\Gamma + 2\Lambda)^n(\Delta y^{(m)})$. Имеем:

$$\begin{aligned} (\Gamma + 2\Lambda)^n(\Delta y^{(m)}) &= (B + 2A)^n \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^{\tau_1} \Delta y^{(m)}(\tau) d\tau \dots d\tau_{n-1} = \\ &= \frac{(B + 2A)^n}{(n-1)!} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{n-1} \Delta y^{(m)}(\tau) d\tau \leq \frac{(B + 2A)^n (t - t_0)^n}{n!} \max \Delta y^{(m)} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3)$$

при $n \rightarrow \infty$ и любой непрерывной $\Delta y^{(m)} \geq 0$.

Согласно теореме, алгоритм

$$y_{n+1}^{(m)} = f[y_n] - A \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} (y_n^{(m)} - f[y_n]) d\tau, \quad y_{n+1}^{(k)} = \alpha_k, \quad (4)$$

где $y_n^{(m)}$ равномерно сходятся при $n \rightarrow \infty$ поочередно сверху и снизу к $y^{*(m)}$ (y^* — решение уравнения (2)). В алгоритме используется уравнение первого порядка относительно неизвестной $y_{n+1}^{(m-1)}$:

$$y_{n+1}^{(m)} - Ay_{n+1}^{(m-1)} = f[y_n] - Ay_n^{(m-1)} \quad (\text{см. (1)}).$$

Быстрота сходимости порядка общего члена экспоненциального ряда:

$$|y_n^{(m)} - y^{*(m)}| \leq \frac{(B + 2A)^n (t - t_0)^n}{n!} \max(\bar{y}_0^{(m)} - \underline{y}_0^{(m)}).$$

§ 3. Дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом

Все результаты предыдущего параграфа без труда переносятся на приближенное решение уравнения

$$y^{(m)}(t) = f(t, y(t), \dots, y^{(m-1)}(t), y(t - \tau(t)), \dots, y^{(m-1)}(t - \tau(t))); \quad (5)$$

запаздывание $\tau(t) \geq 0$, начальное условие $y = \varphi(t)$ (где $\varphi(t) - (m-1)$ раз непрерывно дифференцируемая функция) задано на начальном множестве, состоящем из точки t_0 и тех t , при которых $t \geq t_0$, $t - \tau(t) \geq t_0$. Если t_0 — изолированная точка, то задаем также

$$y^{(k)}(t_0) = \alpha_k \quad (k = 0, \dots, m-1).$$

Пусть

$$\begin{aligned} C_k &\geq \frac{\partial f}{\partial y^k(t)} \geq -D_k, \\ E_k &\geq \frac{\partial f}{\partial y^k(t - \tau(t))} \geq -F_k \quad (C_k, D_k, E_k, F_k \geq 0), \\ A_k &= C_k + E_k, \quad B_k = D_k + F_k. \end{aligned}$$

Если $\Delta y^{(m)} \geq 0$, то

$$\Delta y^{(k)}(t) \geq \Delta y^{(k)}(t - \tau(t)) \geq 0,$$

так как $\tau(t) \geq 0$ и функция Δy удовлетворяет нулевым начальным условиям. Пользуясь этим обстоятельством и повторяя все предыдущие рассуждения, получаем прежний алгоритм (4), где $f[y]$ означает теперь правую часть уравнения (5). Функции $y_{n+1}^{(k)}(t - \tau(t))$ вычисляются по $y_{n+1}^{(m)}(t)$ и начальным условиям.

§ 4. Система обыкновенных дифференциальных уравнений

В системе

$$y'_k = f_k(t, y_1, y_2, \dots, y_m), \quad y_k(t_0) = \alpha_k, \quad k = 1, \dots, m,$$

$$A_{ik} \geq \frac{\partial f_i}{\partial y_k} \geq -B_{ik} \quad (A_{ik} \geq 0, B_{ik} \geq 0)$$

роль элемента x играет совокупность $\{y'_1, y'_2, \dots, y'_m\}$. В качестве операторов Λ и Γ возьмем линейные преобразования над $\{\Delta y_1, \Delta y_2, \dots, \Delta y_m\}$ с квадратной матрицей, соответственно, $\|A_{ik}\|$ и $\|B_{ik}\|$.

Из неравенства $(I - \Lambda)(\Delta x) = \varphi \geq 0$, т. е.

$$\Delta y'_k - \sum_{i=1}^m A_{ik} \Delta y_i = \varphi_k(t) \geq 0, \quad \Delta y_i(t_0) = 0,$$

следуют неравенства $\Delta y_k \geq 0$. А отсюда, так как $A_{ik} \geq 0$, следует $\Delta y'_k \geq 0$. Итак, оператор $(J - \Lambda)^{-1}$ положителен.

Легко установить, что при $A = \max A_{ik}$, $B = \max B_{ik}$

$$(\Gamma + 2\Lambda)^n(\Delta x) \leq \frac{[m(B + 2A)(t - t_0)]^n}{n!} \max \Delta y_{k0} \rightarrow 0.$$

Первоначальные приближения должны удовлетворять начальным условиям и неравенствам:

$$\underline{y}'_{k0} \leq \bar{y}'_{k0}, \quad \sum_{i=1}^m A_{ik} (\bar{y}_{i0} - \underline{y}_{i0}) \leq \begin{cases} f_k[\bar{y}_0] - \underline{y}'_{k0}, \\ \bar{y}'_{k0} - f_k[\underline{y}_0]. \end{cases}$$

Вместо A_{ik} , очевидно, можно взять A , от чего неравенство только уси-
лится. y_{k0} , \underline{y}_{k0} можно искать в форме:

$$y'_{k0} - \sum_{i=1}^m A_{ik} y_{i0} = \text{extr} \left\{ f_k[y] - \sum_{i=1}^m A_{ik} y_i \right\}.$$

Алгоритм [см. (1)]

$$y'_{k(n+1)} - \sum_{i=1}^m A_{ik} y_{i(n+1)} = f_k[y_n] - \sum_{i=1}^m A_{ik} y_{in}, \quad y_{k(n+1)}(t_0) = \alpha_k.$$

Порядок сходимости прежний.

§ 5. Интегральное уравнение

Применим теорему для интегрального уравнения

$$x(t) = \int_a^t K(i, \tau, x(\tau)) d\tau.$$

Если $A \geq \frac{\partial K}{\partial x} \geq -B$ ($A \geq 0$, $B \geq 0$), то можно принять

$$\Lambda(\Delta x) = A \int_a^t \Delta x(\tau) d\tau, \quad \Gamma(\Delta x) = B \int_a^t \Delta x(\tau) d\tau.$$

Оператор $(J - \Lambda)^{-1}$ положителен, так как из неравенства $(J - \Lambda)(\Delta x) = \varphi \geq 0$ следует $\Delta x \geq 0$,

$$\Delta x = \varphi(t) + A \int_a^t e^{A(t-\tau)} \varphi(\tau) d\tau.$$

Для последовательности $(\Gamma + 2\Lambda)^n(\Delta x)$ сохраняется оценка (3), пере-
писанная для Δx вместо $\Delta y^{(m)}$.

Первоначальные приближения должны удовлетворять неравенствам:

$$\underline{x}_0 \leq \bar{x}_0, \quad A \int_a^t (\bar{x}_0 - \underline{x}_0) d\tau \leq \begin{cases} \int_a^t K(t, \tau, \bar{x}_0) d\tau - \underline{x}_0, \\ \bar{x}_0 - \int_a^t K(t, \tau, \underline{x}_0) d\tau. \end{cases}$$

Например,

$$x_0 - A \int_a^t x_0(\tau) d\tau = \operatorname{extr}_x \left\{ \int_a^t [K(\tau, \tau, x) - Ax(\tau)] d\tau \right\}.$$

Алгоритм

$$x_{n+1} = \int_a^t K(t, \tau, x_n) d\tau - A \int_a^t e^{A(t-\tau)} \left[x_n - \int_a^\tau K(\tau, s, x_n) ds \right] d\tau.$$

Порядок сходимости прежний.

Теорему можно применить и для уравнения

$$x(t) = \lambda \int_a^b K(t, \tau, x) d\tau,$$

но при этом должны выполняться весьма жесткие условия, накладываемые на максимум λ .

Поступило
1. III. 1956

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Чаплыгин С. А., Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, М.—Л., 1950.
- ² Балув А. Н., К абстрактной теории метода С. А. Чаплыгина, Доклады Акад. наук СССР, 83, № 6 (1952), 781—784.
- ³ Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пянскер А. Г., Функциональный анализ в полупорядоченных пространствах, М.—Л., 1950.

Б. А. АНДРУНАКПЕВИЧ

АНТИПРОСТЫЕ И СИЛЬНО ИДЕМПОТЕНТНЫЕ КОЛЬЦА

(Представлено академиком И. М. Виноградовым)

В работе вводятся и изучаются ассоциативные кольца, не допускающие гомоморфных отображений на подпрямо неразложимые кольца с идемпотентной сердцевиной. Рассматривается связь этих колец с кольцами, которые не отображаются гомоморфно на подпрямо неразложимые кольца с нильпотентной сердцевиной.

Введение

В работе ⁽⁶⁾ рассматривались ассоциативные кольца, у которых всякий идемпотентный минимальный идеал* отщепляется в качестве прямого слагаемого. Там же доказана следующая основная теорема: всякое кольцо с указанным выше свойством и условием минимальности для главных идеалов представимо единственным образом в виде прямой суммы подпростого кольца в смысле Брауна — Маккоя ⁽¹³⁾, присоединенно-простого кольца [см. ⁽¹¹⁾, ⁽⁴⁾] без нильпотентных идеалов и кольца, являющегося подпрямой суммой подпрямо неразложимых колец с нильпотентной сердцевиной. Ввиду указанного результата, целесообразно рассмотреть кольца, которые представимы в виде подпрямой суммы подпрямо неразложимых колец с нильпотентной сердцевиной.

В настоящей работе рассматривается частный случай таких колец, а именно изучаются кольца, всякий гомоморфный образ которых есть подпрямая сумма подпрямо неразложимых колец с нильпотентной сердцевиной. Это — в точности кольца, не отображающиеся гомоморфно на подпрямо неразложимые кольца с идемпотентной сердцевиной. Мы их называем *антипростыми кольцами*, так как они совпадают с кольцами, всякий идеал которых не отображается гомоморфно на простые ненулевые кольца (теорема 1).

Нильпотентные, локально нильпотентные и трансфинитно нильпотентные кольца являются антипростыми кольцами. Коммутативное антипростое кольцо совпадает с квазирегулярным кольцом Джексона ⁽¹⁷⁾.

Изучение антипростых колец основывается на свойствах *простых полумаксимальных* идеалов, т. е. таких идеалов, фактор-кольца по которым

* Здесь и всюду ниже под *идеалом* понимается двусторонний идеал.

являются подпрямой неразложимыми с идемпотентной сердцевиной. В коммутативных кольцах понятие простого полумаксимального идеала совпадает с понятием простого максимального идеала.

Доказывается, что в классе ассоциативных колец определен *антипростой радикал* * R , причем R есть пересечение всех простых полумаксимальных идеалов кольца. Таким образом, R -полупростые кольца — это в точности подпрямые суммы подпрямой неразложимых колец с идемпотентной сердцевиной. В кольце с условием минимальности для всех идеалов антипростой радикал нильпотентен. Это утверждение обобщает аналогичный результат Левицкого⁽²⁴⁾ для локально нильпотентных колец. Если же в кольце выполнено условие минимальности лишь для главных идеалов, то антипростой радикал есть ниль-кольцо.

Далее в работе рассматриваются кольца, не отображающиеся гомоморфно на подпрямой неразложимые кольца с нильпотентной сердцевиной. Мы их называем *сильно идемпотентными*, так как это — в точности кольца, у которых всякий идеал идемпотентен. Показывается, что сильно идемпотентные кольца совпадают с f -регулярными ** кольцами Блэра⁽¹¹⁾, т. е. с кольцами, у которых для любого элемента a справедливо соотношение $a \in (a)^2$ ***.

Известно [см. (11)], что в классе ассоциативных колец определен *сильно идемпотентный радикал* F . В работе показано, что сильно идемпотентные кольца могут быть охарактеризованы как *сильно R -полупростые кольца*, т. е. как такие кольца, всякий гомоморфный образ которых является R -полупростым.

Обратно, антипростые кольца — это в точности *сильно F -полупростые кольца*.

В произвольном кольце K справедливо равенство

$$F(K) \cap R(K) = 0,$$

причем $R(K)$ есть наибольший среди всевозможных радикалов в смысле А. Г. Куроша, имеющих (в произвольном кольце) нулевое пересечение с $F(K)$, и, обратно, $F(K)$ есть наибольший радикал, имеющий нулевое пересечение с $R(K)$.

Заметим, что равенство $F(K) \cap R(K) = 0$ усиливает аналогичное соотношение, полученное в работах⁽¹²⁾ и⁽⁶⁾, где вместо антипростого радикала берется меньший радикал, а именно нижний радикал Бэра [см. (8)].

Наконец (§ 5), в работе устанавливается ряд результатов, относящихся к различным сильно полупростым кольцам. В частности, доказывается, что если в сильно идемпотентном кольце K аннулятор всякого простого полумаксимального идеала отличен от нуля, то K есть дискретная прямая сумма простых ненулевых колец.

* Под *радикалом* мы будем всюду понимать наиболее общее определение этого понятия, данное в работе А. Г. Куроша [см. (22), стр. 15—16].

** Нам кажется, что термин *сильно идемпотентное кольцо* является более подходящим.

*** (a) обозначает идеал, порожденный элементом a .

Это утверждение обобщает теорему Уодделя ⁽³¹⁾ о бирегулярных кольцах [см. (7)].

§ 1. Определение и примеры антипростых колец

Согласно известной теореме Биркгофа ⁽⁹⁾, всякое ненулевое кольцо представимо в виде подпрямой суммы подпрямо неразложимых колец.

Кольцо K называется *подпрямо неразложимым* *, если в любом его изоморфном представлении в виде подпрямой суммы имеется слагаемое, изоморфное K . Это равносильно тому, что в кольце K пересечение всех ненулевых идеалов есть также ненулевой идеал. В дальнейшем этот единственный минимальный идеал будем называть *сердцевиной* подпрямо неразложимого кольца K и обозначать его через C . Так как $C^2 \subseteq C$, то сердцевина подпрямо неразложимого кольца является либо нильпотентным кольцом, причем тогда уже $C^2 = 0$, либо идемпотентным кольцом, т. е. $C^2 = C$.

Для произвольного кольца K эквивалентны следующие условия:

I.1. Кольцо K не отображается гомоморфно на подпрямо неразложимые кольца с идемпотентной сердцевиной.

I.2. Всякий ненулевой гомоморфный образ кольца K представим в виде подпрямой суммы подпрямо неразложимых колец с нильпотентной сердцевиной.

Замечание 1. Всякий гомоморфный образ кольца K с условием I.1 также удовлетворяет условию I.1.

Действительно, если гомоморфный образ некоторого кольца K отображается гомоморфно на подпрямо неразложимое кольцо с идемпотентной сердцевиной, то само K также отображается гомоморфно на это кольцо и поэтому не удовлетворяет условию I.1.

Выведем сначала условие I.2 из условия I.1. Для этой цели представим кольцо K в виде подпрямой суммы подпрямо неразложимых колец. Ввиду условия I.1, все слагаемые в этом представлении кольца K должны иметь нильпотентную сердцевину, а потому, в силу замечания 1, и любой гомоморфный образ кольца K имеет аналогичное представление.

Выведем, теперь, условие I.1 из условия I.2. Допустим, что кольцо K гомоморфно отображается на подпрямо неразложимое кольцо \bar{K} с идемпотентной сердцевиной. Тогда, по условию I.2, кольцо \bar{K} изоморфно некоторому подпрямо неразложимому кольцу с нильпотентной сердцевиной, что, очевидно, невозможно.

Определение 1. Кольцо K назовем *антипростым*, если оно удовлетворяет одному из условий I.1 и I.2.

Заметим, что не всякая подпрямая сумма подпрямо неразложимых колец с нильпотентной сердцевиной является антипростым кольцом. Действительно, существуют коммутативные подпрямо неразложимые кольца с нильпотентной сердцевиной, отображающиеся гомоморфно на поле [см., например, ⁽²⁶⁾].

* Кольцо 0 к подпрямо неразложимым кольцам не причисляется.

Ясно, что нильпотентное кольцо является антипростым.

Определим теперь, как это делается обычно, трансфинитную степень K^λ некоторого кольца K , следующими условиями:

$$K^1 = K;$$

$$K^\lambda = K^{\lambda-1}, \text{ если } \lambda - 1 \text{ существует};$$

$$K^\lambda = \bigcap_{\nu < \lambda} K^\nu, \text{ если } \lambda - \text{предельное порядковое.}$$

Если существует такое λ , что $K^\lambda = 0$, то K называется *трансфинитно нильпотентным* кольцом. Так как всякий гомоморфный образ трансфинитно нильпотентного кольца K является кольцом такого же рода, то трансфинитно нильпотентные кольца будут антипростыми.

Напомним, что кольцо K называется *локально нильпотентным* [см. (23)], если всякое конечное множество его элементов порождает нильпотентное кольцо. Любой гомоморфный образ, а также всякий идеал локально нильпотентного кольца являются локально нильпотентными кольцами.

Сумма всех локально нильпотентных идеалов некоторого кольца есть также локально нильпотентный идеал. Этот единственный максимальный локально нильпотентный идеал R_1 называется радикалом Левицкого.

ЛЕММА 1 [см. (8)]. *В произвольном кольце K всякий идемпотентный минимальный идеал есть простое кольцо.*

ЛЕММА 2. *Простое локально нильпотентное кольцо является нильпотентным.*

Действительно, в силу теоремы Левицкого (24), всякое локально нильпотентное кольцо с условием минимальности для идеалов нильпотентно.

Следствие 1. *Простое ненулевое кольцо является полупростым в смысле Левицкого, т. е. $R_1 = 0$.*

Следствие 2. *Всякое локально нильпотентное кольцо есть антипростое кольцо.*

Действительно, предположим, что локально нильпотентное кольцо K отображается гомоморфно на подпрямо неразложимое кольцо \bar{K} с идемпотентной сердцевиной \bar{C} . Тогда прообраз C в \bar{K} был бы локально нильпотентным кольцом, отображающимся гомоморфно, в силу леммы 1, на простое ненулевое кольцо \bar{C} , что противоречит следствию 1.

Если бы удалось доказать, что всякое простое ниль-кольцо является локально нильпотентным, то отсюда следовала бы антипростота любого ниль-кольца.

Напомним, что кольцо называется *присоединенно-простым* [см. (21), (13), (4)], если оно не допускает гомоморфных отображений на ненулевые кольца с единицей, или, что то же самое, на простые кольца с единицей.

Присоединенно-простые кольца являются обобщением квазирегулярных колец Джекобсона (17) и совпадают с ними в коммутативном случае. Так как простое кольцо с единицей является подпрямо неразложимым с идемпотентной сердцевиной, то всякое антипростое кольцо является присоединенно-простым.

Обратное утверждение неверно, как показывает пример простого ненулевого кольца без единицы.

ЛЕММА 3. *Коммутативное подпрямо неразложимое кольцо K с идемпотентной сердцевиной является полем.*

Действительно, как хорошо известно, в коммутативном кольце всякий идемпотентный минимальный идеал является полем и отщепляется в качестве прямого слагаемого. Так как кольцо K подпрямо неразложимое, то его идемпотентная сердцевина совпадает с самим K , т. е. K есть поле.

Следствие 3. *В коммутативных кольцах понятия антипростоты, присоединенной простоты и квазирегулярности совпадают.*

Так как существуют коммутативные квазирегулярные кольца без нильпотентных элементов [см., например, ⁽³⁾], то из следствия 3 вытекает, что не всякое антипростое кольцо является ниль-кольцом.

§ 2. Антипростые кольца и простые полумаксимальные идеалы

Из определения антипростого кольца K следует, что в нем отсутствуют такие идеалы, отличные от самого K , фактор-кольца по которым являются подпрямо неразложимыми с идемпотентной сердцевиной. Дальнейшее изучение антипростых колец основывается на свойствах указанных выше идеалов, которые и рассматриваются в настоящем параграфе.

Напомним, что идеал P , отличный от самого кольца K , называется *простым*, если из соотношения $AB \subseteq P$, где A и B — идеалы в K , следует хотя бы одно из соотношений $A \subseteq P$ или $B \subseteq P$. Кольцо K называется *первичным* [см. ⁽²⁷⁾], если нулевой идеал является простым. Очевидно, идеал P в кольце K является простым тогда и только тогда, когда фактор-кольцо K/P есть первичное кольцо. Первичные кольца рассматривались в работах Маккоя и Джонсона [см. ⁽²⁷⁾, ⁽¹⁸⁾, ⁽¹⁹⁾, ⁽²⁸⁾].

Коммутативные первичные кольца — это в точности кольца без делителей нуля.

ЛЕММА 4. *Кольцо K является подпрямо неразложимым с идемпотентной сердцевиной тогда и только тогда, когда оно первично и содержит минимальный идеал.*

Действительно, пусть первичное кольцо K содержит минимальный идеал C . Ясно, что $C^2 = C$. Если теперь A — произвольный ненулевой идеал, то $AC \neq 0$ и поэтому $AC = C$, откуда $A \supseteq C$. Таким образом, K — подпрямо неразложимое кольцо с идемпотентной сердцевиной C .

Обратно, пусть K — подпрямо неразложимое кольцо с идемпотентной сердцевиной C . Если A и B — произвольные ненулевые идеалы, то $A \supseteq C$, $B \supseteq C$ и поэтому

$$AB \supseteq C^2 = C \neq 0,$$

т. е. K — первичное кольцо с минимальным идеалом C .

Из определения антипростого кольца и предыдущей леммы следует, что антипростые кольца — это кольца, не допускающие гомоморфных отображений на первичные кольца с минимальным идеалом.

Определение 2. Идеал P произвольного кольца K назовем *простым полумаксимальным идеалом*, если P — простой идеал, причем существует идеал Q , покрывающий (в структурном смысле) P , т. е. $P \not\supset Q$.

Ясно, что всякий простой максимальный идеал является и простым полумаксимальным идеалом. Не всякий простой идеал является простым полумаксимальным идеалом. Действительно, в кольце целых чисел нулевой идеал является простым, но, очевидно, не покрывается никаким идеалом.

С другой стороны, не всякий простой полумаксимальный идеал будет максимальным. Действительно, во всяком подпрямо неразложимом кольце K с идемпотентной сердцевиной S и не совпадающим с S (например, в кольце всех линейных преобразований бесконечномерного векторного пространства над некоторым телом) нулевой идеал, в силу леммы 4, является простым полумаксимальным, но не максимальным идеалом.

ЛЕММА 5. *Идеал P будет простым полумаксимальным в кольце K тогда и только тогда, когда фактор-кольцо $\bar{K} = K/P$ подпрямо неразложимо с идемпотентной сердцевиной.*

Действительно, если P — простой полумаксимальный идеал в K , причем $P \rightarrow Q$, то фактор-кольцо $\bar{K} = K/P$ первично и $\bar{0} \rightarrow \bar{Q}$, где $\bar{Q} = Q/P$. По лемме 4, фактор-кольцо \bar{K} подпрямо неразложимо с идемпотентной сердцевиной.

Обратно, если фактор-кольцо $\bar{K} = K/P$ является подпрямо неразложимым с идемпотентной сердцевиной \bar{Q} , то, по лемме 4, $\bar{0}$ кольца \bar{K} есть простой полумаксимальный идеал, причем $\bar{0} \rightarrow \bar{Q}$. Отсюда следует, что P будет простым идеалом, причем $P \rightarrow Q$, где Q — прообраз идеала \bar{Q} .

Замечание 2. Из определения антипростого кольца и леммы 4 следует, что антипростое кольцо — это такое кольцо, у которого нет простых полумаксимальных идеалов.

Отметим также, что, в силу сказанного выше, подпрямо неразложимые кольца с идемпотентной сердцевиной могут быть охарактеризованы как такие кольца, у которых нулевой идеал является простым полумаксимальным идеалом.

Из лемм 3 и 4 вытекает следующее утверждение:

В коммутативных кольцах всякий простой полумаксимальный идеал является простым максимальным идеалом.

Из леммы 1 получаем

Следствие 4. *Если P — простой полумаксимальный идеал в K с покрывающим идеалом Q ; то P является простым максимальным идеалом в кольце Q .*

Действительно, в фактор-кольце $\bar{K} = K/P$ идеал $\bar{Q} = Q/P$ есть идемпотентный минимальный идеал.

Замечание 3. В кольце K с условием минимальности для идеалов всякий простой идеал является простым полумаксимальным идеалом.

Действительно, пусть $P \neq K$ есть простой идеал. В силу условия минимальности, среди идеалов, строго содержащих P , существует минимальный.

Пусть K — произвольное ассоциативное кольцо. Под левым аннулятором A^l некоторого идеала A будем понимать, как обычно, идеал, состоящий из всех таких элементов x кольца K , что $xA = 0$. Аналогично определяется правый аннулятор A^r . Наконец, под аннулятором A^* идеа-

ла A будем понимать идеал

$$A^* = A^l \cap A^r,$$

т. е. совокупность всех таких x из K , что $xA = Ax = 0$.

ЛЕММА 6. Если кольцо без нильпотентных идеалов A является идеалом в некотором кольце K , то $A^* = A^l = A^r$ и $A \cap A^* = 0$.

Действительно,

$$(A^r A)^2 = A^r A A^r A = 0$$

и так как AA есть идеал в кольце без нильпотентных идеалов A , то $A^r A = 0$, т. е. $A^r \subseteq A^*$ и поэтому $A^r = A^*$. Аналогично получим $A^l = A^*$. Далее,

$$(A^* \cap A)^2 \subseteq A^* A = 0,$$

а потому $A^* \cap A = 0$. Отсюда, между прочим, следует, что аннулятор A^* является наибольшим среди всех идеалов кольца K , имеющих нулевое пересечение с A .

ЛЕММА 7. Если первичное кольцо A является идеалом в некотором кольце K , то аннулятор A^* есть простой идеал.

Действительно, пусть B и C — два таких идеала кольца K , что $B \not\subseteq A^*$ и $BC \subseteq AA^*$. Умножив обе части последнего соотношения слева и справа на A , получим:

$$(AB)(CA) \subseteq AA^*A = 0,$$

причем AB и CA — идеалы в первичном кольце A . Следовательно, по меньшей мере один из идеалов AB и CA есть нулевой идеал. По предположению, $B \not\subseteq A^*$, а потому $CA = 0$, т. е. $C \subseteq A^l = A^*$, что доказывает лемму.

Следствие 5. В произвольном кольце аннулятор любого идемпотентного минимального идеала является простым полумаксимальным идеалом.

Действительно, так как идемпотентный минимальный идеал A является простым кольцом и, следовательно, первичным, то, в силу леммы 7, аннулятор A^* есть простой идеал, причем $A^* \cap A = 0$.

По теореме об изоморфизме,

$$\frac{A^* + A}{A^*} \cong \frac{A}{A^* \cap A} \sim A,$$

т. е. простой идеал A^* покрывается идеалом $A^* + A$.

ЛЕММА 8. Если ненулевой идеал B кольца K содержится в идеале A , причем A есть первичное кольцо, то $B^* = A^*$.

Действительно, во-первых, из соотношения $B \subseteq A$ следует $B^* \subseteq A^*$. Если теперь обозначим через B_A^* аннулятор идеала B в кольце A , то $B_A^* = B^* \cap A$. Так как B — ненулевой идеал, то, ввиду первичности кольца A , получим $B_A^* = 0$, т. е. $B^* \cap A = 0$ и, тем более, $B^* A = 0$. Следовательно, $B^* \subseteq A^l = A^*$.

ЛЕММА 9 [см. (6)]. Пусть B — произвольный идеал в некотором кольце K . Если идеал A кольца B идемпотентен, то A будет идеалом и в K .

ЛЕММА 10. Если подпрямое неразложимое кольцо B с идемпотентной сердцевиной является идеалом в кольце K , то аннулятор B^* есть простой полумаксимальный идеал.

Действительно, пусть C — сердцевина кольца B . Ввиду леммы 9 и следствия 5, аннулятор C^* есть простой полумаксимальный идеал. С другой стороны, в силу лемм 4 и 8, $C^* = B^*$.

ЛЕММА 11. Всякий ненулевой идеал подпрямое неразложимого кольца с идемпотентной сердцевиной является кольцом такого же рода.

Сделаем сначала одно замечание. Если K — первичное кольцо и B — ненулевой идеал, то из $Ba = 0$, где a — элемент кольца K , следует $a = 0$. Действительно, из $Ba = 0$ вытекает $B(a) = 0$, где (a) — главный идеал в K , а потому $a = 0$. Аналогично, из $aB = 0$ следует $a = 0$.

Пусть теперь B — ненулевой идеал подпрямое неразложимого кольца K с идемпотентной сердцевиной C и A — ненулевой идеал в кольце B . Покажем, что $A \supseteq C$. В силу леммы 4 и сделанного выше замечания, $BA \neq 0$ и поэтому $BAB \neq 0$. Но BAB является идеалом в кольце K и поэтому $BAB \supseteq C$. С другой стороны, так как A — идеал в кольце B , то $A \supseteq BAB$. Следовательно, $A \supseteq C$.

ЛЕММА 12*. Пусть A — идеал в произвольном кольце K , а B — идеал в кольце A . Если в фактор-кольце $\bar{A} = A/B$ справедливы равенства $\bar{A}^l = \bar{A}^r = 0$ (в частности, если \bar{A} — кольцо без нильпотентных идеалов), то B является идеалом в K .

Действительно, во-первых, $BK \subseteq AK \subseteq A$ и $BKA \subseteq BA \subseteq B$. Перейдя теперь к фактор-кольцу $\bar{A} = A/B$, получим: $\bar{B}\bar{K} \cdot \bar{A} = 0$. Отсюда, ввиду предположения о кольце \bar{A} , следует $\bar{B}\bar{K} = 0$, т. е. $BK \subseteq B$. Аналогично, $KB \subseteq B$.

Установим следующие свойства простых полумаксимальных идеалов:

II.1. Если \bar{K} — гомоморфный образ некоторого кольца K , то идеал \bar{P} является простым полумаксимальным в \bar{K} тогда и только тогда, когда его прообраз P — простой полумаксимальный в K .

II.2. Если простой полумаксимальный идеал P кольца K не содержит целиком идеала A , то $P \cap A$ является простым полумаксимальным идеалом в кольце A .

II.3. Если P' — простой полумаксимальный идеал в кольце A , где A — идеал кольца K , то в K существует такой простой полумаксимальный идеал P , что $P' = P \cap A$.

Свойство II.1 непосредственно следует из соотношения $K/P \cong \bar{K}/\bar{P}$ и леммы 5.

Свойство II.2 есть просто другая формулировка леммы 11. Выведем сначала свойство II.2 из леммы 11. По теореме об изоморфизме,

$$\frac{A}{A \cap P} \cong \frac{A + P}{P}.$$

Слева стоит ненулевое кольцо. Оно будет подпрямое неразложимым кольцом с идемпотентной сердцевиной, так как справа стоит ненулевой идеал подпрямое неразложимого кольца K/P с идемпотентной сердцевиной, который, в силу леммы 11, есть такое же кольцо.

* См. также (20), лемма 2.1.

Обратно, пусть выполнено свойство II.2 и B есть ненулевой идеал подпрямой неразложимого кольца K с идемпотентной сердцевинной. Так как 0 есть простой полумаксимальный идеал в K , то, по свойству II.2, $B \cap 0 = 0$ будет простым полумаксимальным идеалом в кольце B . Таким образом, кольцо B является подпрямой неразложимым с идемпотентной сердцевинной.

Выведем теперь свойство II.3. В силу леммы 12, P' является идеалом в кольце K . Перейдем теперь к фактор-кольцу $\bar{K} = K/P'$ и рассмотрим идеал $\bar{A} = A/P'$. Этот идеал есть подпрямой неразложимое кольцо, так как, по предположению, P' — простой полумаксимальный идеал в A . В силу леммы 10, аннулятор \bar{P} идеала \bar{A} является простым полумаксимальным идеалом в \bar{K} , причем $\bar{P} \cap \bar{A} = \bar{0}$. Прообраз P идеала \bar{P} , в силу свойства II.1, будет простым полумаксимальным идеалом в K , причем $P \cap A = P'$, что и требовалось показать.

Из сделанного замечания в конце доказательства леммы 6 следует, что P есть максимальный среди идеалов кольца K , имеющих с A пересечение P .

Из свойств II.2 и II.3 легко вытекает утверждение:

Соответствие $P \rightarrow P \cap A$ есть взаимно однозначное отображение множества простых полумаксимальных идеалов P кольца K , не содержащих целиком идеала A , на множество простых полумаксимальных идеалов кольца A .

Очевидно, нужно проверить только взаимную однозначность соответствия $P \rightarrow P \cap A$. Пусть

$$P_1 \cap A = P_2 \cap A.$$

Тогда $P_1 A \subseteq P_2$ и $P_2 A \subseteq P_1$ и, ввиду простоты идеалов P_1 и P_2 и соотношений $A \not\subseteq P_1$, $A \not\subseteq P_2$, получим $P_1 \subseteq P_2$ и $P_2 \subseteq P_1$, т. е. $P_1 = P_2$.

ЛЕММА 13. *Всякий идеал B антипростого кольца K есть также антипростое кольцо.*

Действительно, предположим, что идеал B не является антипростым кольцом. В силу замечания 2, в кольце B существует простой полумаксимальный идеал P' , а потому, по свойству II.3, и в K имеется простой полумаксимальный идеал, что противоречит тому же замечанию 2.

ТЕОРЕМА 1. *Кольцо K является антипростым тогда и только тогда, когда любой его идеал не отображается гомоморфно на простое ненулевое кольцо.*

Действительно, антипростое кольцо K не отображается гомоморфно на простое ненулевое кольцо. Ввиду леммы 13, любой идеал кольца K обладает этим же свойством.

Пусть теперь кольцо K не антипростое. Тогда K гомоморфно отображается на подпрямой неразложимое кольцо \bar{K} с идемпотентной сердцевинной \bar{C} . Прообраз C является идеалом в K , гомоморфно отображающимся на простое ненулевое кольцо \bar{C} .

§ 3. Антипростой радикал кольца

В последнее время в работах А. Г. Куроша⁽²²⁾ и С. Амипура [см. (22), (1), (2)] начато построение общей теории радикалов. Напомним, как вводится в работе (22) наиболее общее понятие радикала в ассоциативных кольцах.

Рассматривается класс колец, обладающих некоторым свойством S , или, короче, S -кольцо. Идеал кольца K , являющийся S -кольцом, называется S -идеалом. Если кольцо K обладает таким S -идеалом R , в котором содержится всякий другой S -идеал этого кольца, то идеал R называется S -радикалом кольца K . Наконец, кольцо K , не содержащее ненулевых S -идеалов, называется S -полупростым.

Говорят, что в классе ассоциативных колец определен S -радикал, если свойство S удовлетворяет следующим требованиям:

III.1. Гомоморфный образ S -кольца есть S -кольцо.

III.2. Всякое кольцо обладает S -радикалом.

III.3. Фактор-кольцо любого кольца по его S -радикалу S -полупросто.

Из III.1 следует, что нуль является S -кольцом, а поэтому S -полупростое кольцо можно определить как такое кольцо, S -радикал которого равен нулю.

В той же работе А. Г. Куроша доказано, что требования III.1 — III.3 эквивалентны следующим условиям:

IV.1. Гомоморфный образ S -кольца есть S -кольцо.

IV.2. Всякое кольцо, любой ненулевой гомоморфный образ которого обладает ненулевым S -идеалом, есть S -кольцо.

Возьмем в качестве свойства S антипростоту кольца. В силу замечания 1, антипростые кольца удовлетворяют условию IV.1. Покажем, что антипростые кольца удовлетворяют и условию IV.2.

Действительно, пусть K — не антипростое кольцо. Тогда K гомоморфно отображается на подпрямое неразложимое кольцо \bar{K} с идемпотентной сердцевиной. В силу леммы 11, всякий ненулевой идеал кольца \bar{K} есть подпрямое неразложимое кольцо с идемпотентной сердцевиной. Следовательно, кольцо \bar{K} не содержит ненулевых антипростых идеалов.

Из сказанного выше следует

ТЕОРЕМА 2. В классе ассоциативных колец определен антипростой радикал.

В дальнейшем антипростой радикал кольца K будет обозначаться через $R(K)$ или просто R .

ТЕОРЕМА 3. Если A — произвольный идеал кольца K , то $R(A) = A \cap R$.

Действительно, так как фактор-кольцо $A/R(A)$ не содержит нильпотентных идеалов, то, в силу леммы 12, $R(A)$ является антипростым идеалом в кольце K и поэтому

$$R(A) \subseteq A \cap R.$$

С другой стороны, по лемме 13, $A \cap R$ есть антипростой идеал в кольце A , а потому

ТЕОРЕМА 4. *Антипростой радикал R кольца K есть пересечение всех его простых полумаксимальных идеалов P_α .*

Доказательство. Покажем сначала, что $R \subseteq \bigcap_\alpha P_\alpha$. Предположим, что в кольце K существует простой полумаксимальный идеал P_α , не содержащий целиком R . Тогда, по свойству II.2, $R \cap P_\alpha$ является простым полумаксимальным идеалом в R , что противоречит антипростоте кольца R .

Докажем теперь, что идеал $T = \bigcap_\alpha P_\alpha$ есть антипростой идеал. Допустим, что это неверно. Тогда в кольце T существует простой полумаксимальный идеал P' и, по свойству II.3, $P' = P_\alpha \cap T$ для некоторого α . Так как $P' \neq T$, то из последнего равенства следует $T \not\subseteq P_\alpha$, что противоречит определению T .

Следствие 6. *Кольцо K есть R -полупростое кольцо тогда и только тогда, когда оно изоморфно подпрямой сумме подпрямо неразложимых колец с идемпотентной сердцевиной.*

Так как R -полупростое кольцо не содержит нильпотентных идеалов, то, в силу теоремы Веддерберна — Артина, такое кольцо с условием минимальности для правых идеалов является конечной прямой суммой полных матричных колец над некоторым телом.

Легко доказать следующее утверждение:

Если в кольце K всякий ненулевой идеал содержит идемпотентный минимальный идеал, то K есть R -полупростое кольцо.

Действительно, пусть $R \neq (0)$. По предположению, R содержит идемпотентный минимальный идеал, т. е. простое ненулевое кольцо, что противоречит лемме 13.

ЛЕММА 14. *Если ненулевое идемпотентное кольцо K порождается (как идеал) конечным числом элементов, то K содержит простые максимальные идеалы, т. е. гомоморфно отображается на простые ненулевые кольца.*

Действительно, пусть $K^2 = K = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Без ограничения общности можно предположить, что $a_i \in (a_1, a_2, \dots, a_{i-1})$. Рассмотрим идеал

$$B = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \neq K.$$

Так как $a_n \notin B$, то, в силу принципа максимального элемента, среди идеалов, охватывающих B и не содержащих элемента a_n , существует максимальный идеал M . Ясно, что M является максимальным идеалом в кольце K , причем, ввиду идемпотентности K , фактор-кольцо $\bar{K} = K/M$ также идемпотентно, т. е. M — простой идеал. Если $n = 1$, то лемма очевидна.

Из теоремы 1 и леммы 14 вытекает

ЛЕММА 15. *В произвольном кольце K всякий ненулевой идеал B , порожденный конечным числом элементов и содержащийся в радикале R , удовлетворяет соотношению $B^2 \neq B$.*

В связи с леммой 15 возникает вопрос: будет ли во всяком антипростом кольце, для любого ненулевого идеала B , справедливо соотношение $B^2 \neq B$? Нет, не будет, так как известно, что существуют коммутативные идемпотентные ниль-кольца, т. е. коммутативные идемпотентные антипростые кольца.

Определим теперь индуктивно в произвольном кольце K невозрастающую последовательность идеалов:

$$K^{2^0} = K;$$

$$K^{2^\alpha} = (K^{2^{\alpha-1}})^2, \text{ если } \alpha - 1 \text{ существует;}$$

$$K^{2^\alpha} = \bigcap_{\beta < \alpha} K^{2^\beta}, \text{ если } \alpha - \text{предельное порядковое.}$$

ТЕОРЕМА 5. Если в кольце K выполнено условие максимальности для идеалов, то существует такое α , что $K^{2^\alpha} = 0$.

Это утверждение непосредственно вытекает из условия максимальности и леммы 15.

ТЕОРЕМА 6. В кольце K с условием минимальности для идеалов антипростой радикал R есть нильпотентное кольцо.

Доказательство. В силу теоремы 4 и замечания 3, в кольце K с условием минимальности для идеалов радикал R есть пересечение всех простых идеалов из K . Но известно [см. (25)], что в произвольном кольце пересечение всех простых идеалов совпадает с нижним радикалом Бэра (8), который содержится в локально нильпотентном радикале кольца. Последний, как известно [см. (24)], в кольце с условием минимальности для идеалов есть нильпотентное кольцо. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 7. В кольце K с условием минимальности для главных идеалов антипростой радикал R есть ниль-кольцо.

Действительно, если a — произвольный элемент из R и (a) — главный идеал в K , то, ввиду леммы 15, получим:

$$(a) \supset (a)^2 \supseteq (a^2) \supset (a^2)^2 \supseteq (a^4) \supset \dots,$$

откуда

$$(a) \supset (a^2) \supset (a^4) \supset \dots$$

В силу условия минимальности для главных идеалов, существует такое целое n , что $a^{2^n} = 0$.

Следствие 7. В кольце с условием минимальности для главных идеалов антипростой радикал содержится в радикале Джекобсона.

Действительно, как известно [см. (17)], радикал Джекобсона содержит все ниль-идеалы кольца.

Как обычно, кольцо всех матриц порядка n с элементами из некоторого кольца K будем обозначать через K_n .

ЛЕММА 16. Если кольцо K — кольцо с единицей, то K_n будет подпрямой неразложимым кольцом с идемпотентной сердцевинной тогда и только тогда, когда и K — такое же кольцо.

Действительно, так как кольцо K имеет единицу, то между идеалами I кольца K и идеалами I_n кольца K_n существует взаимно однозначное соответствие $I \rightarrow I_n$, причем из $I \subseteq J$, очевидно, следует $I_n \subseteq J_n$, т. е. при этом соответствии сохраняется пересечение. Следовательно, пересечение S всех ненулевых идеалов кольца K будет отличным от нуля тогда и только тогда, когда пересечение S_n всех ненулевых идеалов из K_n также отлично от нуля. Далее, легко видеть, что $C^2 \neq 0$ в том и только в том случае, если $C_n^2 \neq (0)$ и поэтому сердцевина S будет идемпотентной тогда и только тогда, когда сердцевина S_n идемпотентна.

ТЕОРЕМА 8. Если R — антипростой радикал произвольного кольца K , то антипростой радикал полного матричного кольца K_n есть R_n , т. е. $R(K_n) = [R(K)]_n$.

Предположим сначала, что кольцо K имеет единицу. Если I — некоторый идеал K , то, как легко видеть,

$$(K/I)_n \cong K_n/I_n.$$

Отсюда и из лемм 4 и 16 следует, что P_n будет простым полумаксимальным идеалом в кольце K_n тогда и только тогда, когда P — простой полумаксимальный идеал в K . Далее, в силу теоремы 4, получим:

$$R(K_n) = \bigcap_{\alpha} (P_{\alpha})_n = (\bigcap_{\alpha} P_{\alpha})_n = [R(K)]_n.$$

Пусть теперь кольцо K не имеет единицы. Тогда, как известно, кольцо K можно вложить в кольцо с единицей K' таким образом, что K будет идеалом в K' . По теореме 3,

$$R(K) = K \cap R(K').$$

Отсюда, перейдя к кольцу матриц K'_n , получим:

$$[R(K)]_n = K_n \cap [R(K')]_n.$$

Но $[R(K')]_n = R(K'_n)$, так как кольцо K' имеет единицу. Если теперь учесть, что K_n является идеалом в K'_n , то, применив еще раз теорему 3, получим:

$$[R(K)]_n = K_n \cap R(K'_n) = R(K_n).$$

Теорема доказана.

Следствие 8. Полное матричное кольцо K_n будет антипростым тогда и только тогда, когда само кольцо K антипростое.

§ 4. Сильно идемпотентные кольца и антипростой радикал

Для произвольного кольца K эквивалентны следующие условия:

V.1. Кольцо K не отображается гомоморфно на подпрямую неразложимые кольца с нильпотентной сердцевиной.

V.2. Всякий ненулевой гомоморфный образ кольца K представим в виде подпрямой суммы подпрямых неразложимых колец с идемпотентной сердцевиной.

V.3. Любой идеал кольца K есть пересечение всех простых полумаксимальных идеалов, его содержащих.

V.4. Всякий идеал кольца K идемпотентен.

Заметим, что условие V.2 выводится из условия V.1 точно так же, как условие I.2 из I.1.

Выведем условие V.3 из условия V.2. Отметим сначала, что условие V.2, ввиду следствия 6, равносильно следующему утверждению: всякий гомоморфный образ кольца K есть R -полупростое кольцо.

Пусть B — произвольный идеал кольца K с условием V.2. Факторкольцо $\bar{K} = K/B$ является R -полупростым, а потому, в силу теоремы 4, $\bar{0} = \bigcap_{\alpha} \bar{P}_{\alpha}$, где \bar{P}_{α} пробегает все простые полумаксимальные идеалы

кольца \bar{K} . Перейдя к кольцу K , получим $B = \bigcap_{\alpha} P_{\alpha}$, где P_{α} — все простые полумаксимальные идеалы кольца K , содержащие идеал B .

Выведем теперь условие V.4 из условия V.3. Пусть B — произвольный идеал в кольце K с условием V.4. Так как B и B^2 , очевидно, содержатся в одних и тех же простых идеалах, то $B = B^2$.

Наконец, легко видеть, что условие V.1 следует из условия V.4. Действительно, всякий гомоморфный образ кольца с условием V.4 является кольцом такого же рода.

Кольцо K , удовлетворяющее одному из условий V.1—V.4, назовем *сильно идемпотентным*.

Напомним, что кольцо K называется *f-регулярным* [см. (11)], если для любого элемента a из K справедливо соотношение $a \in (a)^2$, где (a) — главный идеал в K . Ясно, что всякое сильно идемпотентное кольцо является *f-регулярным*, так как соотношение $a \in (a)^2$ равносильно равенству $(a) = (a)^2$. Обратно, пусть K — *f-регулярное* кольцо. Тогда для любых двух идеалов A и B справедливо равенство

$$A \cap B = AB.$$

Действительно, если $a \in A \cap B$, то

$$(a) = (a)^2 \subseteq AB$$

и, следовательно, $A \cap B \subseteq AB$. Так как всегда $AB \subseteq A \cap B$, то

$$A \cap B = AB.$$

Положив в последнем равенстве $B = A$, получим $A = A^2$. Таким образом, сильно идемпотентные кольца — это в точности *f-регулярные* кольца.

Если в качестве свойства S (см. § 3) взять сильную идемпотентность кольца, то в классе ассоциативных колец определен *сильно идемпотентный радикал* F [см. (11)]. Радикал F есть пересечение всех таких идеалов T_{α} , что фактор-кольца K/T_{α} являются подпрямо неразложимыми с нильпотентной сердцевиной. Таким образом, F -полупростые кольца — это в точности подпрямые суммы подпрямо неразложимых колец с нильпотентной сердцевиной. В работах (12) и (6) было доказано, что для любого идеала B некоторого кольца K справедливо равенство

$$F(B) = B \cap F(K).$$

В частности, всякий идеал сильно идемпотентного кольца есть сильно идемпотентное кольцо.

В произвольном кольце K имеют место следующие соотношения:

1. $F \cap R = 0$;
2. $R \subseteq F^*$, $F \subseteq R^*$;
3. $F \cap F^* = 0$;
4. $R = R(F^*)$, $F = F(R^*)$.

Доказательство. Если $a \in F \cap R$, то идеал (a) является одновременно R -полупростым и R -радикальным кольцом, а потому $a = 0$, т. е. $F \cap R = 0$. Из свойства 1 следует:

$$FR = RF = 0,$$

откуда получаем соотношения 2. Далее, легко проверить, что для любого идеала B кольца K справедливо равенство

$$F \cap B = FB,$$

а потому

$$F \cap F^* = FF^* = 0.$$

Наконец, из первого соотношения 2 и теоремы 3 получим:

$$R = R \cap F^* = R(F^*).$$

Аналогично,

$$F = F \cap R^* = F(R^*).$$

Заметим, что соотношения 1, 2, 4 являются улучшением аналогичных соотношений, полученных в работах ⁽¹²⁾ и ⁽⁶⁾, где вместо антипростого радикала берется меньший радикал, а именно, нижний радикал Бэра [см. ⁽⁸⁾].

Напомним, что кольцо K называется *регулярным* [см. ⁽³⁰⁾], если для любого элемента a из K существует такой элемент x в K , что $a = axa$.

Если за свойство S взять *регулярность кольца*, то в классе ассоциативных колец определен *регулярный радикал* M [см. ⁽¹⁴⁾]. Так как всякое регулярное кольцо является сильно идемпотентным, то $M \subseteq F$. Имеет место

ТЕОРЕМА 9. *В кольце с условием минимальности для главных правых идеалов сильно идемпотентный радикал совпадает с регулярным радикалом.*

Доказательство. В силу сказанного выше, достаточно установить соотношение $F \subseteq M$. В работе ⁽⁶⁾ (теорема 13) доказано, что в кольце с условием минимальности для главных правых идеалов сильно идемпотентный радикал F есть дискретная прямая сумма простых ненулевых колец с минимальными правыми идеалами. Но всякое простое ненулевое кольцо с минимальными правыми идеалами изоморфно плотному кольцу линейных преобразований конечного ранга подходящего векторного пространства над некоторым телом [см. ⁽¹⁶⁾, теорема 9]. Последнее [см. ⁽¹¹⁾, лемма 7] есть регулярное кольцо. Так как дискретная прямая сумма регулярных колец есть регулярное кольцо, то сильно идемпотентный радикал F является регулярным кольцом, а потому $F \subseteq M$. Теорема доказана.

Заметим, что теорема 9 обобщает аналогичный результат Блэра [см. ⁽¹²⁾, теорема 4], где предполагалось выполнение условия минимальности для всех правых идеалов.

Пусть T — некоторый S -радикал кольца. Кольцо K назовем *сильно T -полупростым*, если всякий его гомоморфный образ есть T -полупростое кольцо *.

Из свойств V.2 и I.2 следует, что сильно идемпотентные кольца — это в точности сильно R -полупростые кольца, а антипростые кольца — это в точности сильно F -полупростые кольца. Таким образом, сильно идемпотентный радикал F может быть охарактеризован как сильно

* См. также ⁽²⁾, определение 7.2.

R -полупростой радикал, а антипростой радикал — как сильно F -полупростой радикал.

Легко показать, что антипростой радикал R есть наибольший среди всевозможных радикалов в смысле А. Г. Куроша, имеющих нулевое пересечение с F , и, обратно, сильно идемпотентный радикал F есть наибольший радикал, имеющий нулевое пересечение с R .

Действительно, пусть в произвольном кольце K для некоторого радикала $R'(K)$ справедливо соотношение

$$F(K) \cap R'(K) = 0.$$

Тогда, в частности, для $K = R'$ получим $F(R') = 0$, т. е. R' -радикальные кольца являются F -полупростыми. Так как гомоморфный образ всякого радикального кольца есть радикальное кольцо, то, в действительности, R' -радикальные кольца будут сильно F -полупростыми и поэтому антипростыми кольцами. Следовательно, $R'(K) \subseteq R(K)$. Аналогично доказывается обратное утверждение.

Точно так же, как выводилось свойство V.3 из свойства V.2, можно доказать следующее утверждение:

Кольцо K будет антипростым тогда и только тогда, когда всякий его идеал представим в виде пересечения таких идеалов, фактор-кольца по которым суть подпрямо неразложимые кольца с нильпотентной сердцевиной.

§ 5. Некоторые теоремы о сильно полупростых кольцах

Как известно, элемент q некоторой структуры S называется *неразложимым в пересечение* или просто *неразложимым*, если он не может быть представлен в виде пересечения двух элементов, отличных от q . *Псевдодополнением* a' элемента a структуры S с нулем 0 называется наибольший элемент, имеющий 0 в пересечении с a , в случае если таковой существует [см. (10), стр. 209]. В дальнейшем через \mathfrak{M} будем обозначать множество всех неразложимых элементов некоторой структуры S .

ЛЕММА 17. *Пусть S — полная дедекиндова структура (содержащая более одного элемента), в которой всякий элемент a обладает псевдодополнением a' и может быть представлен в виде пересечения неразложимых элементов q из некоторого подмножества \mathfrak{M}' множества \mathfrak{M} . Если каждый элемент $q \neq 1$ из \mathfrak{M}' имеет ненулевое псевдодополнение q' , то единица структуры S есть объединение точек.*

Доказательство. Заметим сначала, что для любого неразложимого элемента q из \mathfrak{M}' справедливо равенство $q'' = q$, где $q'' = (q')'$. Действительно, если $q = 1$, то доказывать нечего. В противном случае положим $b = q \cup q'$. Так как всегда $q'' \geq q$, то, в силу дедекиндовости структуры S , получим:

$$q'' \cap b = q'' \cap (q \cup q') = q \cup (q'' \cap q') = q \cup 0 = q.$$

Отсюда и из неразложимости элемента q следует, что по крайней мере один из элементов q'' и b равен q . Если $b = q$, то из определения b

следует $d' \leq q$, а потому $q' = q \cap q' = 0$, что противоречит предположению. Следовательно, $q'' = q$.

Покажем теперь, что $a'' = a$ для любого элемента a из S .

Действительно, по предположению, $a = \bigcap_{\alpha} q_{\alpha}$, где $q_{\alpha} \in \mathcal{M}'$. Из $a \leq q_{\alpha}$ следует

$$a'' \leq q_{\alpha}'' = q_{\alpha},$$

т. е.

$$a'' \leq \bigcap_{\alpha} q_{\alpha} = a,$$

откуда $a'' = a$.

Теперь легко видеть, что S есть структура с дополнениями.

Действительно, если a — произвольный элемент из S и $b = a \cup a'$, то

$$b' = (a \cup a')' \leq a' \cap a'' = 0.$$

Следовательно, $b'' = b = 1$, т. е. $1 = a \cup a'$. На основании леммы Блэра ⁽¹¹⁾ заключаем, что единица структуры есть объединение точек.

ЛЕММА 18. Для того чтобы в кольце K для любого идеала A было справедливо равенство $A \cap A^* = 0$, необходимо и достаточно, чтобы K не содержало нильпотентных идеалов.

Действительно, если K не содержит нильпотентных идеалов, то из

$$(A \cap A^*)^2 \subseteq AA^* = 0$$

следует

$$A \cap A^* = 0.$$

Пусть теперь в K существует нильпотентный идеал $B \neq 0$. Положив $A = B^{n-1}$, где n — наименьшее целое, для которого $B^n = 0$, получим $A^2 = 0$. Следовательно, $A^* \supseteq A$ и $A \cap A^* = A \neq 0$.

Следствие 9. В кольце без нильпотентных идеалов всякий идеал A обладает псевдодополнением A' , причем $A' = A^*$.

Действительно, если $A \cap A_1 = 0$, то $A \cdot A_1 = A_1 \cdot A = 0$ и $A_1 \subseteq A^*$.

ТЕОРЕМА 10. Если в кольце K без нильпотентных идеалов аннулятор всякого неразложимого идеала $Q \neq K$ отличен от нуля, то K есть дискретная прямая сумма простых ненулевых колец. Обратное утверждение также верно.

Действительно, в любом кольце структура идеалов является полной и дедекиндовой. Кроме того, как известно [см., например, ⁽¹¹⁾], всякий идеал произвольного кольца может быть представлен в виде пересечения неразложимых идеалов. Наконец, в силу предположения и следствия 9, всякий идеал кольца K обладает псевдодополнением. Таким образом, если мы положим $\mathcal{M}' = \mathcal{M}$, то все условия леммы 17 выполнены, и кольцо K есть сумма идемпотентных минимальных идеалов. Легко проверить, что эта сумма является дискретной прямой суммой простых ненулевых колец.

Обратное утверждение сразу вытекает из того, что в дискретной прямой сумме простых ненулевых колец аннулятор всякого идеала, отличного от самого кольца, есть ненулевой идеал.

Напомним, что идеал T кольца K называется *сильно неразложимым*, если из $A \cap B \subseteq T$, где A и B — также идеалы в K , следует хотя бы одно из соотношений $A \subseteq T$ или $B \subseteq T$.

Так как в кольце с дистрибутивной структурой идеалов понятия неразложимого и сильно неразложимого идеалов совпадают [см. (15), (11)], то справедливо

Следствие 10. *Если в кольце K без нильпотентных идеалов и с дистрибутивной структурой идеалов аннулятор всякого сильно неразложимого идеала $T \neq K$ отличен от нуля, то K есть дискретная прямая сумма простых ненулевых колец.*

Заметим, что простой идеал кольца, очевидно, является сильно неразложимым. Так как в сильно идемпотентном кольце всякий идеал есть пересечение простых полумаксимальных идеалов, то, применяя к этим кольцам лемму 17, где в качестве \mathcal{M} берется множество всех простых полумаксимальных идеалов, получим следующее утверждение:

ТЕОРЕМА 11. *Если в сильно идемпотентном (сильно R -полупростом) кольце K аннулятор всякого простого полумаксимального идеала отличен от нуля, то K есть дискретная прямая сумма простых ненулевых колец.*

Напомним, что кольцо K называется *бирегулярным* [см. (7)], если каждый его главный идеал (a) порождается центральным идемпотентом, или, что то же самое, если кольцо (a) имеет единицу [см. (29), (5)]. Ясно, что бирегулярное кольцо является сильно идемпотентным.

Легко показать, что в бирегулярном кольце всякий простой идеал P является максимальным модулярным * идеалом. Действительно, факторкольцо $\bar{K} = K/P$ является одновременно первичным и бирегулярным кольцом. Если \bar{K} не есть простое кольцо, то в \bar{K} существует такой элемент $a \neq 0$, что $(\bar{a}) \neq \bar{K}$. Так как идеал (\bar{a}) обладает единицей, то он отщепляется прямым слагаемым в \bar{K} и поэтому $(a)^* \neq \bar{0}$, что противоречит первичности \bar{K} . Следовательно, \bar{K} — простое бирегулярное кольцо, т. е. простое кольцо с единицей **.

Из сказанного выше и теоремы 11 получаем следующий результат Уодделя [см. (31), теорема 5]:

Если в бирегулярном кольце K аннулятор всякого максимального идеала отличен от нуля, то K есть дискретная прямая сумма простых колец с единицей.

Обозначим через J радикал Джекобсона (17). Как известно, J есть пересечение всех примитивных идеалов. Напомним, что всякий примитивный идеал является простым и, следовательно, сильно неразложимым.

Пусть теперь K есть сильно J -полупростое кольцо (например регулярное кольцо Неймана). Так как в таком кольце всякий идеал есть пересечение примитивных идеалов (см. вывод условия V.3 из V.2), то, применяя лемму 17, получим следующее утверждение:

ТЕОРЕМА 12. *Если в сильно J -полупростом кольце K аннулятор всякого примитивного идеала отличен от нуля, то K есть дискретная прямая сумма простых примитивных колец.*

* Модулярный идеал — это такой идеал, факторкольцо по которому имеет единицу.

** Другое доказательство этого утверждения дано в работе (31) (теорема 6).

Пусть N есть радикал Брауна — Маккоя [см. (13)]. Известно, что N есть пересечение всех максимальных модулярных идеалов. Точно так же, как теорема 12, получается

ТЕОРЕМА 13. *Если в сильно N -полупростом кольце K (например, в бирегулярном кольце) аннулятор всякого максимального модулярного идеала отличен от нуля, то K есть дискретная прямая сумма простых колец с единицей.*

ЛЕММА 19. *Если M — максимальный идеал в кольце без нильпотентных идеалов K , то либо $M^* = 0$, либо M^* является минимальным идеалом. Во втором случае $K = M + M^*$.*

Действительно, пусть $M^* \neq 0$. По лемме 18,

$$M \cap M^* = 0.$$

В силу максимальной идеала M , либо $M^* \subseteq M$, либо $K = M + M^*$. Первая возможность исключается, так как из $M^* \subseteq M$ и $M \cap M^* = 0$ следует $M^* = 0$. Поэтому $K = M + M^*$ и M^* — простое ненулевое кольцо.

Как известно [см., например, (26)], подпрямая сумма K некоторого множества колец K_α называется специальной, если для любого α $K \supseteq K_\alpha$.

Обозначим через \mathfrak{M}_1 некоторое множество простых максимальных идеалов произвольного кольца K .

ТЕОРЕМА 14. *Если в кольце K пересечение всех идеалов M_α из \mathfrak{M}_1 есть нулевой идеал и аннулятор всякого идеала M_α отличен от нуля, то K изоморфно специальной подпрямой сумме простых ненулевых колец.*

Доказательство. Во-первых, кольцо K не содержит нильпотентных идеалов, так как M_α — простые идеалы и всякий нильпотентный идеал содержится, очевидно, в любом простом идеале. Во-вторых, в силу леммы 19 и условия теоремы,

$$K = M_\alpha + M_\alpha^*.$$

Наконец, по предположению,

$$\bigcap_{\alpha} M_\alpha = 0$$

и, кроме того, для $\alpha \neq \beta$

$$M_\alpha^* \cap M_\beta^* = 0.$$

Последние три вида равенств, как известно [см., например, (26), теорема 15], являются необходимыми и достаточными условиями, чтобы кольцо K с нулевым аннулятором K^* было изоморфно специальной подпрямой сумме идеалов M_α^* .

Следствие 11. *Если в N -полупростом кольце K аннулятор всякого максимального модулярного идеала отличен от нуля, то K изоморфно специальной подпрямой сумме простых колец с единицей.*

Поступило
21. III. 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Amitsur S. A., A general theory of radicals. I, Radicals in complete lattices, Amer. J. Math., 74 (1952), 774—786.
2. Amitsur S. A., A general theory of radicals. II, Radicals in rings and bicategories, Amer. J. Math., 76 (1954), 100—125.

- ³ Андрунакиевич В. А., Полурадикальные кольца, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 12 (1948), 129—178.
- ⁴ Андрунакиевич В. А., К определению радикала кольца, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 16 (1952), 217—224.
- ⁵ Андрунакиевич В. А., Бирегулярные кольца, Матем. сборн., 39 (81):4 (1956), 447—464.
- ⁶ Андрунакиевич В. А., Кольца с аннуляторным условием, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 20 (1956), 547—568.
- ⁷ Arens R. F., Kaplansky I., Topological representation of algebras, Trans. Amer. Math. Soc., 63 (1948), 457—481.
- ⁸ Baer R., Radical ideals, Amer. J. Math., 65 (1943), 537—568.
- ⁹ Birkhoff C., Subdirect unions in universal algebra, Bull. Amer. Math. Soc., 50 (1944), 764—768.
- ¹⁰ Биркгоф Г., Теория структур, Москва, 1952.
- ¹¹ Blair R. L., Ideal lattices and the structure of rings, Trans. Amer. Math. Soc., 75 (1953), 136—153.
- ¹² Blair R. L., A note on f -regularity in rings, Proc. Amer. Math. Soc., 6(1955), 511—515.
- ¹³ Brown B., McCoy N. H., Radicals and subdirect sums, Amer. J. Math., 69 (1947), 46—58.
- ¹⁴ Brown B., McCoy N. H., The maximal regular ideal of a ring, Proc. Amer. Math. Soc., 1 (1950), 165—171.
- ¹⁵ Fuchs L., Über die Ideale arithmetischer Ringe, Comment. Math. Helv., 23 (1949), 334—341.
- ¹⁶ Jacobson N., Structure theory of simple rings without finiteness assumptions, Trans. Amer. Math. Soc., 57(1945), 228—245.
- ¹⁷ Jacobson N., The radical and semi-simplicity for arbitrary rings, Amer. J. Math., 67(1945), 300—320.
- ¹⁸ Johnson R. E., Prime rings, Duke Math. J., 18(1951), 799—809.
- ¹⁹ Johnson R. E., Representation of prime rings, Trans. Amer. Math. Soc., 74(1953), 351—357.
- ²⁰ Johnson R. E., The imbedding of a ring as an ideal in another ring, Duke Math. J., 20 (1953), 569—574.
- ²¹ Курочкин В. М., Кольца с условием минимальности для присоединенных идеалов, Доклады Ак. наук СССР, 66, № 8 (1949), 549—551.
- ²² Курош А. Г., Радикалы колец и алгебр, Матем. сборн., 33 (75) (1953), 13—26.
- ²³ Levitzki J., On the radical of a general ring, Bull. Amer. Math. Soc., 49(1943), 462—466.
- ²⁴ Levitzki J., Semi-nilpotent ideals, Duke Math. J., 10 (1943), 553—556.
- ²⁵ Levitzki J., Prime ideals and the lower radical, Amer. J. Math., 73(1951), 25—29.
- ²⁶ McCoy N. H., Subdirect sums of rings, Bull. Amer. Math. Soc., 53(1947), 856—877.
- ²⁷ McCoy N. H., Prime ideals in general rings, Amer. J. Math., 71(1949), 823—833.
- ²⁸ McCoy N. H., Subdirect sum representations of prime rings, Duke Math. J., 22 (1955), 357—363.
- ²⁹ Morrison D. R., Biregular rings and the ideal lattice isomorphisms, Proc. Amer. Math. Soc., 6 (1955), 46—49.
- ³⁰ Neumann J., On regular rings, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 22 (1936), 707—713.
- ³¹ Waddell M. C., Properties of regular rings, Duke Math. J., 19 (1952), 623—627.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

Серия математическая

21 (1957), 145—170

И. М. ВИНОГРАДОВ

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ СУММЫ, СОДЕРЖАЩИЕ ЗНАЧЕНИЯ МНОГОЧЛЕНА

В этой работе существенно улучшаются прежние результаты, касающиеся оценки сумм

$$\sum_{p \leq P} e^{2\pi i k f(p)}, \quad f(x) = A_n p^n + \dots + A_1 p,$$

где k — целое положительное число и p пробегает простые числа.

Обозначения. c — положительное постоянное, ε — произвольно малое положительное постоянное, C — целое, θ — число с условием $\theta \leq 1$.

$A \ll B$ при положительном B показывает, что $|A| \leq cB$.

p — переменное, пробегающее простые числа.

$\pi(x)$ — число простых чисел, не превосходящих x .

k — целое положительное число.

P — целое положительное число. В рассуждениях, не рассчитанных на вычисление постоянного множителя оценок, это число можно считать достаточно большим.

n — целое, $n \geq 12$, $\nu = n^{-1}$, A_n, \dots, A_1 — вещественные,

$$f(x) = A_n x^n + \dots + A_1 x.$$

Пользуясь в дальнейшем приближениями к числам A_n, \dots, A_1 посредством несократимых дробей

$$\frac{a_n}{q_n}, \dots, \frac{a_1}{q_1},$$

с положительными q_n, \dots, q_1 , примем обозначения:

Q_0 — общее наименьшее кратное чисел q_n, \dots, q_2 ,

Q — общее наименьшее кратное чисел q_n, \dots, q_1 .

Основным результатом этой статьи является теорема 2, дающая существенное улучшение результатов прежних исследований [работы (1) и (2)] по оценке сумм

$$S = \sum_{p \leq P} e^{2\pi i k f(p)}.$$

Точки (A_n, \dots, A_1) n -мерного пространства разбиваем на два класса:

точками первого класса называем точки, принадлежащие областям с условиями

$$\left| A_s - \frac{a_s}{q_s} \right| \leq P^{-s+\nu}, \quad (a_s, q_s) = 1, \quad q_s > 0 \quad (s = n, \dots, 1), \quad Q \leq P^\nu;$$

точками второго класса называем точки оставшейся области. В точках второго класса дается единообразная (одна и та же для всех точек класса) оценка $|S|$. При этом в область точек второго класса входят теперь и такие области, где раньше были известны лишь гораздо более грубые оценки $|S|$. В точках первого класса оценка $|S|$ сводится к оценке модулей хорошо изученных сумм (лемма 6), причем для $|S|$ получаются оценки, гораздо более точные, чем известные раньше. Следует, однако, отметить, что при $Q \leq P^\varepsilon$ для точек первого класса теорема 2 все еще дает грубые результаты; этому случаю мы напомним в дальнейшем посвятить особую статью. Следует также отметить, что, имея в виду простоту доказательств, мы выполнили некоторые оценки более грубо, чем это можно было бы сделать, усложняя доказательства; в частности, уточняя ряд лемм, на которые опираются эти доказательства.

Мы пользуемся здесь случаем привести также краткое доказательство (леммы, на которые оно опирается, были доказаны в прежних работах) теоремы 1 и ее следствия — теоремы 1,а, касающихся сумм

$$\sum_{x \leq P} e^{2\pi i k f(x)},$$

где x пробегает числа натурального ряда. Несколько менее совершенные формулировки этих теорем были приведены в соответствующем месте доклада на третьем Всесоюзном математическом съезде.

ЛЕММА 1 (van der Corput). Пусть M и M_1 — целые, $M < M_1$ и в интервале $M \leq x \leq M_1$ задана дважды дифференцируемая вещественная функция $f(x)$ с условиями

$$0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}, \quad f''(x) \geq 0.$$

Тогда, беря одновременно знаки $+$, или же знаки $-$, имеем [лемма 13 главы 1 книги ⁽³⁾]:

$$\sum_{x=M}^{M_1} e^{\pm 2\pi i f(x)} = \int_M^{M_1} e^{\pm 2\pi i f(x)} dx + 2\theta.$$

ЛЕММА 2. Пусть $0 < \alpha < \beta \leq 1$,

$$I = \int_x^\beta e^{2\pi i \varphi(x)} dx, \quad \varphi(x) = u_n x^n + \dots + u_1 x,$$

где u_n, \dots, u_1 — вещественные и u_0 обозначает наибольшее из чисел $|u_n|, \dots, |u_1|$. Тогда имеем:

$$|I| \leq \min(1, 18^n u_0^{-\nu}).$$

Доказательство. Эта лемма в несколько иной формулировке имеется в работе ⁽⁴⁾ (лемма 4). Приведенная здесь формулировка не требует существенного изменения доказательства.

ЛЕММА 3. Пусть r — целое, $r \geq r_0$, $r_0 = [6,5 n^2 \ln 12 n^2]$. Тогда для интеграла

$$V = \int_0^1 \dots \int_0^1 |S|^r d\alpha_n \dots d\alpha_1, \quad S = \sum_{x=1}^P e^{2\pi i (\alpha_n x^n + \dots + \alpha_1 x)}$$

имеет место неравенство (лемма 7 работы ⁽⁴⁾)

$$V \leq (8n)^{4,3n^2 (\ln 12 n^2)^2} P^{r - \frac{n(n+1)}{2}}$$

ЛЕММА 4. Пусть

$$S = \sum_{x=1}^P e^{2\pi i k f(x)},$$

s — одно из чисел $n, \dots, 2$,

$$A_s = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2},$$

$$(a, q) = 1, \quad 1 < q \leq P.$$

Тогда, полагая

$$q = P^\tau, \quad \text{если } 1 < q \leq P,$$

$$\tau = 1, \quad \text{если } P < q \leq P^{s-1},$$

$$q_1^* = P^{s-\tau}, \quad \text{если } P^{s-1} < q < P^s,$$

будем иметь:

$$|S| < (8n-8)^{0,5(n-1)l} h^{2\rho_s \tau^{-1}} P^{1-\rho_0},$$

$$l = \ln \frac{12(n-1)n}{\tau}, \quad \rho_0 = \frac{\tau}{3(n-1)^2 l}.$$

Доказательство. Эта лемма в несколько иной формулировке имеется в работе ⁽⁴⁾ (теорема 2).

ЛЕММА 5. Пусть

$$S = \sum_{x=1}^P e^{2\pi i k f(x)},$$

причем каждое A_n, \dots, A_2 представлено (что всегда возможно) в виде:

$$A_s = \frac{a_s}{q_s} + \frac{\theta_s}{q_s P},$$

$$(a_s, q_s) = 1, \quad 0 < q_s \leq P.$$

Тогда, полагая

$$Q_0 = P^\tau, \quad \text{если } Q_0 \leq P,$$

$$\tau = 1, \quad \text{если } Q_0 \geq P,$$

при условии $k \leq P^{0,05v^2}$ будем иметь [теорема 3 работы (4)]:

$$|S| \leq (8n-8)^{0,5(n-1)l} P^{1-\rho},$$

$$l = \ln \frac{12(n-1)n}{\tau}, \quad \rho = \frac{\tau}{3(n-1)nl}.$$

ЛЕММА 6 (Loo-Keng Hua). Пусть A_n, \dots, A_1 — рациональные несократимые дроби с положительными знаменателями, имеющими общим наименьшим кратным число Q . Тогда при постоянном n имеем [см. (5)]:

$$\sum_{x=1}^Q e^{2\pi i f(x)} \leq Q^{1-\nu+\varepsilon}.$$

ТЕОРЕМА 1. Точки n -мерного пространства разобьем на два класса: точки первого класса и точки второго класса. Точкою первого класса назовем точку

$$\left(\frac{a_n}{q_n} + z_n, \dots, \frac{a_1}{q_1} + z_1 \right),$$

где первые слагаемые — рациональные несократимые дроби с положительными знаменателями, имеющими общим наименьшим кратным число Q , не превосходящее $P^{\frac{1}{3} - \frac{\nu}{6}}$, вторые же слагаемые подчинены условиям:

$$|z_s| \leq P^{-\nu} \quad (s = n, \dots, 1).$$

Точкою второго класса назовем всякую точку, не являющуюся точкою первого класса. Тогда, полагая

$$S = \sum_{x=1}^{P'} e^{2\pi i k f(x)}, \quad \rho = \frac{1}{9n^2 \ln 36n^2},$$

мы в случае, когда (A_n, \dots, A_1) — точка второго класса, при $k \leq P^{\varepsilon P}$ будем иметь:

$$|S| \leq (8n)^{0,5n \ln 36n^2} P^{1-\rho}, \quad (1)$$

а в случае, когда (A_n, \dots, A_1) — точка первого класса, при $k \leq P^\nu$ будем иметь:

$$S = \frac{1}{Q} \sum_{x=1}^Q e^{2\pi i \left(\frac{ka_n}{q_n} x^n + \dots + \frac{ka_1}{q_1} x \right)} \int_0^P e^{2\pi i (kz_n x^n + \dots + kz_1 x)} dx + O(2n^{2n} P^{\frac{2}{3}}).$$

Доказательство. Полагая $\tau_1 = P^{\frac{1}{3}}$, $\tau_s = P^{s-\frac{1}{3} + \frac{\nu}{3}}$ при $s > 1$, мы можем каждое A_s представить в виде:

$$A_s = \frac{a_s}{q_s} + \frac{\theta_s}{q_s \tau_s}, \quad (a_s, q_s) = 1, \quad 0 < q_s \leq \tau_s.$$

Сначала рассмотрим случай $Q_0 > P^{\frac{1}{3} - \frac{\nu}{3}}$. Если при некотором s ряда $n, \dots, 2$ справедливо неравенство

$$P^{\frac{1}{3} - \frac{\nu}{3}} < q_s,$$

то, применяя лемму 4, будем иметь:

$$|S| < (8n - 8)^{0,5(n-1)l_0} P^{4\rho_0^2\tau_0^{-1}} P^{1-\rho}, \quad \tau_0 = \frac{1}{3} - \frac{\nu}{3}.$$

$$l_0 = \ln \frac{12(n-1)n}{\tau_0} = \ln 36n^2, \quad \rho_0 = \frac{\tau_0}{3(n-1)^2 l} = \frac{1}{9(n-1)n \ln 36n^2},$$

$$-\rho_0 + 4\rho_0^2\tau_0^{-1} = -\rho_0 \left(1 - \frac{4}{3(n-1)^2 \ln 36n^2}\right) < -\rho_0(1 - \nu) = -\rho.$$

Поэтому верно неравенство (1). Если при каждом s ряда $n, \dots, 2$ справедливо неравенство $q_s \leq P^{\frac{1}{3} - \frac{\nu}{3}}$, но при этом будет $Q_0 > P^{\frac{1}{3} - \frac{\nu}{3}}$, то, применяя лемму 5, при $\tau_0 = \frac{1}{3} - \frac{\nu}{3}$, $k \leq P^{0,05\nu\tau_0}$ (очевидно $P^{2\rho} < P^{0,05\nu\tau_0}$) получим:

$$|S| < (8n - 8)^{0,5(n-1)l} P^{1-\rho}, \quad l = \ln \frac{12(n-1)n}{\tau_0} = \ln 36n^2,$$

$$\rho_0 = \frac{\tau_0}{3(n-1)n l} = \rho,$$

и неравенство (1) снова оказывается верным.

Далее, рассмотрим случай $Q_0 \leq P^{\frac{1}{3} - \frac{\nu}{3}}$. Вводя подстановку $x = Q\xi + \eta$, где η пробегает значения $1, \dots, Q$, а ξ при заданном η пробегает целые числа интервала

$$-\frac{\eta}{Q} < \xi \leq \frac{P - \eta}{Q}, \quad (2)$$

мы приведем сумму S к виду:

$$S = \sum_{\eta} e^{2\pi i k \left(\frac{a_n}{q_n} \eta^n + \dots + \frac{a_1}{q_n} \eta \right)} S_{\eta}, \quad S_{\eta} = \sum_{\xi} e^{2\pi i \psi(\xi)},$$

где ξ пробегает целые числа интервала (2) и

$$\psi(\xi) = k z_n (Q\xi + \eta)^n + \dots + k z_1 (Q\xi + \eta), \quad z_s = \frac{\theta_s}{q_s \tau_s}.$$

Далее находим:

$$\begin{aligned} |\psi'(\xi)| &\leq \left(\frac{n P^{n-1}}{P^{n - \frac{1}{3} + \frac{\nu}{3}}} + \dots + \frac{2P}{P^{2 - \frac{1}{3} + \frac{\nu}{3}}} + \frac{1}{q_1 P^{\frac{1}{3}}} \right) kQ < \\ &< \frac{n^2 + n}{2} P^{-\frac{\nu}{2} + \nu^2} + P^{-\frac{\nu}{3} + \nu^2} \end{aligned}$$

Так как при $P \leq n^{6n}$ теорема тривиальна, то будем рассматривать лишь случай $P > n^{6n}$. Тогда убедимся, что найденная граница для $\psi(\cdot)$ меньше, чем 0,5. Кроме того, $\psi(\xi)$ — многочлен степени $n-1$ и, следовательно, весь интервал (2) можно разбить на $\leq 2n-2$ интервалов, в каждом из которых $\psi(\xi)$ монотонна и не обращается в нуль внутри интервала. Применяя к каждому из этих интервалов лемму 1, получим:

$$S_{\eta} = \int_{-\eta Q^{-1}}^{(P-\eta)Q^{-1}} e^{2\pi i \psi(\xi)} d\xi + \theta' 8n = \int_0^P e^{2\pi i (kz_n x^n + \dots + kz_1 x)} dx + \theta' 8n.$$

Вместе с тем найдем асимптотическую формулу:

$$S = \frac{1}{Q} \sum_{\eta=1}^Q e^{2\pi i \left(\frac{ka_n}{q_n} \eta^n + \dots + \frac{ka_1}{q_1} \eta \right)} \int_0^P e^{2\pi i (kz_n x^n + \dots + kz_1 x)} dx + \theta'' 8nQ. \quad (3)$$

Если $Q > P^{\frac{1}{3} - \frac{\nu}{6}}$, то может оказаться, что $Q_0 > P^{\frac{1}{3} - \frac{\nu}{3}}$ и тогда верно неравенство (1); если же $Q_0 \leq P^{\frac{1}{3} - \frac{\nu}{3}}$, то верна асимптотическая формула (3), причем подстановкою $\eta = Q_0 u + v$ убедимся, что главный член этой формулы равен нулю ($2\rho < \frac{\nu}{6}$) и, следовательно, $|S| \leq 8nQ$ и опять верно неравенство (1). Если же $Q \leq P^{\frac{1}{3} - \frac{\nu}{6}}$, то тем более $Q_0 \leq P^{\frac{1}{3} - \frac{\nu}{6}}$, и верна асимптотическая формула (3).

Если одно из чисел $|z_n|, \dots, |z_1|$ удовлетворяет условию $P^{-s+\nu} < |z_n|$, то, согласно лемме 2, из формулы (3) находим:

$$|S| \leq 18^n P^{1-\nu^s} + 8nQ < (8n)^{0,5n \ln 36n^2} P^{1-\rho}.$$

ТЕОРЕМА 1, а. Пусть n — постоянное. Точки n -мерного пространства разобьем на два класса: точки первого класса и точки второго класса. Точкою первого класса назовем точку

$$\left(\frac{a_n}{q_n} + z_n, \dots, \frac{a_1}{q_1} + z_1 \right),$$

где первые слагаемые — рациональные несократимые дроби с положительными знаменателями, имеющими общим наименьшим кратным число Q , не превосходящее P^ν , вторые же слагаемые удовлетворяют условию

$$|z_s| \leq P^{-s+\nu} Q^{-1}.$$

Точкою второго класса назовем всякую точку, не являющуюся точкою первого класса. Тогда, полагая

$$S = \sum_{x=1}^P e^{2\pi i k f(x)}, \quad \rho = \frac{1}{9n^2 \ln 36n^2},$$

$$u_0 = \max(|z_n| P^n, \dots, |z_1| P),$$

при условии, что (A_n, \dots, A_1) — точка второго класса и $k \leq P^{2\rho}$, будем иметь:

$$S \ll P^{1-\rho}.$$

Если же (A_n, \dots, A_1) — точка первого класса и $k \leq P^{\nu^2}$, то в случае $u_0 > 1$ будем иметь:

$$S \ll PQ^{-\nu+\varepsilon} u_0^{-\nu},$$

а в случае $u_0 \leq 1$ будем иметь:

$$S \ll PQ^{-\nu+\varepsilon} (k, Q)^{\nu}.$$

Доказательство. Для точек второго класса в смысле теоремы 1 справедливость теоремы 1, а следует из теоремы 1. Для точек первого класса в смысле теоремы 1 при условии $Q > P^{\nu}$, применяя лемму 6, получим:

$$S \ll PQ^{-\nu+\varepsilon} (k, Q)^{\nu} \ll P^{1-0,5\nu^2} \ll P^{1-\rho}.$$

Для точек первого класса в смысле теоремы 1 при условии $Q \leq P^{\nu}$, согласно леммам 2 и 6, в случае $u_0 > 1$ получим:

$$S \ll PQ^{-\nu+\varepsilon} (k, Q)^{\nu} (ku_0)^{-\nu} \ll PQ^{-\nu+\varepsilon} u_0^{-\nu},$$

а в случае $u_0 \leq 1$ получим:

$$S \ll PQ^{-\nu+\varepsilon} (k, Q)^{\nu}.$$

ТЕОРЕМА 1, б. Пусть n — постоянное и пусть точки n -мерного пространства разбиты на два класса по способу, указанному в теореме 1, а. Пусть u_0 сохраняет значение, указанное в теореме 1, а. Тогда при любом σ , удовлетворяющем условию $0 < \sigma \leq 1$, для числа $T(\sigma)$ дроби ряда

$$\{f(x)\}, \quad x = 1, \dots, P,$$

с условием $0 \leq \{f(x)\} < \sigma$ будем иметь:

$$T(\sigma) = \sigma P + O(\Delta).$$

При этом если (A_n, \dots, A_1) — точка второго класса, то следует брать

$$\Delta = P^{1-\rho}, \quad \rho = \frac{1}{10n^2 \ln 36n^2}.$$

Если же (A_n, \dots, A_1) — точка первого класса, то в случае $u_0 > 1$ следует брать

$$\Delta = PQ^{-\nu+\varepsilon} u_0^{-\nu},$$

а в случае $u_0 \leq 1$ следует брать

$$\Delta = PQ^{-\nu+\varepsilon}.$$

Доказательство. Эта теорема легко выводится из теоремы 1, а путем рассуждений, уже неоднократно применявшихся в предыдущих работах [гл. VIII книги (3)].

ЛЕММА 7. Пусть при некотором s , равном одному из чисел $n, \dots, 2$, имеем:

$$A_s = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^\tau}, \quad (a, q) = 1, \quad P^\kappa \leq q \leq \tau, \quad \tau = P^{0,5s}.$$

Тогда, полагая

$$\rho_0 = \frac{0,041\nu^2}{\ln n + 2}, \quad \text{если } q > P^{0,25},$$

$$\rho_0 = \frac{0,37\nu^2\kappa}{\ln \frac{n^2}{\kappa} + 4}, \quad \text{если } q \leq P^{0,25},$$

при соблюдении условия $k \leq P^{1,5\rho_0}$ будем иметь [теорема 1 работы (1)]:

$$\sum_{p \leq P} e^{2\pi i k f(p)} \ll P^{1-\rho_0}.$$

ЛЕММА 8. Пусть при каждом s , взятом из ряда $n, \dots, 2$, имеет место свое равенство вида:

$$A_s = \frac{a_s}{q_s} + \frac{\theta_s}{q_s \tau_s}, \quad (a_s, q_s) = 1, \quad 0 < q_s \leq \tau_s, \quad \tau_s = P^{0,5s},$$

причем каждое из чисел q_n, \dots, q_2 не превосходит $P^{0,25}$ и число κ определяется равенствами:

$$Q_0 = P^\kappa, \quad \text{если } Q_0 \leq P^{0,25},$$

$$\kappa = \frac{1}{4}, \quad \text{если } Q_0 > P^{0,25}.$$

Пусть, наконец,

$$\rho_0 = \frac{\kappa}{6,7n^2 \ln 12n^2}.$$

Тогда при $k \leq P^{2\rho_0}$ имеем [теорема 2 работы (2)]:

$$\sum_{p \leq P} e^{2\pi i k f(p)} \ll P^{1-\rho_0+\varepsilon}.$$

ЛЕММА 9. Пусть при каждом s , взятом из ряда $n, \dots, 1$, имеет место свое равенство вида:

$$A_s = \frac{a_s}{q_s} + \frac{\theta_s}{q_s \tau_s}, \quad (a_s, q_s) = 1, \quad 0 < q_s \leq \tau_s, \quad \tau_s = P^{0,5s},$$

причем $Q_0 \leq P^{\frac{1}{9}}$ и числа κ и ρ_0 определяются равенствами:

$$Q = P^\kappa, \quad \rho_0 = \min \left(\frac{\kappa}{6,75n^2 \ln 12n^2}, \frac{1}{27n^2 \ln 12n^2} \right).$$

Тогда при $k \leq P^{2\rho_0}$ будем иметь [теорема 3 работы (2)]:

$$\sum e^{2\pi i k f(p)} \ll P^{1-\rho_0+\varepsilon}.$$

ЛЕММА 10. Пусть n — постоянное и пусть при каждом s , взятом из ряда $n, \dots, 1$, имеет место свое равенство вида:

$$A_s = \frac{a_s}{q_s} + \frac{\theta_s}{q_s \tau_s},$$

$$(a_s, q_s) = 1, \quad 0 < q_s \leq \tau_s, \quad \tau_s = P^{0,5s},$$

причем $Q \leq P^{\frac{1}{9}}$ и по меньшей мере для одного s имеем

$$|\theta_s| > \tau_s^{-1} P^{0,5}. \quad (4)$$

Пусть, далее,

$$\rho_0 = \frac{1}{50n^2 \ln 12n^2}, \quad k \leq P^{2\rho_0}$$

и t — положительное число, взаимно простое с Q . Пусть, наконец,

$$S = \sum_y \psi(y) \sum_x e^{2\pi i k f(t^2 x y)},$$

$$|\psi(y)| \leq P^{\rho_0},$$

причем x и y независимо друг от друга пробегают некоторые возрастающие последовательности положительных чисел, взаимно простых с Q , и суммирование распространяется на область

$$c' P^{0,25-s} t^{-1} < y \leq c'' P^{0,5} t^{-1}, \quad (5)$$

$$0 < t^2 x y \leq P.$$

Тогда будем иметь:

$$S \ll P^{1-\rho_0} t^{-1,1}.$$

Доказательство. Пусть $\rho_1 = 1,2$, $\rho_0, r = [6,5n^2 \ln 12n^2]$. При $t \geq P^{\rho_1}$ лемма очевидна. Поэтому будем предполагать, что $t < P^{\rho_1}$. Интервал (5) можно разбить на $\ll \ln P$ интервалов вида:

$$cY < y \leq Y, \quad 0,25 < c \leq 0,5. \quad (6)$$

Полагая

$$H = [P^{1,5\rho_0}], \quad Y_0 = (1-c)YH^{-1},$$

интервал (6) разобьем на H интервалов вида:

$$Y_1 - Y_0 < y \leq Y_1. \quad (7)$$

Полагая

$$X = \frac{P}{t^2 Y_1},$$

мы для каждого значения y интервала (7) будем иметь:

$$\frac{P}{t^2 y} - X \leq \frac{PY_0}{t^2 Y_1^2} \ll XH^{-1}.$$

Поэтому часть S_0 суммы S , отвечающую интервалу (7), можно представить в виде:

$$S_0 = \sum_{Y_1 - Y_0 < y \leq Y_1} \psi(y) S_y + O(Y_0 X H^{-1}),$$

$$S_y = \sum_{0 < x \leq X} e^{2\pi i k f(t^3 x y)}.$$

Далее, находим:

$$S_0^r \ll P^{e_0 r} Y_0^{r-1} \sum_{Y_1 - Y_0 < y \leq Y_1} |S_y|^r + Y_0^r X^r H^{-r}.$$

Собирая в одну совокупность значения y с условием $y \equiv Q_1 \pmod{Q}$, где Q_1 — одно из чисел ряда $0, 1, \dots, Q-1$, взаимно простых с Q , мы распределим значения y интервала (7) среди $\varphi(Q)$ совокупностей. Соответственно этому будем иметь:

$$S_0^r \ll P^{e_0 r} Y_0^{r-1} \sum_{Q_1} \sum_{\substack{Y_1 - Y_0 < y \leq Y_1 \\ y \equiv Q_1 \pmod{Q}}} |S_y|^r + Y_0^r X^r H^{-r}. \quad (8)$$

Пологая $\beta_j = k A_j t^{2j} y^j$, находим:

$$S = \sum_{0 < x \leq X} e^{2\pi i (\beta_n x^n + \dots + \beta_1 x)}.$$

При вещественных $\alpha_n, \dots, \alpha_1$ положим

$$S'_y = \sum_{0 < x \leq X} e^{2\pi i (\alpha_n x^n + \dots + \alpha_1 x)}.$$

Если точка $(\alpha_n, \dots, \alpha_1)$ принадлежит области (Ω_y) n -мерного пространства, ограниченной неравенствами

$$\beta_n - 0,5 X^{-n} P^{-\rho_1} \leq \alpha_n \leq \beta_n + 0,5 X^{-n} P^{-\rho_1},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\beta_1 - 0,5 X^{-1} P^{-\rho_1} \leq \alpha_1 \leq \beta_1 + 0,5 X^{-1} P^{-\rho_1},$$

то будем иметь:

$$S_y = S'_y + O(X P^{-\rho_1}), \quad |S_y|^r \ll |S'_y|^r + X^r P^{-r \rho_1}.$$

Умножая последнее равенство на

$$X^{\frac{n(n+1)}{2}} P^{n \rho_1} d\alpha_n \dots d\alpha_1$$

и интегрируя по области (Ω_y) , получим:

$$|S_y|^r \ll X^{\frac{n(n+1)}{2}} P^{n \rho_1} \int \dots \int_{(\Omega_y)} |S'_y|^r d\alpha_n \dots d\alpha_1 + X^r P^{-r \rho_1}. \quad (9)$$

Далее, оценим число G областей (Ω_y) , отвечающих различным значениям y и содержащих точки, координаты которых могут отличаться лишь

целыми слагаемыми от координат некоторой заданной точки при условии, что рассматриваются только значения y интервала (7), удовлетворяющие сравнению $y \equiv Q_1 \pmod{Q}$. Пусть (Ω_{η_1}) и (Ω_{η_2}) — две такие области. Для значения s с условием (4) имеем:

$$\beta_s(y_1) - \beta_s(y) = C + O(X^{-s}P^{-\rho_1}),$$

$$\frac{\theta_s k t^{2s}(y_1^s - y^s)}{q_s^{0,5s}} = C + O(X^{-s}P^{-\rho_1}).$$

Здесь левая часть

$$\ll P^{2\rho_1+1, 2s\rho_1-1, 5n\rho_1} \ll P^{-\rho_1}.$$

Поэтому (P достаточно велико) $C = 0$ и мы имеем:

$$\frac{P^{0,5} t^{2s} Y_1^{s-1} (y_1 - y)}{q_s^{0,5s}} \ll P^{-s} t^{2s} Y_1^s P^{-\rho_1}, \quad y_1 - y \ll Q P^{-\rho_1}.$$

Последнее невозможно при $|y_1 - y| \geq Q$. Поэтому $y_1 = y$, $G = 1$ и из (8) и (9) находим (применяем лемму 3):

$$S_0^r \ll P^{\varepsilon_0 r} Y_0^{r-1} \sum_{Q_1} X^{\frac{n(n+1)}{2}} P^{n\rho_1} \int_0^1 \dots \int_0^1 |S'_y|^r d\alpha_n \dots d\alpha_1 + \\ + P^{(\varepsilon_0 - \rho_1)r} Y_0^r X^r \ll Y_0^r X^r Q Y_0^{-1} P^{\varepsilon_0 r + n\rho_1} + P^{(\varepsilon_0 - \rho_1)r} Y_0^r X^r.$$

Но здесь имеем:

$$\frac{\frac{1}{9} - \frac{1}{4} + (n+1)\rho_1}{r} + \varepsilon < -\rho'. \quad \rho' = \frac{1}{47n^2 \ln 12n^2}, \quad \varepsilon_0 - \rho_1 < -\rho'.$$

Поэтому

$$S_0 \ll Y_0 X P^{-\rho'}.$$

Следовательно, часть суммы S , отвечающая интервалу (6), будет

$$\ll Y_1 X P^{-\rho'} \ll \frac{P^{1-\rho'}}{t^2}.$$

Вместе с тем получим

$$S \ll P^{1-\rho_0} t^{-2}.$$

ЛЕММА 11. Пусть n — постоянное и при каждом s , взятом из ряда $n, \dots, 1$, имеет место свое равенство вида:

$$A_s = \frac{a_s}{q_s} + \frac{\theta_s}{q_s \tau_s}, \quad (a_s, q_s) = 1, \quad 0 < q_s \leq \tau_s, \quad \tau_s = P^{0,5s},$$

причем $Q \leq P^{\frac{1}{9}}$ и по меньшей мере для одного s имеем:

$$|\theta_s| \geq P^{-0,5s+0,5}. \quad (10)$$

Пусть, далее,

$$P^{0,75} < M \leq P, \quad 2M < M' < 4M, \quad \rho_0 = \frac{1}{15n^2 \ln 12n^2}, \quad k \leq P^{2\rho_0},$$

$$U = \sum_{\substack{M < w \leq M' \\ dw \leq P}} \sum e^{2\pi i k f(dw)},$$

где d пробегает возрастающую последовательность положительных чисел, взаимно простых с Q , а w пробегает числа натурального ряда, взаимно простые с Q . Тогда имеем:

$$U \ll P^{1-\rho_0+\varepsilon}.$$

Доказательство. Имеем:

$$U = U_1 + O(P^{1-\rho_0}), \quad U_1 = \sum_{\substack{M < w \leq M' \\ P^{1-2\rho_0} < dw \leq P}} e^{2\pi i f(dw)},$$

$$U_1 = \sum_{d \leq PM^{-1}t \setminus Q} \sum \mu(t) S_{d,t}, \quad S_{d,t} = \sum_{\substack{M < tz \leq M' \\ P^{1-2\rho_0} < dtz \leq P}} e^{2\pi i k f(dtz)}.$$

При $t > P^{2\rho_0}$ имеем $S_{d,t} \ll MP^{-2\rho_0}$, $U \ll P^{1-\rho_0}$. Пусть $t \leq P^{2\rho_0}$. Находим:

$$S_{d,t} = \sum_{v=0}^{Q-1} S_v, \quad S_v = \sum_{\substack{M < t(Qu+v) \leq M' \\ P^{1-2\rho_0} < dt(Qu+v) \leq P}} e^{2\pi i k f(dt(Qu+v))},$$

где при A , не зависящем от u , имеем:

$$kf(dt(Qu+v)) = A + \lambda_1(u),$$

$$\lambda_1(u) = \frac{Q_n}{q_n \tau_n} (Qu+v)^n k d^n t^n + \dots + \frac{\theta_1}{q_1 \tau_1} (Qu+v) k dt.$$

Очевидно можно считать, что для значения s с условием (10) имеют место неравенства:

$$|\theta_n| < P^{-0.5n+0.5}, \dots, |\theta_{s+1}| < P^{-0.5(s+1)+0.5}. \quad (11)$$

С помощью неравенств (11) легко выводим, что

$$\lambda_1(u) = \frac{\theta_n}{q_n \tau_n} k d^n t^n Q^n + \dots + \frac{\theta_{s+1}}{q_{s+1} \tau_{s+1}} k d^{s+1} t^{s+1} Q^{s+1} + \lambda_1(u) + \lambda_2(u),$$

где $\lambda_1(u)$ — многочлен степени s со старшим коэффициентом

$$A'_s = \frac{\theta_s}{q_s \tau_s} k d^s t^s Q^s$$

и $\lambda_2(u) \ll P^{-0.125}$.

Пусть N — целое число с условием $Mt^{-1}Q^{-1} < N \leq M't^{-1}Q^{-1}$. Тогда находим:

$$P_{11}^7 < N \leq 4P, \quad |A'_s| \gg \frac{P^{0.5}}{Q^s} \left(\frac{PtQ}{M}\right)^s P^{-2\rho_0 s} \gg \frac{P^{0.5-2\rho_0 s - \frac{1}{9}}}{N^s} \gg N^{-s + \frac{3}{9}},$$

$$|A'_s| \ll \frac{k}{P^{0.5s}} \left(\frac{PtQ}{M}\right)^s \ll \frac{kP^{0.5s}}{N^s} \ll N^{-\frac{s}{5}}.$$

Применяя теорему 1,а (N вместо P), убедимся, что точка n -мерного пространства, координатами которой служат коэффициенты многочлена $\lambda(u) = \lambda_2(u)$, является точкою второго класса. В противном случае мы имели бы (P достаточно велико):

$$A'_s = \frac{\alpha_s}{\beta_s} + \frac{\theta'}{\beta_s N^{s-\nu}}, \quad (\alpha_s, \beta_s) = 1, \quad 0 < \beta_s \leq N^\nu,$$

$$N^{-\nu + \frac{3}{s}} \ll \frac{\alpha_s}{\beta_s} + \frac{\theta'}{\beta_s N^{s-\nu}} \ll N^{-\frac{s}{5}}, \quad \alpha_s = 0, \quad |\theta'| \gg N^{\frac{3}{5} - \nu}.$$

Поэтому

$$S_v \ll N^{1 - \frac{1}{9n^3 \ln 12n^2}} \ll \frac{M}{tQ} P^{-\rho_0}, \quad S_{d,t} \ll \frac{M}{t} P^{-\rho_0},$$

$$U \ll \frac{P}{M} M P^{-\rho_0} Q^\varepsilon \ll P^{1-\rho_0+\varepsilon}.$$

ЛЕММА 12. Пусть n — постоянное и при каждом s , взятом из ряда $n, \dots, 1$, имеет место свое равенство вида:

$$A'_s = \frac{a_s}{q_s} + \frac{\theta_s}{P^{n-0.5}}, \quad (a_s, q_s) = 1,$$

причем $Q \leq P^{\frac{1}{9}}$. Пусть, далее, $k \leq P^\nu$ и t — положительное число, взаимно простое с Q . Пусть, наконец,

$$S = \sum_y \phi(y) \sum_x e^{2\pi i k f(t^2 x y)}, \quad |\phi(y)| \ll P^{\varepsilon_0},$$

где x и y независимо друг от друга пробегают некоторые возрастающие последовательности положительных чисел, взаимно простых с Q , и суммирование распространяется на область

$$c' P^{0.25-\varepsilon} t^{-1} < y \leq c'' P^{0.5} t^{-1}, \quad (12)$$

$$0 < t^2 y x \leq P.$$

Тогда будем иметь:

$$S \ll \frac{P^{1+\varepsilon'}}{t^{1.1}} (k, Q)^{0.5\nu} Q^{-0.5\nu}.$$

Доказательство: При $t > Q^{0.6\nu}$ лемма очевидна. Поэтому будем рассматривать лишь случай $t \leq Q^{0.6\nu}$. Интервал (12) можно разбить на $\ll \ln P$ интервалов вида:

$$cY < y \leq Y, \quad 0.25 < c \leq 0.5. \quad (13)$$

Далее, интервал (13) можно разбить на $\ll YQ^{-1}$ интервалов вида:

$$x - Y_0 < y \leq Y_1, \quad (14)$$

где $0.5Q \leq Y_0 \leq Q$. Полаг

$$X = \left[\frac{P}{t^2 Y_1 Q} \right] Q,$$

мы для всякого значения y , принадлежащего интервалу (14), будем иметь:

$$\frac{P}{t^2 y} - X \ll \frac{PQ}{t^2 Y_1^2} + Q \ll XQY_1^{-1}.$$

Поэтому с ошибкой $\ll P^{\varepsilon_0} XQ^2 Y_1^{-1}$ мы можем часть S_1 суммы S , отвечающую интервалу (14), представить в форме:

$$S_2 = \sum_{0 < x \leq X} \sum_{Y_1 - Y_0 < y \leq Y_1} \psi_1(y) e^{2\pi i k f(t^2 x y)}.$$

Отсюда легко найдем:

$$|S_2|^2 \ll P^{2\varepsilon_0} X \sum_{y_1} \sum_y \left| \sum_{0 < z \leq X} e^{2\pi i k (f(t^2 y_1 z) - f(t^2 y z))} \right|, \quad (15)$$

где y_1 независимо от y пробегает те же значения интервала (14), что и y . Число z пробегает все целые числа в указанных границах. Интервал $0 < z \leq X$ можно разбить на XQ^{-1} интервалов вида:

$$Z < z \leq Z + Q. \quad (16)$$

Часть W правой части неравенства (15), отвечающая данным y_1 и y и значениям z интервала (16), представится так (полагаем $z = Z + v$):

$$W = P^{2\varepsilon_0} X^2 Q^{-1} \sum_{v=1}^Q e^{2\pi i k (f(t^2 y_1 (Z+v)) - f(t^2 y (Z+v)))}.$$

Далее, находим:

$$k(f(t^2 y_1 (Z+v)) - f(t^2 y (Z+v))) = \Phi(v) + \lambda(v),$$

$$\Phi(v) = \frac{ka_n t^{2n} (y_1^n - y^n)}{q_n} v^n + \dots + \frac{ka_1 (y_1 - y)}{q_1} v,$$

$$\lambda(v) = \frac{k\theta_n t^{2n} (y_1^n - y^n)}{P^{n-0.5}} (Z+v)^n + \dots + \frac{k\theta_1 t^2 (y_1 - y)}{P^{1-0.5}} (Z+v).$$

Но при $s = n, \dots, 1$ имеем:

$$\frac{k\theta_s t^{2s} (y_1^s - y^s)}{P^{s-0.5}} ((Z+v)^s - Z^s) \ll \frac{kt^{2s} Y_1^{s-1} Q}{P^{s-0.5}} X^{s-1} Q \ll \frac{kt^2 Q^2}{P^{0.5}} \ll P^{-0.25}.$$

Следовательно,

$$W \ll P^{2\varepsilon_0} X V + O(P^{2\varepsilon_0} X Q P^{-0.25}), \quad V = \sum_{v=1}^Q e^{2\pi i \Phi(v)},$$

$$S_2^2 \ll P^{2\varepsilon_0} X^2 Q^{-1} |G| + P^{2\varepsilon_0} X^2 Q^2 P^{-0.25}, \quad G = \sum_{y_1} \sum_y V.$$

Функцию $\Phi(v)$ можно представить в виде:

$$\Phi(v) = \frac{kB_n(y_1^n - y^n)v^n + \dots + kB_1(y_1 - y)v}{Q}, \quad (B_n, \dots, B_1, Q) = 1.$$

Полагая $(k, Q) = d$, $k = k_1d$, $Q = Q_1d$, $k_1B_s = D_s$, получим:

$$\Phi(v) = \frac{D_n(y_1^n - y^n)v^n + \dots + D_1(y_1 - y)v}{Q_1}, \quad (D_n, \dots, D_1, Q_1) = 1.$$

Полагая, далее,

$$(D_n(y_1^n - y^n), \dots, D_1(y_1 - y), Q_1) = \delta, \quad D_s(y_1^s - y^s)\delta^{-1} = E_s, \quad Q_1\delta^{-1} = Q_2,$$

получим:

$$\Phi(v) = \frac{E_nv^n + \dots + E_1v}{Q_2}, \quad (E_n, \dots, E_1, Q_2) = 1, \quad V = d\delta \sum_{v=1}^{Q_2} e^{2\pi i \Phi(v)}.$$

Согласно лемме 6, находим:

$$V \ll d\delta Q_2^{1-v+\varepsilon_1} Q Q_2^{-v+\varepsilon_1} \ll Q^{1-v+\varepsilon_1} d^v \delta^v.$$

Но δ делит все числа:

$$D_n(y_1^{s_0} - y^{s_0}), \dots, D_1(y_1^{s_0} - y^{s_0}), \quad s_0 = n!$$

Поэтому δ должно делить и $y_1^{s_0} - y^{s_0}$. Но при заданном y число решений сравнения

$$y_1^{s_0} - y^{s_0} \equiv 0 \pmod{\delta}$$

будет $\ll Q_2^{\varepsilon_1}$ (y_1 пробегает значения, взаимно простые с Q_2). Поэтому общее число пар значений y_1 и y , отвечающих данному значению δ , будет $\ll Q^{2+\varepsilon_1} \delta_1^{-1}$, и мы получим:

$$G \ll Q^{3-v+2\varepsilon_1} d^v \sum_{\delta \setminus Q} \delta^{v-1} \ll Q^{3-v+3\varepsilon_1} d^v,$$

$$S_2^2 \ll P^{2\varepsilon_0} X^2 Q^{2-v+3\varepsilon_1} d^v,$$

$$S_2 \ll P^{\varepsilon_0} X Q^{1-0,5v+1,5\varepsilon_1} d^{0,5v},$$

$$S_1 \ll P^{\varepsilon_0} X Q^{1-0,5v+1,5\varepsilon_1} d^{0,5v}.$$

Часть суммы S , отвечающая интервалу (13), будет

$$\ll P^{\varepsilon_0} XY Q^{-0,5v+1,5\varepsilon_1} d^{0,5v} \ll \frac{P^{1+\varepsilon_0}}{t^2} Q^{-0,5v+1,5\varepsilon_1} d^{0,5v}.$$

Отсюда уже легко получается неравенство для S , указанное в лемме.

ЛЕММА 13. Пусть n — постоянное и при каждом s , взятом из ряда $n, \dots, 1$, имеет место свое равенство вида:

$$A_s = \frac{a_s}{q_s} + \frac{\theta_s}{p^{s-0,5}}, \quad (a_s, q_s) = 1,$$

причем $Q \leq P^{\frac{1}{9}}$. Пусть, далее,

$$P^{0,75} < M \leq P, \quad 2M < M' \leq 4M, \quad k \leq P',$$

$$U = \sum_{M < w \leq M'} \sum_{dw \leq P} e^{2\pi i k f(dw)},$$

где d пробегает возрастающую последовательность положительных чисел, взаимно простых с Q , а w пробегает числа натурального ряда, взаимно простые с Q . Тогда имеем:

$$U \ll P(k, Q)^{\nu} Q^{-\nu+\varepsilon}.$$

Доказательство. Имеем:

$$U = \sum_{d \leq PM^{-1}} \sum_{t \nmid Q} \mu(t) S_{d,t}, \quad S_{d,t} = \sum_{\substack{M < tz \leq M' \\ dz \leq P}} e^{2\pi i k f(dtz)}.$$

При $t > Q^{\nu}$ имеем $S_{d,t} \ll MQ^{-\nu}$. Рассмотрим случай $t \leq Q^{\nu}$. С точностью до слагаемого $\leq Q$ сумму $S_{d,t}$ можно разбить на $\ll Mt^{-1}Q^{-1}$ сумм вида:

$$S_0 = \sum_{Z < z \leq Z+Q} e^{2\pi i k f(dtz)},$$

где Z делится на Q . Полагая $z = Z + v$, найдем:

$$kf(dt(Z+v)) = \Phi(v) + \lambda(v), \quad \Phi(v) = \frac{ka_n}{q_n} d^n t^n v^n + \dots + \frac{ka_1}{q_1} dtv,$$

$$\lambda(v) = \frac{\theta_n}{P^{s-0,5}} kd^n t^n (Z+v)^n + \dots + \frac{\theta_1}{P^{1-0,5}} k dt(Z+v).$$

Но при $s = n, \dots, 1$ имеем:

$$\frac{\theta_s}{P^{s-0,5}} kd^s t^s ((Z+v)^s - Z^s) \ll \frac{kP^s Q t}{P^{s-0,5}} \ll \frac{kQ t}{P^{0,25M}} \ll Q^{-\nu}.$$

Поэтому

$$S_0 = \sum_{r=1}^Q e^{2\pi i \Phi(r)} + O(Q^{1-\nu})$$

и, следовательно, согласно лемме 6, имеем:

$$S_0 \ll (kt^n, Q)^{\nu} Q^{1-\nu+\varepsilon} \ll t(k, Q)^{\nu} Q^{1-\nu+\varepsilon}, \quad S_{d,t} \ll M(k, Q)^{\nu} Q^{-\nu+\varepsilon},$$

откуда и убеждаемся в справедливости леммы.

ЛЕММА 14. Пусть n — постоянное и при каждом s , взятом из ряда $n, \dots, 1$, имеет место свое равенство вида:

$$A_s = \frac{a_s}{q_s} + \frac{\delta_s}{P^s}, \quad (a_s, q_s) = 1, \quad |\delta_s| \leq P^{0,5},$$

причем $Q \leq P^{\nu}$ и по меньшей мере для одного $s = s'$ имеем $|\delta_{s'}| \geq P^{\nu}$. Пусть, далее, $k \leq P^{\nu^2}$ и t обозначает положительное число, взаимно простое с Q . Пусть, наконец,

$$S = \sum_y \psi(y) \sum_x e^{2\pi i k f(t^2 xy)}, \quad |\psi(y)| \ll P^{\varepsilon_0},$$

где x и y независимо друг от друга пробегают некоторые возрастающие

последовательности положительных чисел, взаимно простых с Q , и суммирование распространяется на область

$$c' P^{0,25-\varepsilon} t^{-1} < y \leq c'' P^{0,5} t^{-1}, \quad (17)$$

$$t^2 xy \leq P.$$

Тогда будем иметь:

$$S \ll P^{1+\varepsilon_1-0,25\nu^1} t^{-1,1}.$$

Доказательство. Достаточно рассматривать лишь случай $t \leq P^{1,2\nu^2}$, так как в противном случае лемма очевидна. Интервал (17) можно разбить на $\ll \ln P$ интервалов вида:

$$cY < y \leq Y, \quad 0,25 < c \leq 0,5. \quad (18)$$

Полагая, далее,

$$H = [|\delta_{s'}|^{0,5}], \quad Y_0 = (1-c) Y H^{-1},$$

мы можем разбить интервал (18) на H интервалов вида

$$Y_1 - Y_0 < y \leq Y_1. \quad (19)$$

Пусть

$$X = \frac{P}{t^2 Y_1}.$$

Тогда для каждого y интервала (19) имеем

$$\frac{P}{t^2 y} - X \ll X H^{-1}$$

и, следовательно, часть W суммы S , отвечающая интервалу (19), может быть представлена в виде:

$$W = \sum_{Y-Y_0 < y \leq Y_0} \sum_{0 < x \leq X} \psi(y) e^{2\pi i k f(t^2 x y)} + O(P^\varepsilon X Y_0 H^{-1}).$$

Отсюда следует, что

$$W^2 \ll P^{2\varepsilon_0} X \sum_{y_1} \sum_y W_{y_1, y} + P^{2\varepsilon_0} X^2 Y_0^2 H^{-2},$$

$$W_{y_1, y} = \left| \sum_{0 < z \leq X} e^{2\pi i \Phi(y_1, y, z)} \right|,$$

где $\Phi(y_1, y, z) = k f(t^2 y_1 z) - k f(t^2 y z)$, y_1 независимо от y пробегает те же значения интервала (19), что и y , а z пробегает все целые числа в указанных границах. Далее, находим:

$$W_{y_1, y} = \sum_{v=1}^Q S_v, \quad S_v = \sum_{0 < Qu+v \leq X} e^{2\pi i \Phi(y_1, y, Qu+v)},$$

$$\Phi(y_1, y, Qu+v) = V + \lambda(u),$$

$$\begin{aligned} \lambda(u) = \sigma(Qu+v) &= \frac{k \delta_n t^{2n} (y_1^n - y^n)}{P^n} (Qu+v)^n + \dots \\ &\dots + \frac{k \delta_1 t^2 (y_1 - y)}{P} (Qu+v), \end{aligned}$$

причем V не зависит от u . Далее, при любом s , взятом из ряда $n, \dots, 1$, имеем:

$$\frac{k\delta_s t^{2s} (y_1^s - y^s)}{P^s} n (Qu + v)^{s-1} Q \ll \\ \ll \frac{k|\delta_s| t^{2s} Y^s H^{-1}}{P^s} X^{s-1} Q \ll \frac{k|\delta_s|^{0,5} t^2 Y Q}{P} \ll P^{-0,15}.$$

Поэтому (P достаточно велико) $|\lambda'(u)| < 0,5$. Кроме того, интервал $-vQ^{-1} < u \leq (X-v)Q^{-1}$ можно разбить на не более чем $2n-2$ интервала, в каждом из которых $\lambda'(u)$ монотонна и не обращается в нуль внутри интервала. Поэтому (лемма 1)

$$S_v = \int_{-vQ^{-1}}^{(X-v)Q^{-1}} e^{2\pi i \lambda(u)} du + O(1) = \frac{X}{Q} \int_0^1 e^{2\pi i \alpha(X\eta)} d\eta + O(1).$$

Согласно лемме 2, отсюда находим:

$$S_v \ll \frac{X}{Q} u_0^{-v}, \quad W_{y_1, v} \ll Xu_0^{-1},$$

где u_0 не меньше наибольшего из чисел 1 и

$$\left| \frac{k\delta_{s'} t^{2s'} (y_1^{s'} - y^{s'})}{P^{s'}} X^{s'} \right| \gg \left| \frac{\delta_{s'} (y_1 - y)}{Y} \right|.$$

Поэтому, полагая $|y_1 - y| = f$, $Y|\delta_{s'}|^{-1} = N$, будем иметь:

$$W_{y_1, v} \ll X \min(1, N^v f^{-v}),$$

$$\sum_{y_1} \sum_v W_{y_1, v} \ll XY_0 (N + N^v \sum_{N < f < Y_0} f^{-v}) \ll \\ \ll XY_0^2 (NY_0^{-1} + N^v Y_0^{-v}) \ll XY_0^2 P^{-0,5v^*}, \\ W^2 \ll P^{2\varepsilon_0 - 0,5v^*} X^2 Y_0^2, \quad W \ll P^{\varepsilon_0 - 0,25v^*} XY_0.$$

Часть суммы S , отвечающая интервалу (18), будет

$$\ll P^{\varepsilon_0 - 0,25v^*} XY \ll \frac{P^{1+\varepsilon_0 - 0,25v^*}}{t^2}.$$

Отсюда уже легко выводим неравенство для S , указанное в лемме.

ЛЕММА 15. Пусть n — постоянное и при каждом s , взятом из ряда $n, \dots, 1$, имеет место свое равенство вида:

$$A_s = \frac{a_s}{q_s} + \frac{\delta_s}{P^s}, \quad (a_s, q_s) = 1, \quad |\delta_s| \leq P^{0,5},$$

причем $Q \leq P^v$ и по меньшей мере для одного $s = s'$ имеем $|\delta_{s'}| > P^v$. Пусть, далее,

$$P^{0,75} < M \leq P, \quad 2M \leq M' < 4M, \quad k \leq P^{v^*},$$

$$U = \sum_{M < w \leq M'} \sum_{dw \leq P} e^{2\pi i k f(dw)}.$$

где d пробегает возрастающую последовательность положительных чисел, взаимно простых с Q , а w пробегает числа натурального ряда, взаимно простые с Q . Тогда имеем:

$$U \ll P^{1-0,5\nu^2+\varepsilon}$$

Доказательство. Находим:

$$U = U_1 + O(P^{1-0,5\nu^2} \ln P), \quad U_1 = \sum_{\substack{M < w \leq M' \\ P^{1-0,5\nu^2} < dw \leq P}} e^{2\pi i k f(dw)},$$

$$U_1 = \sum_{d \leq PM^{-1}} \sum_{t \in Q} u(t) S_{d,t}, \quad S_{d,t} = \sum_{\substack{M < tz \leq M' \\ P^{1-0,5\nu^2} < dtz \leq P}} e^{2\pi i k f(dtz)}.$$

При $t > P^{0,5\nu^2}$ имеем $S_{d,t} \ll MP^{-0,5\nu^2}$. Пусть $t \leq P^{0,5\nu^2}$. Находим:

$$S_{d,t} = \sum_{v=1}^Q S_v, \quad S_v = \sum_{\substack{M < t(Qu+v) \leq M' \\ P^{1-0,5\nu^2} < dt(Qu+v) \leq P}} e^{2\pi i k f(dt(Qu+v))},$$

$$kf(dt(Qu+v)) = V + \lambda(u),$$

$$\lambda(u) = \frac{\delta_n}{P^n} k d^n t^n (Qu+v)^n + \dots + \frac{\delta_1}{P} k dt (Qu+v),$$

где V не зависит от u . Далее, при любом s , взятом из ряда $n, \dots, 1$, имеем:

$$\frac{\delta_s}{P^s} k d^s t^s (Qu+v)^{s-1} Q \ll \frac{P^{0,5} k t Q}{M} \ll P^{-0,125}.$$

Поэтому (P достаточно велико) $|\lambda'(u)| \leq 0.5$. Кроме того, интервал суммирования суммы S_v можно разбить на не более чем $2n-2$ интервала, в каждом из которых $\lambda'(u)$ монотонна и не обращается в нуль внутри интервала. Поэтому, представляя указанный интервал суммирования суммы S_v в виде:

$$\frac{Z_1-v}{Q} < u \leq \frac{Z_2-v}{Q}, \quad Z_1 = \max\left(\frac{M}{t}, \frac{P^{1-0,5\nu^2}}{dt}\right),$$

$$Z_2 = \min\left(\frac{M'}{t}, \frac{P}{dt}\right),$$

полагая $M't^{-1} = N$ и обозначая символом $\sigma(z)$ функцию, получаемую из (u) заменой $Qu+v$ буквою z , получим (лемма 1):

$$\begin{aligned} S_v &= \int_{(Z_1-v)Q^{-1}}^{(Z_2-v)Q^{-1}} e^{2\pi i \lambda(u)} du + O(1) = \frac{1}{Q} \int_{Z_1}^{Z_2} e^{2\pi i \sigma(z)} dz = \\ &= \frac{N}{Q} \int_{Z_1 N^{-1}}^{Z_2 N^{-1}} e^{2\pi i \sigma(N\eta)} d\eta + O(1). \end{aligned}$$

Замечая, что коэффициент при $\eta^{s'}$ многочлена $\sigma(N\eta)$ численно будет

$$\geq P^{\nu-s'} d^{s'} t^{s'} N^{s'} \gg P^{\nu-0,5\nu^2} \gg P^{0,5\nu},$$

согласно лемме 2 будем иметь:

$$S_v \ll \frac{M}{Q^t} P^{-0.5v^2}, \quad S_{d,t} \ll \frac{MP^{-0.5v^2}}{t}, \quad U \ll P^{1-0.5v^2+\varepsilon}.$$

ЛЕММА 16. Пусть в отношении чисел A_s (следовательно, также и в отношении чисел θ_s и Q) выполнены условия одной из трех пар лемм: 10 и 11, 12 и 13, 14 и 15. При этом допустим, что для лемм 12 и 13 вводится новое ограничение: $Q > P^v$. Пусть, далее,

$$\rho_2 = \frac{1}{62n^2 \ln 12n^2}, \quad k \leq P^{2\rho_2}.$$

Тогда для суммы

$$W = \sum_{p \leq P} e^{2\pi i k f(p)}$$

имеет место неравенство

$$W \ll P^{1-\rho_2}.$$

Доказательство. Пусть

$$\rho_1 = \frac{1}{61n^2 \ln 12n^2}.$$

Леммы 10 и 11, леммы 12 и 13 — обе с ограничением $Q > P^v$, наконец, леммы 14 и 15 остаются верными, если неравенство, ограничивающее k , во всех этих леммах заменим одним и тем же неравенством

$$k \leq P^{2\rho_1};$$

неравенства, ограничивающие S в леммах 10, 12 (при $Q > P^v$), 14, заменим одним и тем же неравенством

$$S \ll P^{1-\rho_1} t^{-1,1}; \quad (20)$$

наконец, неравенства, ограничивающие U в леммах 11, 13 (при $Q > P^v$), 15 заменим одним и тем же неравенством

$$U \ll P^{1-\rho_1}. \quad (21)$$

Справедливость всех этих утверждений следует из того обстоятельства, что новые неравенства являются более грубыми, чем прежние.

Дальнейшая часть доказательства будет представлять полную аналогию доказательству теоремы 1 работы (1). Пусть F — произведение всех простых чисел, не превосходящих $P^{0,25}$ и не делящих Q , пусть r пробегает положительные числа, взаимно простые с FQ , d пробегает делители числа F , наконец, m пробегает положительные числа, взаимно простые с Q . Находим:

$$\sum_{r \leq P} e^{2\pi i k f(r)} = \sum_{dm \leq P} \mu(d) e^{2\pi i k f(dm)}. \quad (22)$$

Пусть r_j пробегает значения r , имеющие ровно j простых сомножителей. Тогда левая часть равенства (22) представится в форме:

$$W + W_2 + W_3 + O(P^{0,25}),$$

$$S_2 = \sum_{r_2 < P} e^{2\pi i k f(r_2)},$$

$$S_3 = \sum_{r_3 < P} e^{2\pi i k f(r_3)}.$$

Сначала оценим W_2 . Очевидно,

$$W_2 = \frac{1}{2} W'_2 + O(\sqrt{P}), \quad W'_2 = \sum_{r_1 r'_1 \leq P} e^{2\pi i k f(r_1 r'_1)},$$

где r'_1 пробегает те же значения, что и r_1 . Находим:

$$W'_2 = \sum_{\substack{r_1 \leq \sqrt{P} \\ r_1 r'_1 \leq P}} \sum_{r'_1} e^{2\pi i k f(r_1 r'_1)} + \sum_{\substack{r'_1 < \sqrt{P} \\ r_1 > \sqrt{P} \\ r_1 r'_1 \leq P}} \sum_{r_1} e^{2\pi i k f(r_1 r'_1)}.$$

К суммам, стоящим в правой части, можно применить неравенство (20), так как обе эти суммы — частные виды суммы S ($t = 1$, $\psi(y) = 1$, $y = r_1$ для первой суммы и $y = r'_1$ для второй суммы). Получим:

$$W'_2 \ll P^{1-\rho_1}, \quad W_2 \ll P^{1-\rho_1}.$$

Далее, оценим сумму W_3 . Очевидно,

$$W_3 = \frac{1}{3} W'_3 + O(P^{0,75}), \quad W'_3 = \sum_{r_1, r_2 \leq P} \sum_{r_3} e^{2\pi i k f(r_1 r_2 r_3)}.$$

К сумме W'_3 опять можно применить неравенство (20), так как, ввиду $r_2 > P$, здесь r_1 пробегает значения с условием

$$P^{0,25} < r_1 < P^{0,5}.$$

Получим:

$$W'_3 \ll P^{1-\rho_1}, \quad W_3 \ll P^{1-\rho_1}.$$

Оценим правую часть равенства (22). Весь интервал $0 < m \leq P$ можно разбить на $\ll \ln P$ интервалов вида:

$$M < m \leq M', \quad 2M \leq M' < 4M. \quad (23)$$

Часть правой части равенства (22), отвечающую интервалу (23), обозначим символом U_M . Пусть c — произвольно малое положительное постоянное $\leq 0,1$. Сначала рассмотрим случай $M \leq P^{0,25-c}$. Согласно лемме 5 гл. IX книги (3), все делители d числа F , не превосходящие P , можно распределить среди

$$< D = (\ln P)^{\frac{\ln \ln P}{\ln(1+c)}}$$

совокупностей, причем для каждой совокупности существует свое φ с условием, что принадлежащие этой совокупности значения d удовлетворяют неравенствам

$$\varphi < d \leq \varphi^{1+c}.$$

Для некоторых совокупностей может оказаться

$$\varphi \leq P^{0,25} M^{-1}.$$

Для каждой из оставшихся совокупностей существует свое целое положительное B и две возрастающие последовательности целых положительных чисел u и v такие, что все значения u лежат в интервале

$$P^{0,25-c} M^{-1} < u \leq P^{0,5} M^{-1},$$

причем все значения d указанной совокупности, взятые каждое B раз, получим, если из всех произведений uv выберем лишь те, которые удовлетворяют условию $(u, v) = 1$.

Заметим также, что из самого доказательства упомянутой леммы следует, что для всех чисел d , принадлежащих одной и той же совокупности, $\mu(d)$ сохраняет одно и то же значение. Умноженную на соответствующее общее значение функции $\mu(d)$ часть суммы U_M , отвечающую выбранной совокупности, обозначим символом U_0 .

Сначала рассмотрим случай

$$\varphi \leq P^{0,5} M^{-1}.$$

Тогда, очевидно, имеем:

$$U_0 \leq P^{0,5(1+c)} \leq P^{1-\rho_0}.$$

Далее, рассмотрим случай

$$\varphi > P^{0,5} M^{-1}.$$

Тогда U_0 можно представить в виде

$$U_0 = \sum_m \sum_u \sum_v e^{2\pi i k f(muv)},$$

где суммирование распространяется на системы значений с условиями:

$$M < m \leq M', \quad P^{0,25-c} M^{-1} < u \leq P^{0,5}, \quad muv \leq P, \quad (u, v) = 1.$$

Заставляя t пробегать делители числа F , находим:

$$U_0 = \sum_t \mu(t) U_{0,t}, \quad U_{0,t} = \sum_m \sum_{u_1} \sum_{v_1} e^{2\pi i k f(t^3 m u_1 v_1)},$$

где u_1 и v_1 пробегают частные от деления на t чисел u и v , кратных t , и суммирование распространяется на область

$$M < m < M', \quad P^{0,25-c} M^{-1} t^{-1} < u_1 \leq P^{0,5} M^{-1} t^{-1}, \\ t^2 m u_1 v_1 \leq P.$$

Но число $\psi(y)$ решений неопределенного уравнения $mu_1 = y$ не превосходит $\tau(y)$. Следовательно, $\psi(y) \ll P^\epsilon$. Поэтому $U_{0,t}$ может быть представлено в виде:

$$U_{0,t} = \sum_y \psi(y) \sum_{v_1} e^{2\pi i k f(t^2 y v_1)},$$

где суммирование распространяется на область

$$P^{0,25-c} t^{-1} \ll y \ll P^{0,5} t^{-1}, \quad t^2 y v_1 \leq P.$$

Следовательно, $U_{0,t}$ является частным видом суммы S , указанной в начале доказательства. Согласно (20), получим:

$$U_{0,t} \ll P^{1-\rho_1} t^{-1,1}, \quad U_0 \ll P^{1-\rho_1}.$$

Таким образом, в случае $M \leq P^{0,25-c}$ будем иметь:

$$U_M \ll DP^{1-\rho_1} \ll P^{1-\rho_1+\epsilon'}.$$

Теперь рассмотрим случай $M > P^{0,25-c}$. Сумму U_M мы представим в виде:

$$U_M = U'_M - U''_M, \quad U'_M = \sum_{\substack{M < m \leq M' \\ d'm \leq P}} e^{2\pi i k f(d'm)},$$

$$U''_M = \sum_{\substack{M < m \leq M' \\ d''m \leq P}} e^{2\pi i k f(d''m)},$$

где d' пробегает значения d с условием $\mu(d) = 1$, а d'' пробегает значения d с условием $\mu(d) = -1$. Мы оценим лишь U'_M , так как U''_M оценивается аналогично.

Пусть сначала $P^{0,25-c} < M \leq P^{0,5}$. Тогда U'_M будет частным видом суммы $S(t=1, m=y, d=x, \psi(y)=1)$. Согласно (20), получим:

$$U_M \ll P^{1-\rho_1}.$$

Пусть, далее, $P^{0,5} < M \leq P^{0,75}$. Тогда d' может пробегать лишь значения с условием

$$P^{0,25} \ll d < P^{0,5}.$$

Поэтому U'_M будет частным видом суммы $S(t=1, d=y, m=x, \psi(y)=1)$. Согласно (20), получим:

$$U'_M \ll P^{1-\rho_1}.$$

Пусть, наконец, $M > P^{0,75}$. Тогда U'_M является частным видом суммы U , указанной в начале доказательства. Согласно (21), получим:

$$U'_M \ll P^{1-\rho_1}.$$

Собирая все доказанное, мы и убеждаемся в справедливости леммы 16.

ЛЕММА 17. Пусть n — постоянное и при каждом s , взятом из ряда $n, \dots, 1$, имеет место свое равенство вида:

$$A_s = \frac{a_s}{q_s} + z_s, \quad (a_s, q_s) = 1, \quad |z_s| \leq P^{-s+\nu},$$

причем $Q \leq P^\nu$, $k \leq P^\nu$. Тогда имеем:

$$\sum_{p \leq P} e^{2\pi i k f(p)} \ll P^{1+\varepsilon}(k, Q)^{0,5\nu} Q^{-0,5\nu}$$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству леммы 16, но вместо $P^{-\rho_1}$ теперь следует брать $P^{\varepsilon'}(K, Q)^{0,5} Q^{-0,5\nu}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть n — постоянное,

$$S = \sum_{p \leq P} e^{2\pi i k f(p)}.$$

Точки n -мерного пространства мы разобьем на точки первого класса и точки второго класса. Точкою первого класса мы назовем точку

$$\left(\frac{a_n}{q_n} + z_n, \dots, \frac{a_1}{q_1} + z_1 \right),$$

где первые слагаемые — рациональные несократимые дроби с положительными знаменателями, имеющими общим наименьшим кратным число Q , не превосходящее P^ν , вторые же слагаемые подчинены условиям

$$|z_s| \leq P^{-s+\nu}.$$

Точкою второго класса назовем всякую точку, не являющуюся точкою первого класса. Тогда:

если (A_n, \dots, A_1) — точка второго класса, то, полагая

$$\rho = \frac{1}{62n^2 \ln 12n^2}, \quad k \leq P^{2\rho},$$

имеем

$$S \ll P^{1-\rho};$$

если же (A_n, \dots, A_1) — точка первого класса, то при $k \leq Q^\nu$ имеем

$$S \ll P^{1+\varepsilon}(k, Q)^{0,5\nu} Q^{-0,5\nu}.$$

Доказательство. Всякое A_s ряда A_n, \dots, A_1 можно представить в виде:

$$A_s = \frac{a_s}{q_s} + \frac{\theta_s}{q_t \tau_s}, \quad (a_s, q_s) = 1, \quad \tau_s = P^{0,5s}.$$

Если при этом по меньшей мере одно из чисел q_n, \dots, q_2 превосходит $P^{0,25}$, то, ввиду

$$2\rho < 1,5 \frac{0,041}{\ln n + 2},$$

согласно лемме 7, при $k \leq P^{2\rho}$ будем иметь $S \ll P^{1-\rho}$.

Если каждое из чисел q_n, \dots, q_2 не превосходит $P^{0,25}$, причем $Q_1 > P^{\frac{1}{9}}$, то, ввиду

$$\rho < \frac{1}{9 \cdot 6,7n^2 \ln 12n^2},$$

согласно лемме 8, при $k \leq P^{2\rho}$ будем иметь $S \ll P^{1-\rho}$.

Если $Q_0 \leq P^{\frac{1}{9}}$, но $Q > P^{\frac{1}{9}}$, то, ввиду

$$\rho < \frac{1}{9 \cdot 6,75n^2 \ln 12n^2},$$

согласно лемме 9, при $k \leq P^{2\rho}$ будем иметь $S \ll P^{1-\rho}$.

Пусть $Q \leq P^{\frac{1}{9}}$ и по меньшей мере для одного s имеем $|z_s| > P^{0,5-s}$. Тогда справедливость теоремы будет следовать из леммы 16 (условия лемм 10 и 11).

Пусть $P^v < Q \leq P^{\frac{1}{9}}$ и для каждого s имеем $|z_s| \leq P^{0,5-s}$. Тогда справедливость теоремы будет следовать из леммы 16 (условия лемм 12 и 13).

Пусть $Q \leq P^v$, но по меньшей мере для одного s имеем $|z_s| \leq P^{-s+v}$. Тогда справедливость теоремы будет следовать из леммы 16 (условия лемм 14 и 15).

Пусть, наконец, $Q \leq P^v$ и для каждого s имеем $|z_s| \leq P^{-s+v}$. Тогда справедливость теоремы будет следовать из леммы 18.

ТЕОРЕМА 2, а. Пусть n — постоянное и точки n -мерного пространства разбиты на два класса по способу, указанному в теореме 2. Пусть, далее,

$$\rho_3 = \frac{1}{63n^2 \ln 12n^2}.$$

Тогда при любом σ , удовлетворяющем условию $0 < \sigma \leq 1$, для числа $T(\sigma)$ дробей вида

$$\{f(p)\}, \quad p \leq P,$$

с условием $0 \leq \{f(p)\} < \sigma$ будем иметь

$$T(\sigma) = \sigma\pi(P) + O(\Delta),$$

где следует брать

$$\Delta = P^{1-\rho_3}, \quad \text{если } (A_n, \dots, A_1) \text{ — точка второго класса,}$$

$$\Delta = P^{1+\varepsilon_2} Q^{-0,5v}, \quad \text{если } (A_n, \dots, A_1) \text{ — точка первого класса.}$$

Доказательство. Относительно доказательства этой теоремы можно сделать то же замечание, которое сделано в отношении доказательства теоремы 1, b).

Поступило
21. I. 1957

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Виноградов И. М., Об оценке тригонометрических сумм с простыми числами, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 12 (1948), 225—248; Избр. труды, АН СССР (1952), 341—365.
 - ² Виноградов И. М., Особые случаи оценок тригонометрических сумм, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 20 (1956), 289—302.
 - ³ Виноградов И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова Ак. наук СССР, XXIII, 1947; Избр. труды, АН СССР (1952), 237—331.
 - ⁴ Виноградов И. М., Общие теоремы о верхней границе модуля тригонометрической суммы, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 15 (1951), 109—130; Избр. труды, АН СССР (1952), 406—427.
 - ⁵ Хуа Ло-Кен, Аддитивная теория простых чисел, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова Ак. наук СССР, XXII, 1947.
-

А. И. МАЛЬЦЕВ

СВОБОДНЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ АЛГЕБРЫ

В работе излагаются основы теории свободных топологических алгебраических систем, обобщающей теорию свободных топологических групп А. А. Маркова ⁽¹³⁾ и относящиеся к ней результаты других авторов.

Около десяти лет назад А. А. Марков ⁽¹³⁾ построил теорию свободных топологических групп над вполне регулярными пространствами. В работах М. И. Граева ⁽⁵⁾, ⁽⁶⁾, Т. Накаяма ⁽¹⁵⁾, С. Какутани ⁽⁸⁾ доказательства основных результатов этой теории были значительно упрощены, а также был получен ряд новых теорем о свободных топологических группах, более полно вскрывающих их строение и в какой-то мере параллельных результатам теории абстрактных свободных групп. Однако известно, что теория свободных абстрактных групп, колец и других алгебраических образований находит свое наиболее естественное место в рамках общей теории алгебраических систем. Это обстоятельство, так же как и внутреннее развитие некоторых вопросов самой теории топологических групп, делали целесообразной попытку создания общей теории свободных топологизированных алгебраических систем. Основы такой теории и излагаются в настоящей работе.

Эта работа по содержанию примыкает, кроме указанных статей, также к работе ⁽¹²⁾. Для облегчения чтения доказательства приведены полностью даже в случаях, когда они лишь по форме отличаются от доказательств соответствующих фактов теории топологических групп.

Под словом *алгебра* далее понимается универсальная алгебра в смысле Г. Биркгофа ⁽³⁾, т. е. произвольное множество элементов, снабженное конечной совокупностью определенных на нем однозначных операций, производимых над конечными системами элементов. В отличие от этих общих алгебр, обычные алгебры над полями будут называться линейными алгебрами. Алгебра называется топологической, если множество ее элементов есть топологическое пространство, а основные операции непрерывны в нем.

В § 1 излагается определение топологической алгебры с данным порождающим топологическим пространством и заданной системой определяющих соотношений и доказываются ее существование и единственность. Там же доказывается, что топологическая алгебра над топологическим пространством, заданная определяющими соотношениями, финитно порождается элементами указанного пространства.

Основным результатом § 2 является доказательство обобщенной теоремы Дика, из которой, в частности, видно, что классы алгебр с перестано-

вочными конгруэнтностями занимают особое положение и в теории свободных топологических алгебр [ср. ⁽¹²⁾]. После этого определяются свободные топологические алгебры и свободные объединения их. Аналогичные понятия рассматривались Р. Сикорским ⁽¹⁹⁾.

В § 3, имеющем вспомогательный характер, напоминаются известные факты, связанные с понятием сходимости в хаусдорфовых пространствах, и обсуждается один способ задания топологии посредством предельных операций, играющий в дальнейшем существенную роль.

В теории свободных топологических алгебр важное значение имеет нахождение свободной топологии. Некоторый трансфинитный процесс для получения этой топологии рассмотрен в § 4. Там же более подробно изучены свойства начальной топологии, получаемой в этом трансфинитном процессе.

В § 5 теоремы М. И. Граева о задании свободной топологии группы над бикompактным пространством доказываются для произвольных алгебр. Кроме того, в § 5 явно указывается свободная топология алгебр с локально компактным порождающим пространством. Последний результат является, по-видимому, новым и для топологических групп.

В §§ 6, 7, 8 рассматривается алгебраическая структура свободных топологических алгебр частных классов. Сначала в § 6 берутся классы с наиболее простыми определяющими тождествами и в этих классах явно указывается топология и алгебраическое строение свободных алгебр.

В § 7 показывается, как из общих результатов работы можно вывести основные факты теории свободных топологических групп, а также доказывается, что свободные нильпотентные топологические группы различных ступеней являются фактор-группами свободной топологической группы по соответствующим членам ее нижнего центрального ряда.

В § 8 устанавливается алгебраическое строение свободных топологических колец широкой системы классов, включающей классы неассоциативных колец, ассоциативных колец, колец Ли и т. п. Там же устанавливается алгебраическая структура свободных топологических колец Буля.

В заключение формулируются некоторые нерешенные вопросы.

§ 1. Определяющие соотношения

В дальнейшем, если не оговорено противное, все топологические пространства предполагаются хаусдорфовыми. В частности, *топологической алгеброй* называется хаусдорфово пространство, снабженное конечной системой непрерывных операций $\varphi_i(x_1, \dots, x_{n_i})$ ($i = 1, \dots, s$), называемых основными операциями алгебры. *Многочленом* от букв x, \dots, z называется имеющее смысл выражение, составленное из этих букв, скобок и символов основных операций алгебры. Алгебры с одним и тем же набором основных операций, все элементы которых удовлетворяют некоторой фиксированной системе \mathfrak{S} тождеств вида $f = g$, где f, g — многочлены, называются принадлежащими одному и тому же *примитивному классу* \mathfrak{S} [(см. ⁽¹²⁾).

Пусть заданы примитивный класс алгебр, характеризующийся набором тождеств \mathfrak{S} , и некоторое топологическое пространство X .

Определение. Топологическая алгебра A класса \mathfrak{S} с заданным непрерывным отображением σ пространства X в A называется определяемой в \mathfrak{S} пространством X и соотношениями

$$f_{\lambda}(x_{\lambda 1}, \dots, x_{\lambda m_{\lambda}}) = g_{\lambda}(x_{\lambda 1}, \dots, x_{\lambda m_{\lambda}}) \quad (x_{\lambda i} \in X),$$

где f_{λ}, g_{λ} — некоторые многочлены, если

F1) в A выполнены равенства: $f_{\lambda}(x_{\lambda 1}^{\sigma}, \dots, x_{\lambda m_{\lambda}}^{\sigma}) = g_{\lambda}(x_{\lambda 1}^{\sigma}, \dots, x_{\lambda m_{\lambda}}^{\sigma})$;

F2) A топологически порождается образами элементов X , т. е. в A нет замкнутой подалгебры, отличной от A и содержащей X^{σ} ;

F3) для каждого непрерывного отображения γ пространства X в произвольную топологическую алгебру C класса \mathfrak{S} , при котором удовлетворяются соотношения:

$$f_{\lambda}(x_{\lambda 1}^{\gamma}, \dots, x_{\lambda m_{\lambda}}^{\gamma}) = g_{\lambda}(x_{\lambda 1}^{\gamma}, \dots, x_{\lambda m_{\lambda}}^{\gamma}),$$

существует непрерывный гомоморфизм α алгебры A в алгебру C , согласованный с отображениями σ, γ , т. е. такой, что $x^{\sigma\alpha} = x^{\gamma}$ для всех x из X .

Обычным образом теперь может быть доказана

ТЕОРЕМА 1. Для любого топологического пространства X , любого класса \mathfrak{S} и произвольной системы многочленов f_{λ}, g_{λ} алгебра A со свойствами F1, F2, F3 существует и определяется этими свойствами однозначно с точностью до топологических изоморфизмов над образом в ней пространства X .

Начнем с единственности. Пусть алгебры A, B с отображениями σ, τ в них пространства X обладают свойствами F1, F2, F3. Согласно F3, найдутся гомоморфизм α алгебры A в B и гомоморфизм β алгебры B в A для которых

$$x^{\sigma\alpha\beta} = x^{\tau\beta} = x^{\sigma}, \quad x^{\tau\beta\alpha} = x^{\sigma\alpha} = x^{\tau}.$$

Отсюда видно, что отображения α, β взаимно обратны, а потому и взаимно однозначны на множествах X^{σ}, X^{τ} . Обозначим через A^*, B^* подалгебры, порожденные финитно (алгебраически) элементами множеств X^{σ} и X^{τ} соответственно в алгебрах A, B . Пусть

$$a^{\alpha} = b, \quad a = f(x_1^{\sigma}, \dots, x_n^{\sigma}), \quad x_i \in X,$$

где f — некоторый многочлен. В силу гомоморфности отображения α имеем:

$$b = f(x_1^{\tau}, \dots, x_n^{\tau}),$$

откуда

$$b^{\beta} = f(x_1^{\tau\beta}, \dots, x_n^{\tau\beta}) = a,$$

т. е. отображения α, β взаимно обратны на A^* и B^* . Так как замыкание подалгебры есть подалгебра, то, согласно F2, множества A^*, B^* плотны в A, B . Пользуясь непрерывностью α, β , отсюда легко выводим, что α и β взаимно обратны, а потому и взаимно однозначны на A и B . Следовательно, α изоморфно отображает A на B , причем образ какого-либо элемента X в A переходит в образ этого же элемента в B .

Существование алгебры A непосредственно следует из свойств прямых произведений топологических алгебр. Напомним соответствующие определения. Пусть A_α ($\alpha \in \Sigma$) — система топологических алгебр фиксированного класса \mathfrak{S} . Совокупность всех функций $h(\alpha)$, определенных на Σ со значениями в $\bigcup A_\alpha$, удовлетворяющими требованиям $h(\alpha) \in A_\alpha$, есть декартово произведение $H = \Pi A_\alpha$. В H вводят тихоновскую топологию, объявляя открытыми декартовы произведения открытых подмножеств, выбранных в конечном числе перемножаемых пространств, на остальные пространства, а также произвольные объединения этих произведений.

Наконец, полагают, по определению,

$$\varphi_i(h_1, \dots, h_{n_i}) = h \quad (h_i, h \in H),$$

где

$$h(\alpha) = \varphi_i(h_1(\alpha), \dots, h_{n_i}(\alpha)), \quad \alpha \in \Sigma.$$

Тем самым множество H обращается в топологическую алгебру того же примитивного класса \mathfrak{S} , что и заданные алгебры A_α . Алгебра H далее и будет называться прямым топологическим произведением данных топологических алгебр.

Возвращаясь к доказательству существования, обозначим через m мощность заданного пространства X и из совокупности всех топологически неизоморфных алгебр мощности $\leq 2^{2^{m+\aleph_0}}$ выберем все те алгебры A_α , которые удовлетворяют условиям F1, F2. Обозначим через σ_α то непрерывное отображение X в A_α , о котором идет речь в F1, F2. Отображения σ_α порождают естественное отображение σ пространства X в прямое произведение $H = \Pi A_\alpha$, определяемое равенством

$$x^\sigma(\alpha) = x^{\sigma_\alpha} \quad (\alpha \in \Sigma).$$

Легко видеть, что это отображение также непрерывно. Подалгебра A , топологически порождаемая элементами X^σ в алгебре H , обладает свойствами F1, F2. Но A удовлетворяет и требованию F3. В самом деле, если B — какая-либо алгебра со свойствами F1, F2, то мощность ее не больше $2^{2^{m+\aleph_0}}$ *, так как B содержит в качестве плотного подмножества подалгебру B^* , порожденную алгебраически элементами X^σ и, следовательно, имеющую мощность $\leq m + \aleph_0$. Таким образом, среди сомножителей A_α имеется алгебра A_λ , изоморфная B над X . Проектирование $a \rightarrow a(\lambda)$ алгебры A на сомножитель A_λ является искомым непрерывным гомоморфизмом A на $A_\lambda = B$, согласованным с отображениями $X \rightarrow A$ и $X \rightarrow B$.

ТЕОРЕМА 2. *Алгебра A , задаваемая в каком-либо классе \mathfrak{S} порождающим топологическим пространством X и некоторыми определяющими соотношениями, порождается алгебраически образами элементов X , т. е. каждый элемент A выражается в виде многочлена от образов элементов X .*

* Как сообщил мне А. А. Марков, используемая здесь теорема о том, что мощность хаусдорфова пространства H не превосходит 2^{2^a} , если оно содержит плотное подмножество A мощности a , впервые доказана М. Я. Церельманом в не опубликованной до сих пор работе. Там же построены примеры, показывающие, что мощность 2^{2^a} действительно достигается.

Для доказательства обозначим через A^* совокупность элементов A , выражающихся в виде конечных многочленов от образов элементов X . Оставляя в A^* топологию, которую она имеет, как подмножество топологического пространства A , обратим A^* в топологическую алгебру, причем пространство X непрерывно отображается в A^* с помощью того же отображения σ , что и в заданную алгебру A . В силу F3, найдется непрерывный гомоморфизм τ алгебры A в алгебру A^* , согласованный с отображениями $X \rightarrow A$, $X \rightarrow A^*$. Поскольку A^* алгебраически порождается образами элементов X , то τ будет отображением A на всю алгебру A^* , причем для $a \in A^*$ имеем: $a^\tau = a$. Так как A^* плотно в A , то для каждого $a \in A$ найдется направленное множество $\{a_\lambda\}$ элементов A^* , сходящееся к a (см. § 3). Из непрерывности τ следует, что

$$a^\tau = \lim \{a_\lambda^\tau\} = a,$$

откуда $A = A^*$.

Проблема явного описания топологической алгебры, заданной порождающим пространством X и определяющими соотношениями S в классе \mathfrak{S} , естественно расчленяется на следующие части:

А) Изоморфна ли A абстрактной алгебре \tilde{A} , заданной в классе \mathfrak{S} теми же определяющими соотношениями S и порождающим множеством X , что и сама алгебра A ?

Б) Содержит ли A подпространство X топологически, т. е. является ли каноническое отображение σ пространства X в A гомеоморфизмом?

В) Указать в каком-то смысле явно топологию A .

Отметим, что положительный ответ на вопрос Б) в работах по теории свободных топологических групп ⁽¹³⁾, ⁽⁵⁾ был включен в качестве аксиомы в определение свободной топологической группы. Поэтому доказательство существования в указанных работах проводилось для вполне регулярных пространств X . В нашем определении такого требования нет. Поэтому соответствующие алгебры всегда существуют, но зато не всегда содержат X топологически.

Достаточные условия для положительного ответа на вопросы А), Б) мы сформулируем в виде следующих замечаний, непосредственно обобщающих известные результаты теории топологических групп:

Замечание 1. Топологическая алгебра A с определяющими соотношениями S и порождающим пространством X изоморфна абстрактной алгебре A с теми же соотношениями и порождающим множеством, если для каждой двух многочленов f, g от элементов X , имеющих различные значения в A , существует непрерывное отображение пространства X в подходящую топологическую алгебру B рассматриваемого примитивного класса такое, что в B выполняются все определяющие соотношения для образов элементов из X и $f \neq g$ в B .

Замечание 2. Для того чтобы алгебра A содержала топологически пространство X , достаточно, чтобы существовала такая система $\{\alpha\}$ непрерывных отображений пространства X в подходящие топологические алгебры A_α , сохраняющих определяющие соотношения, чтобы для каждой окрестности U произвольной точки $x \in X$ нашлась конечная система окрестностей U_1, \dots, U_n точек $x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_n}$, для которой пересечение $\bigcap U_i^{\alpha_i^{-1}}$

прообразов содержится в U . Если при этом X^α окажется замкнутым в каждой алгебре A_α , то X будет содержаться в A в качестве замкнутого подмножества.

Справедливость первого замечания непосредственно вытекает из определения алгебр с данными пространством X и определяющими соотношениями S .

Для доказательства второго замечания рассмотрим указанную выше конструкцию алгебры A с помощью прямого произведения H . Все алгебры A_α войдут в состав H в качестве сомножителей с отображениями α . Нужно убедиться только, что каноническое отображение X внутрь H при заданных условиях будет гомеоморфизмом. В случае, когда все A_α гомеоморфны, явное доказательство этого содержится в работе (18). В общем случае доказательство такое же.

До сих пор рассматривались произвольные хаусдорфовы топологические пространства. Однако поскольку все рассуждения основывались лишь на свойствах прямых топологических произведений, то предшествующие определения и теоремы останутся в силе, если вместо хаусдорфовых пространств рассматривать какие-либо другие классы K пространств при условии, что эти классы обладают следующими свойствами [ср. (8)]:

K_1) прямое произведение K -алгебр есть K -алгебра;

K_2) всякая подалгебра K -алгебры есть K -алгебра.

Таковыми классами являются, например, классы пространств регулярных, вполне регулярных [см. (1)], с функционально отделимыми парами точек и др. Более того, для построения класса с упомянутыми свойствами можно взять какой-нибудь набор топологических пространств и рассматривать все те пространства, которые могут быть получены из взятых с помощью операций K_1, K_2 . В частности, если в качестве исходных пространств взять пространства с дискретной топологией, то получаемые с помощью операций K_1, K_2 топологии составляют класс алгебраических топологий, изучавшихся в работе (7). Топологические пространства этого класса регулярны и вполне разрывны в том смысле, что для любой конечной системы точек x_1, \dots, x_n такого пространства X существует разбиение X на n попарно не пересекающихся замкнутых множеств, содержащих по одной из указанных точек.

Из замечаний 1, 2 теперь непосредственно следует, что для алгебр, порождаемых регулярным и вполне разрывным пространством X , проблема А) решается положительно при любых \mathfrak{S} и S , а проблема Б) решается положительно при условии, что абстрактная алгебра \tilde{A} содержит X .

Это утверждение справедливо как в классе K всех хаусдорфовых алгебр, так и в классе регулярных вполне разрывных алгебр. В дальнейшем, однако, всюду будут рассматриваться только алгебры, свободные в классе хаусдорфовых алгебр.

§ 2. Свободные топологические алгебры. Свободные объединения топологических алгебр

Топологическая алгебра A называется свободной топологической алгеброй над порождающим топологическим пространством X в примитивном классе \mathfrak{S} , если A определяется в \mathfrak{S} только пространством X при пустом множестве S

определяющих равенств. В абстрактном случае роль свободных алгебр подчеркивается тем обстоятельством, что всякая абстрактная алгебра класса \mathfrak{S} с порождающим множеством X изоморфна фактор-алгебре свободной алгебры над X в \mathfrak{S} по подходящей конгруэнтности. В топологическом случае можно утверждать лишь, что всякая топологическая алгебра класса \mathfrak{S} над X будет непрерывным гомоморфным образом свободной топологической алгебры над X (см. ниже теорему 3). Для построения же топологической фактор-алгебры нужно, чтобы гомоморфизм был не только непрерывным, но и *открытым* [см. (12)]. В качестве примера рассмотрим класс \mathfrak{S} полугрупп, т. е. алгебр с одной бинарной ассоциативной операцией умножения. Пусть X — какое-нибудь связное топологическое пространство, состоящее не из одной точки. Выберем в X фиксированную точку e и обозначим через B полугруппу с соотношениями $xy = e$ ($x, y \in X$), состоящую из точек пространства X , а через A — свободную топологическую полугруппу над X . Ясно, что B — топологическая полугруппа. Элементами A являются конечные последовательности (a_1, \dots, a_m) точек X , умножающиеся по закону

$$(a_1, \dots, a_m)(a_{m+1}, \dots, a_n) = (a_1, \dots, a_n),$$

причем окрестностью элемента (a_1, \dots, a_m) в A (см. § 7) является совокупность последовательностей вида:

$$(x_1, \dots, x_m), \quad x_i \in U_i \quad (i = 1, \dots, m),$$

где U_i — произвольные фиксированные окрестности точек a_1, \dots, a_m в X . Каноническое гомоморфное отображение $(a_1, \dots, a_n) \rightarrow a_1, \dots, a_m$ алгебры A на алгебру B является непрерывным, но не открытым, так как открытое множество (X, X) переходит при этом в B в точку $XX = e$, не являющуюся открытым множеством.

Тем не менее существует широкая система классов \mathfrak{S} , для которых упомянутые канонические гомоморфизмы будут открытыми.

ТЕОРЕМА 3. Пусть A — свободная топологическая алгебра над топологическим пространством X с определяющими соотношениями S в классе с тождествами \mathfrak{S} и пусть B — топологическая алгебра над пространством Y с определяющими соотношениями T в классе с тождествами \mathfrak{T} . Предположим, далее, что задано непрерывное отображение τ пространства X на пространство Y такое, что каждое равенство из S , записанное для соответствующих элементов Y , содержится в T , и пусть каждое тождество из \mathfrak{S} содержится в \mathfrak{T} . Тогда отображение τ продолжаемо до непрерывного гомоморфизма τ^* алгебры A на B . Этот гомоморфизм будет заведомо открытым, если в классе \mathfrak{S} все конгруэнтности перестановочны *, B содержит топологически Y и отображение τ пространства X на Y есть гомеоморфизм.

Возможность продолжения τ до непрерывного гомоморфизма τ^* следует из основного определения § 1, так как лишние сравнительно с \mathfrak{S} тожде-

* Перестановочность конгруэнтностей в классе алгебр \mathfrak{S} понимается здесь в смысле работы (12).

ства в \mathfrak{X} можно заменить дополнительной системой индивидуальных соотношений и включить ее в T .

Для доказательства открытости τ^* обозначим через θ отношение конгруентности на A , отвечающее гомоморфному отображению τ^* алгебры A на B . Поскольку гомоморфизм τ^* непрерывен и конгруентности на \mathfrak{S} перестановочны, то, согласно теоремам 10 и 11 работы (12), конгруентность θ будет непрерывна и полна. Поэтому мы можем рассмотреть топологическую фактор-алгебру A/θ с открытым непрерывным гомоморфизмом $A \rightarrow A/\theta$ и непрерывным взаимно однозначным гомоморфизмом $A/\theta \rightarrow B$ [см. (12)]. По условию, B содержит Y . Обозначив заданное каноническое отображение X в A через σ , будем иметь непрерывные отображения $X \rightarrow X^\sigma \rightarrow Y \rightarrow X$, из которых видно, что σ есть гомеоморфизм, т. е. что A содержит X . При отображении $A \rightarrow A/\theta$ различные элементы из X имеют различные образы в A/θ . Кроме того, это отображение непрерывно и открыто. Поэтому образ X_θ множества X в A/θ топологически содержится в A/θ . При отображении $Y \rightarrow X_\theta$ все определяющие соотношения из T выполняются для соответственных элементов X_θ . Поэтому отображение $Y \rightarrow X_\theta$ продолжаемо до непрерывного гомоморфизма φ алгебры B на A/θ . Ясно, что φ обратно для отображения $A/\theta \rightarrow B$ и потому φ — взаимно непрерывный изоморфизм между алгебрами A/θ и B , что и требовалось.

Следствие. Всякая топологическая алгебра B , определяемая в примитивном классе \mathfrak{S} с перестановочными конгруентностями, содержащимися в B , порождающим пространством X и системой T определяющих соотношений, топологически изоморфна фактор-алгебре свободной топологической алгебры A над X в классе \mathfrak{S} по подходящей непрерывной и полной конгруентности.

Для доказательства достаточно в теореме 3 взять в качестве S пустое множество и положить: $X = Y$, τ — тождественное отображение.

В качестве частного случая отметим еще, что каждая топологическая алгебра B , принадлежащая примитивному классу \mathfrak{S} с перестановочными конгруентностями, является непрерывным и открытым гомоморфным образом свободной топологической алгебры A в классе \mathfrak{S} над пространством B .

Это утверждение получается из приведенного выше следствия, если в нем в качестве X взять B , а в качестве T взять все соотношения между элементами B .

Введем несколько определений. Пусть топологическая алгебра A финитно порождается элементами некоторого своего подмножества X . Обозначим через S совокупность всех соотношений между элементами X в алгебре A и рассмотрим алгебру B с порождающим пространством X и определяющими соотношениями S . Согласно замечанию 2, алгебра B содержит топологически X , и непрерывный гомоморфизм B на A , являющийся продолжением тождественного отображения X в X , будет алгебраическим изоморфизмом между B и A . Поэтому алгебру B можно считать той же алгеброй A , только снабженной другой топологией, которую будем называть *свободной относительно X* . Из основного определения § 1 вытекает, что тождественное отображение алгебры A со свободной топологией относительно X на алгебру A с любой другой топологией,

совместимой с заданной топологией множества X , будет непрерывно. Это свойство характерно для свободной топологии.

Пусть X_α — топологические пространства попарно без общих точек. Свободной топологией их объединения $X = \bigcup X_\alpha$ называют топологию, при которой открытыми подмножествами X являются произвольные объединения открытых подмножеств объединяемых пространств.

Рассмотрим топологические алгебры A_α одного и того же класса \mathfrak{S} , не имеющие общих элементов, и предположим, что A_α, A_β имеют топологически изоморфные подалгебры $A_{\alpha\beta}, A_{\beta\alpha}$. Изоморфизм $A_{\alpha\beta}$ на $A_{\beta\alpha}$ обозначим через $\sigma_{\alpha\beta}$. Свободным топологическим объединением алгебр A с отождествленными подалгебрами $A_{\alpha\beta}, A_{\beta\alpha}$ будем называть топологическую алгебру, определяемую в классе \mathfrak{S} пространством $\bigcup A_\alpha$ со свободной топологией и определяющими соотношениями $a^{\sigma_{\alpha\beta}} = a$ ($a \in A_{\alpha\beta}$).

В частном случае, когда подалгебры $A_{\alpha\beta}$ пусты, свободное объединение с отождествленными подалгебрами называется просто свободным объединением. Если пусто множество операций, то получается определение свободного объединения топологических пространств с отождествленными подпространствами.

Топологическое свободное объединение алгебр можно характеризовать также следующим образом: алгебра A тогда и только тогда является топологическим свободным объединением алгебр A_α в классе \mathfrak{S} , когда существуют непрерывные гомоморфизмы σ_α алгебр A_α в A со свойствами

- 1) A топологически порождается элементами $\bigcup A_\alpha^{\sigma_\alpha}$;
- 2) для каждого набора непрерывных гомоморфизмов τ_α алгебр A_α в какую-либо алгебру B рассматриваемого класса \mathfrak{S} найдется непрерывный гомоморфизм τ алгебры A в B такой, что $a^{\sigma_\alpha \tau} = a^{\tau_\alpha}$ для $a \in A_\alpha$.

Из теоремы 2 непосредственно следует, что свободное топологическое объединение финитно порождается образами элементов объединяемых алгебр.

Легко указать пример, когда канонические отображения σ_α объединяемых алгебр в свободное объединение не будут изоморфизмами. В общем случае справедлива

ТЕОРЕМА 4. Если каждую из заданных топологических алгебр A_α класса \mathfrak{S} можно топологически погрузить в топологическую алгебру C_α того же класса, содержащую одноэлементную подалгебру, то канонические отображения заданных алгебр в их свободное объединение будут топологическими изоморфизмами. Образы алгебр A_α в свободном объединении будут замкнутыми подалгебрами, если A_α замкнуты в C_α .

Действительно, пусть каждая из данных алгебр A_α погружена в топологическую алгебру C_α с одноэлементной подалгеброй $\{e_\alpha\}$. Составим топологическое прямое произведение $H = \text{П} C_\alpha$ и рассмотрим отображение φ_α алгебры C_α в H , определяемое условиями:

$$e^{\varphi_\alpha}(\lambda) = e_\lambda, \quad a^{\varphi_\alpha}(\alpha) = a \quad (\lambda \neq \alpha, a \in C_\alpha).$$

Ясно, что φ_α есть топологический изоморфизм A_α на замкнутую подалгебру $H_\alpha = C_\alpha^{\varphi_\alpha}$ в H . Согласно характеристичному свойству свободного объединения, гомоморфизмы φ_α продолжаемы до непрерывного гомомор-

физма всего свободного объединения в алгебру H . Так как C_α , H_α топологически изоморфны и A_α замкнуты в C_α , то и свободное объединение содержит A_α в качестве замкнутой подалгебры.

§ 3. L -операции

Параллелизм между теорией абстрактных алгебр и теорией топологических алгебр становится более отчетливым, если на топологические пространства смотреть как на дискретные алгебры с системой частичных операций предельного перехода. Трудность состоит лишь в том, что эти операции зависят от бесконечного числа переменных и, в особенности, в том, что свойства их выражаются не в виде тождеств. Тем не менее сопоставление операторной точки зрения на топологические пространства с обычной представляет интерес и будет проведено кратко в настоящем параграфе.

Пусть A — какое-либо множество, Σ — вспомогательное множество индексов, частично упорядоченное так, что любые его два элемента имеют в Σ общий больший. *Направлением* $[a_\alpha]$ в A с носителем Σ называется произвольное отображение $\alpha \rightarrow a_\alpha$ множества Σ в A . Направление $[a_\alpha]$ в топологическом пространстве A называется *сходящимся к точке a* , символически $\lim [a_\alpha] = a$, если для каждой окрестности U точки a найдется такой индекс $\alpha \in \Sigma$, что все a_λ с $\lambda > \alpha$ содержатся в U . В хаусдорфовых пространствах каждое направление может сходить к не более чем к одной точке. В T_0 - или T_1 -пространствах [см. (1)] могут существовать направления, сходящиеся к нескольким точкам. Множество F топологического пространства A тогда и только тогда замкнуто, когда все пределы направлений из элементов F принадлежат F [см. (2), стр. 14].

Подмножество Σ' элементов частично упорядоченного множества Σ назовем его *конфинальной частью*, если для каждого $\alpha \in \Sigma$ в Σ' существует больший элемент α .

В хаусдорфовых пространствах операции \lim обладают следующими очевидными свойствами:

L1. Для каждого носителя Σ операция \lim является однозначной частичной операцией.

L2. Если для всех $\alpha \in \Sigma$ имеем $a_\alpha = a$, то $\lim [a_\alpha] = a$.

L3. Если $\{\alpha_i\}$ — конфинальное множество из $\{\alpha\}$ и $\lim [a_\alpha]$ существует, то $\lim [a_{\alpha_i}]$ также существует и совпадает с $\lim [a_\alpha]$.

Уже упоминалось, что с алгебраической точки зрения взятие предела направления в топологическом пространстве можно рассматривать как частичную операцию с бесконечным числом аргументов, точнее, как систему частичных операций, различающихся носителями. Условия L2, L3 формально имеют тот же самый вид, что и тождественные соотношения, связывающие частичные операции в примитивных классах. Поэтому мы обратим постановку вопроса и предположим, что в некотором множестве A некоторым направлениям $[a_\alpha]$ сопоставлено по определенному элементу $L[a_\alpha]$ из A и что так определенные операции удовлетворяют требованиям L1 — L3. В этом случае условимся A называть *L -алгеброй*.

Подмножества из A , замкнутые относительно L -операций, т. е. подалгебры L -алгебры A , назовем L -замкнутыми. Из L3 следует, что объединение двух L -замкнутых множеств L -замкнуто, а из L2 следует, что каждая точка в отдельности есть L -замкнутое множество. Так как пересечение любой системы L -замкнутых множеств L -замкнуто, то L -замкнутые множества будут системой всех замкнутых множеств определенной топологии на A , которую будем называть L -топологией. Пользуясь L -топологией, можно определить понятие предела $\lim [a_\alpha]$ направления $[a_\alpha]$ в A .

Если операция L определена для направления $[a_\alpha]$, то $\lim [a_\alpha] = L[a_\alpha]$, где \lim берется в смысле L -топологии.

В самом деле, пусть U — некоторая окрестность точки $a = L[a_\alpha]$ и F — дополнение U в A . Выберем из направления $[a_\alpha]$ те элементы a_{α_i} , которые содержатся в F . Если $\{\alpha_i\}$ конфинально с $\{\alpha\}$, то, по аксиоме L3, выражение $L[a_{\alpha_i}]$ определено и равно a . Ввиду замкнутости F , это дает $a \in F$, что противоречит условию $a \in U$. Таким образом, $\{\alpha_i\}$ не может быть конфинально $\{\alpha\}$; поэтому найдется такое α , что для всех $\lambda > \alpha$ будет $a_\lambda \in U$, что и требовалось.

Теория абстрактных алгебр с порождающим множеством и определяющими соотношениями, хорошо известная для алгебр с частичными операциями с конечным числом аргументов, без труда переносится и на алгебры с частичными операциями от бесконечного числа аргументов. Поэтому для определения топологической алгебры с порождающим пространством X можно было бы попытаться заменить топологию на X системой L -операций и рассматривать алгебру, часть операций которой была бы финитна и часть инфинитна (новые L -операции). Однако при проведении этой программы возникает затруднение, состоящее в том, что аксиомы L1 — L3 не гарантируют хаусдорфовости L -топологии. Это затруднение было бы обойдено, если бы свойства операции предельного перехода в хаусдорфовых пространствах можно было полностью охарактеризовать аксиомами типа L1 — L3. Однако полная аксиоматика, указанная, например, Биркгофом [см. (4)], содержит аксиомы существенно других типов. Аксиоматика, данная Чогошвили (17) для других классов топологических пространств, также содержит аксиомы нежелательного вида. Поэтому в дальнейшем L -операции будут использоваться только как удобный способ задания топологии и как наводящее средство при определениях.

Далее нам понадобится еще следующее свойство L -топологий, устанавливающее аналогию между алгебраическим гомоморфизмом и непрерывностью.

Отображение σ топологического пространства X , топологию в котором определяется L -операциями, в топологическое пространство Y , топология в котором также определяется L -операциями, забедомо непрерывно, если из каждого равенства вида $L[x_\alpha] = x$ в X следует равенство $L[x_\alpha^\sigma] = x^\sigma$ в пространстве Y .

Действительно, пусть F_1 — какое-нибудь замкнутое подмножество в Y и F — его полный прообраз в X . Если $[x_\alpha]$ — некоторое направление в

F и $L[x_\alpha] = x$, то, по условию,

$$L[x_\alpha^\sigma] = x^\sigma,$$

откуда $x^\sigma \in F_1$, $x \in F$, F замкнуто в X и, следовательно, σ непрерывно.

§ 4. Начальная топология алгебр

Пусть A — топологическая алгебра, финитно порождаемая элементами некоторого своего подмножества X . В § 2 была определена свободная топология алгебры A относительно X . Эту топологию независимо от заданной топологии в A можно получить из топологии пространства X следующим трансфинитным путем.

Множество U элементов A назовем X_0 -открытым, если для каждого многочлена f , в том числе $f(x) = x$, и для каждой системы x_1, \dots, x_n элементов из X , для которой $f(x_1, \dots, x_n) \in U$, найдутся такие окрестности U_1, \dots, U_n этих элементов в X , что $f(U_1, \dots, U_n) \subseteq U$. Очевидно, пересечение конечной системы и объединение произвольной системы X_0 -открытых множеств суть X_0 -открытые множества. Поэтому X_0 -открытые множества задают особую топологию на A , которую будем называть X_0 -топологией или начальной топологией A .

Далее, индукцией определяем X_λ -топологии A для трансфинитных индексов λ . Именно, пусть для некоторого трансфинита λ топология X_λ определена. Множество U из A назовем $X_{\lambda+1}$ -открытым, если для каждой основной операции $f(x_1, \dots, x_n)$ и каждых a_1, \dots, a_n из A , удовлетворяющих условию $f(a_1, \dots, a_n) \in U$, найдутся такие X_λ -окрестности U_1, \dots, U_n точек a_1, \dots, a_n в A , что $f(U_1, \dots, U_n) \subseteq U$. Далее, если топологии X_λ определены для всех λ , меньших предельного α , то множество U называем X_α -открытым, если оно X_λ -открыто для всех $\lambda < \alpha$.

Называя топологизацию π_1 какого-нибудь множества A большей или более свободной, чем топологизация π_2 того же множества, если всякое π_2 -замкнутое множество из A является и π_1 -замкнутым [см. (1)], мы видим, что топологизации X_λ монотонно убывают с ростом λ и все содержат заданную топологию A и вообще любую допустимую топологизацию A , т. е. не меняющую топологии X и делающую непрерывными основные операции.

Пусть τ — наименьший трансфинит, для которого $X_\tau = X_{\tau+1}$. Тогда X_τ есть искомая топология алгебры A , свободная относительно X .

Действительно, из соотношения $X_\tau = X_{\tau+1}$ следует, что основные операции алгебры A в топологии X_τ непрерывны. Топология X_τ на X совпадает с первоначальной топологией и содержит всякую допустимую топологию A . Поэтому X_τ есть наибольшая из допустимых топологизаций A , что и требовалось доказать.

Топологии X_λ можно определить другим путем. Пусть A — снова топологическая алгебра, финитно порождаемая подпространством X . В абстрактную алгебру A вводим L_0 -операции, полагая

$$L_0[a_\alpha] = a \quad (a_\alpha \in A),$$

если существует такой многочлен $f(x_1, \dots, x_n)$ и такие направления $[x_{1\alpha}], \dots, [x_{n\alpha}]$ в X с общим носителем $\{\alpha\}$, что

$$\begin{aligned} f(x_{1\alpha}, \dots, x_{n\alpha}) &= a_\alpha, & f(x_1, \dots, x_n) &= a, \\ \lim [x_{i\alpha}] &= x_i, & x_i \in X & \quad (i = 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (1)$$

Операция \lim берется здесь в смысле заданной топологии X . Ясно, что так определенные L_0 -операции удовлетворяют аксиомам $L1 - L3$ и потому определяют в A некоторую L_0 -топологию, которую мы условимся называть топологией L_0 . Для трансфинитов λ топологии L_λ определяем индуктивно. Зная λ -топологию, вводим $L_{\lambda+1}$ -операции в A , полагая $L_{\lambda+1}[a_\alpha] = a$, если существует такой многочлен $f(x_1, \dots, x_n)$ и такие направления $[a_{1\alpha}], \dots, [a_{n\alpha}]$ в A с общим носителем, что

$$f(a_{1\alpha}, \dots, a_{n\alpha}) = a_\alpha, \quad \lim [a_{i\alpha}] = b_i, \quad f(b_1, \dots, b_n) = a \quad (i = 1, \dots, n),$$

где \lim берется в смысле L_λ -топологии. Определяемая в A этими операциями $L_{\lambda+1}$ -топология и будет искомой топологией $L_{\lambda+1}$. Если же α предельно и L_λ для $\lambda < \alpha$ известны, то замкнутыми множествами в L_α -топологии, по определению, будут те, которые замкнуты во всех L_λ -топологиях с $\lambda < \alpha$.

Для каждого порядкового числа λ топология L_λ совпадает с топологией X_λ алгебры A .

Докажем сначала, что совпадают топологии L_0 и X_0 . Пусть U есть X_0 -открытое множество. По определению, L_0 -незамкнутость $F = \text{доп } U$ означала бы, что для некоторых направлений $[x_{1\alpha}], \dots, [x_{n\alpha}]$ в X и подходящего многочлена f имеют место соотношения:

$$\lim [x_{i\alpha}] = x_i \quad (i = 1, \dots, n), \quad (2)$$

$$f(x_{1\alpha}, \dots, x_{n\alpha}) \in F, \quad f(x_1, \dots, x_n) \in U. \quad (3)$$

Ввиду X_0 -открытости U , в X найдутся окрестности U_1, \dots, U_n точек x_1, \dots, x_n , для которых $f(U_1, \dots, U_n) \subseteq U$. Но тогда из (2) следует, что для всех α , больших некоторого λ , имеем: $x_{i\alpha} \in U_i$ ($i = 1, \dots, n$) и, значит, $f(x_{1\alpha}, \dots, x_{n\alpha}) \in U$, вопреки (3).

Пусть теперь F есть L_0 -замкнутое множество. Докажем, что $U = \text{доп } F$ является X_0 -открытым. Если неверно, что U есть X_0 -открытое, то найдется такой многочлен f и такие точки x_1, \dots, x_n из X , что $f(x_1, \dots, x_n) \in U$ и для каждой системы окрестностей U_1, \dots, U_n указанных точек в X совокупность $f(U_1, \dots, U_n)$ будет иметь непустое пересечение с F , а потому будут существовать такие $u_1 \in U_1, \dots, u_n \in U_n$, для которых $f(u_1, \dots, u_n) \in F$. Обозначим через \sum совокупность всех систем (U_1, \dots, U_n) окрестностей точек x_1, \dots, x_n . Эти системы упорядочим, полагая

$$(U_1, \dots, U_n) \leq (V_1, \dots, V_n),$$

если $U_1 \supseteq V_1, \dots, U_n \supseteq V_n$. Выбор элементов u_1, \dots, u_n зависит от системы $\alpha = (U_1, \dots, U_n)$ и потому эти элементы обозначим через $u_{1\alpha}, \dots, u_{n\alpha}$.

Легко видеть, что

$$\lim [u_{ix}] = x_i \quad (i = 1, \dots, n),$$

поэтому операция L для направления $[f(u_{1\alpha}, \dots, u_{n\alpha})]$ будет иметь значение $f(x_1, \dots, x_n)$. Поскольку все элементы направления входят в L_0 -замкнутое множество F , то $f(x_1, \dots, x_n) \in F$, что противоречит условию.

Доказательство совпадения L_λ с X_λ в общем случае проводится трансфинитной индукцией.

X_0 -топологию алгебры A можно еще особенно наглядно охарактеризовать как свободное объединение топологий особой последовательности замкнутых множеств в A . Для этого условимся длиной многочлена f от предметных переменных x_1, \dots, x_n называть общее число участвующих в его записи предметных переменных. Так, если f, g — основные бинарные операции, то многочлен $f(x, g, (x, y))$ имеет длину 3. Пусть X — подмножество элементов некоторой алгебры A . Тогда через X^s будет далее обозначаться совокупность тех элементов A , которые можно представить в виде значений некоторых многочленов длины $\leq s$ от элементов X .

ТЕОРЕМА 5. Пусть A — абстрактная алгебра, порождаемая своим некоторым подмножеством X . Топологизируем каким-либо образом X и условимся направление $[a_\alpha]$ в A называть L_0 -сходящимся к $a \in A$, если для подходящих многочлена f и элементов $x_{ix} \in X$ имеют место соотношения (1). Допустим, что так определенная L -операция однозначна и что в определенной с помощью нее L_0 -топологии алгебры A множества X^s ($s = 1, 2, \dots$) замкнуты. Множество F из A замкнуто тогда и только тогда, когда замкнуты все пересечения $F \cap X^s$.

Необходимость условий очевидна. Докажем достаточность. Пусть пересечения $F \cap X^s$ замкнуты и пусть для некоторого направления $[a_\alpha]$ из F имеем $L_0[a_\alpha] = a$, т. е. для некоторого многочлена f и подходящих $x_{ix} \in X$ выполнены равенства (1). Обозначая длину f через t , имеем:

$$a_\alpha \in X^t \cap F,$$

откуда, ввиду предположенной замкнутости множества $X^t \cap F$, получаем

$$a \in X^t \cap F,$$

т. е. F замкнуто.

ТЕОРЕМА 6. Пусть A — абстрактная свободная алгебра со свободным порождающим множеством X в некотором примитивном классе \mathfrak{S} . Топологизируем каким-либо способом X и введем в A L_0 -операцию таким же путем, как в теореме 5. Тогда эта операция будет однозначной и в L_0 -топологии алгебры A все множества X^s будут замкнутыми.

Пусть, например,

$$L_0[a_x] = a, \quad L_0[a_\alpha] = b$$

для некоторого направления $[a_\alpha]$ из A . Это значит, что для подходящих

многочленов f, g и подходящих $x_{ix} \in X$ имеем:

$$a_\alpha = f(x_{1\alpha}, \dots, x_{m\alpha}), \quad \lim x_{i\alpha} = x_i \quad f(x_1, \dots, x_m) = a, \quad (4)$$

$$a_\alpha = g(x_{m+1\alpha}, \dots, x_{n\alpha}), \quad \lim x_{i\alpha} = x_i, \quad g(x_{m+1}, \dots, x_n) = b. \quad (5)$$

Рассмотрим такой номер α , чтобы для всех $i, j = 1, \dots, n$ из $x_i \neq x_j$ следовало $x_{i\alpha} \neq x_{j\alpha}$. Так как алгебра A — свободная, то все соотношения между порождающими элементами в ней являются тождествами. В частности, тождеством будет и равенство

$$f(x_{1\alpha}, \dots, x_{m\alpha}) = g(x_{m+1\alpha}, \dots, x_{n\alpha}).$$

Поэтому в нем вместо элементов $x_{1\alpha}, \dots, x_{n\alpha}$ можно подставить x_1, \dots, x_n , так как при этом одинаковые элементы будут замещаться одинаковыми. В результате получим равенство $a = b$, доказывающее однозначность операции L_0 .

Чтобы доказать замкнутость X^s , предположим, что для некоторого направления $[a_\alpha]$ в X^s справедливы равенства (4), где длина многочлена f может быть и больше s . Условия $a_\alpha \in X^s$ означают, что для подходящих многочленов g_α длины, не превосходящей s ,

$$a_\alpha = g_\alpha(x_{m+1\alpha}, \dots, x_{n\alpha}) \quad (x_{j\alpha} \in X, \quad n \leq s). \quad (6)$$

Так как основных операций конечное число, то среди многочленов $g_\alpha(y_1, \dots, y_{n_\alpha})$, где y_1, \dots, y_{n_α} — вспомогательные буквы, существует лишь конечное число различных и, значит, существует такое конфинальное поднаправление $[a_{\alpha_\beta}]$, для которого все многочлены $g_{\alpha_\beta}(y_1, \dots, y_n)$ тождественны между собой. Пусть

$$g_{\alpha_\beta}(y_1, \dots, y_n) = g(y_1, \dots, y_n) \quad (n = n_{\alpha_\beta}).$$

Тогда равенства (4), (6) дают соотношения

$$f(x_{1\alpha_\beta}, \dots, x_{m\alpha_\beta}) = g(x_{m+1\alpha_\beta}, \dots, x_{n\alpha_\beta}), \quad (7)$$

являющиеся тождествами в A . Выбирая снова такое $\gamma = \alpha_\beta$, чтобы из $x_i \neq x_j$ следовало $x_{i\gamma} \neq x_{j\gamma}$ ($i, j = 1, \dots, m$), и заменяя в обеих частях тождества (7) аргументы, равные соответственно $x_{1\gamma}, \dots, x_{m\gamma}$, через x_1, \dots, x_m , получим соотношение вида:

$$a = g(z_1, \dots, z_n) \quad (z_j \in X),$$

показывающее, что a содержится в X^s .

ТЕОРЕМА 7. Если свободная топологическая алгебра A с порождающим пространством X имеет X_0 -топологию, то подалгебра B , финитно порождаемая каким-либо замкнутым подпространством Y пространства X , замкнута в A и имеет Y_0 -топологию, являясь, таким образом, свободной топологической алгеброй над Y .

Действительно, всякое подмножество F элементов B , замкнутое в B в смысле X_0 -топологии, очевидно, замкнуто и в смысле Y_0 -топологии.

Пусть, напротив, F замкнуто в Y_0 -топологии и для некоторого направления $[b_\alpha]$ в F имеем $L[b_\alpha] = c$, где операция L берется в смысле X_0 -топологии. Тогда имеем:

$$b_\alpha = f(x_{1\alpha}, \dots, x_{n\alpha}), \quad \lim x_{i\alpha} = x_i, \quad f(x_1, \dots, x_n) = c \quad (x_i, x_{i\alpha} \in X)$$

и в то же время

$$b_\alpha = \varphi_\alpha(y_{1\alpha}, \dots, y_{m_\alpha\alpha}) \quad (y_{j\alpha} \in Y).$$

Выбираем такое конфинальное поднаправление $[b_\beta]$ из направления $[b_\alpha]$, чтобы для каждого i либо все элементы $x_{i\beta}$ входили в Y , либо ни один из них не входил в Y . Ввиду свободы A , равенства

$$f(x_{1\beta}, \dots, x_{n\beta}) = \varphi_\beta(y_{1\beta}, \dots, y_{m_\beta\beta})$$

являются в A тождествами. Поэтому, не нарушая этих равенств, можно все элементы $x_{i\beta}$ в левой части, не содержащиеся в Y , заменить произвольным фиксированным элементом $y \in Y$. Но тогда тем же элементом y можно заменить соответствующие аргументы в левой части равенства $f(x_1, \dots, x_n) = c$, не меняя его правой части. После замены все аргументы левой части будут принадлежать Y , так как незамененные будут равны пределам направлений из Y , принадлежащим Y в силу замкнутости Y в X . Это показывает, что $c \in B$ и $c = L[b_\beta]$, где L берется в смысле Y_0 -топологии. Ввиду Y_0 -замкнутости F , отсюда следует $c \in F$, т. е. множество F является X_0 -замкнутым.

§ 5. Алгебры с бикompактным порождающим пространством

Рассмотрим важные случаи, в которых свободная топология заведомо является L_0 -топологией.

ЛЕММА. Пусть топологическая алгебра A финитно порождается элементами своего подмножества X , являющегося объединением цепочки $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots$ вложенных друг в друга бикompактных подмножеств. Называя подмножество F из A ω -замкнутым, если замкнуты все пересечения вида $F \cap f(X_i, \dots, X_i)$, где $f(x_1, \dots, x_n)$ — произвольный многочлен, $i = 1, 2, \dots$, введем в A новую топологию. Эта ω -топология будет хаусдорфовой, а все основные операции алгебры A будут в ней непрерывными.

Действительно, поскольку X_i бикompактно, то множество $f(X_i, \dots, X_i)$ также бикompактно, а потому и замкнуто в A . Отсюда следует, что все замкнутые подмножества из A будут ω -замкнуты и, в частности, ω -топология будет хаусдорфовой.

Для доказательства ω -непрерывности основных операций A перенумеруем $f_1, f_2, \dots, f_m, \dots$ все многочлены и положим

$$Y_m = f_1(X_m, \dots, X_m) \cup \dots \cup f_m(X_m, \dots, X_m) \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Ясно, что все Y_m бикompактны, $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq \dots$ и ω -замкнутость произвольного множества F равносильна замкнутости всех пересечений $F \cap Y_m$ ($m = 1, 2, \dots$).

Пусть для некоторого ω -открытого множества W , какой-либо основной операции f и некоторых a_1, \dots, a_n из A имеем $f(a_1, \dots, a_n) \in W$. Обозначим через p наименьшее, для которого a_1, \dots, a_n содержатся в Y_p , и будем строить индуктивно множества

$$U_m(a_1), \dots, U_m(a_n) \quad (m = p, p+1, \dots)$$

со следующими свойствами:

1. $a_i \in U_m(a_i)$, $U_m(a_i) \subseteq Y_m$, $U_m(a_i)$ открыто в Y_m ;
2. $\overline{U_m(a_i)} \subseteq U_{m+1}(a_i)$;
3. $f(\overline{U_m(a_1)}, \dots, \overline{U_m(a_n)}) \subseteq W$,

где черта сверху означает операцию замыкания в заданной топологии A .

Вводя обозначения $W_m = W \cap Y_m$, будем для подходящего q иметь:

$$f(Y_p, \dots, Y_p) \subseteq Y_q, \quad f(a_1, \dots, a_n) \in W_q.$$

Поскольку W_q открыто в Y_q , то найдется открытое в A множество V , для которого

$$V \cap Y_q = W_q.$$

Так как $f(a_1, \dots, a_n) \in V$ и в A операция f непрерывна, то найдутся окрестности V_1, \dots, V_n элементов a_1, \dots, a_n в A , для которых

$$f(V_1, \dots, V_n) \subseteq V.$$

Полагая, по определению,

$$V'_i = V_i \cap Y_p \quad (i = 1, \dots, n),$$

будем иметь:

$$f(V'_1, \dots, V'_n) \subseteq V \cap Y_q \subseteq W.$$

Наконец, обозначив через $U_p(a_i)$ окрестность a_i в Y_p , замыкание которой содержится в V'_i , получим исходные множества $U_p(a_1), \dots, U_p(a_n)$, обладающие свойствами 1, 3.

Предположим, что нам уже известны $U_m(a_1), \dots, U_m(a_n)$ для $m \leq s$, обладающие свойствами 1, 2, 3. Будем строить $U_{s+1}(a_i)$, $i = 1, \dots, n$. Обозначим через q целое, для которого

$$f(Y_{s+1}, \dots, Y_{s+1}) \subseteq Y_q,$$

и рассмотрим произвольную систему точек

$$a'_1 \in \overline{U_s(a_1)}, \dots, a'_n \in \overline{U_s(a_n)}.$$

Так как $f(a'_1, \dots, a'_n) \in W_q$, то найдутся открытое множество V , для которого $V \cap Y_q = W_q$, и такие окрестности V_1, \dots, V_n точек a'_1, \dots, a'_n в A , что

$$f(V_1, \dots, V_n) \subseteq V.$$

Полагая

$$V'_i = V_i \cap Y_{s+1},$$

будем иметь:

$$f(V'_1, \dots, V'_n) \subseteq W,$$

где V'_1, \dots, V'_n — открытые в Y_{s+1} . Окрестности V'_1, \dots, V'_n зависят от выбора a'_1, \dots, a'_n . Фиксируя a'_1, \dots, a'_{n-1} и меняя произвольно a'_n в $\overline{U_s(a_n)}$, видим, что $\overline{U_s(a_n)}$ будет покрыто окрестностями V'_n . Ввиду бикompактности $\overline{U_s(a_n)}$ найдется конечное число окрестностей среди V'_n , покрывающих $\overline{U_s(a_n)}$. Обозначим эти окрестности через V'_{n1}, \dots, V'_{nr} , и пусть $V'_{1i}, \dots, V'_{n-1i}$ — соответствующие окрестности точек a'_1, \dots, a'_{n-1} для V'_{ni} ($i = 1, \dots, r$). Полагая

$$V''_n = \bigcup V'_{ni}, \quad V''_\alpha = \bigcap V'_{\alpha i} \quad (i = 1, \dots, r; \alpha = 1, \dots, n-1),$$

видим, что для каждой системы точек

$$a'_1 \in \overline{U_s(a_1)}, \dots, a'_{n-1} \in \overline{U_s(a_{n-1})}$$

существуют множества V''_1, \dots, V''_n , открытые в Y_{s+1} , для которых

$$f(V''_1, \dots, V''_n) \subseteq W, \quad \overline{U_s(a_n)} \subseteq V''_n, \quad a'_\alpha \in V''_\alpha \quad (\alpha = 1, \dots, n-1).$$

Фиксируя a'_1, \dots, a'_{n-2} и произвольно меняя a'_{n-1} в $\overline{U_s(a_{n-1})}$, получим систему открытых в Y_{s+1} множеств V''_{n-1} , покрывающих бикompактное множество $\overline{U_s(a_{n-1})}$. Выбирая из этих множеств конечную систему $V''_{n-11}, \dots, V''_{n-1t}$, покрывающую $\overline{U_s(a_{n-1})}$, обозначая через $V''_{12}, \dots, V''_{n-22}$ соответствующие окрестности точек a'_1, \dots, a'_{n-2} в Y_{s+1} для $V''_{n-1\alpha}$ и полагая

$$V''_{n-1} = \bigcup V''_{n-1\alpha}, \quad V'''_i = \bigcap V''_{i\alpha} \quad (i \neq n-1; \alpha = 1, \dots, t),$$

видим, что для каждой системы точек

$$a'_1 \in \overline{U_s(a_1)}, \dots, a'_{n-2} \in \overline{U_s(a_{n-2})}$$

существуют открытые в Y_{s+1} множества V'''_1, \dots, V'''_n , для которых

$$f(V'''_1, \dots, V'''_n) \subseteq W, \quad \overline{U_s(a_n)} \subseteq V'''_n, \quad a'_i \in V'''_i \\ (i = 1, \dots, n-2; \lambda = n-1, n).$$

Продолжая этот процесс, найдем открытые в Y_{s+1} множества $V_1^{(n+1)}, \dots, V_n^{(n+1)}$, содержащие соответственно $\overline{U_s(a_1)}, \dots, \overline{U_s(a_n)}$ и такие, что

$$f(V_1^{(n+1)}, \dots, V_n^{(n+1)}) \subseteq W. \quad (8)$$

Поскольку бикompактное пространство Y_{s+1} нормально, то найдутся открытые в Y_{s+1} множества $U_{s+1}(a_1), \dots, U_{s+1}(a_n)$, содержащие соответ-

венно множества $\overline{U_s(a_i)}$ и такие, что

$$\overline{U_{s+1}(a_i)} \subset \dot{V}_i^{(n+1)} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Ввиду (8), множества $U_{s+1}(a_i)$ удовлетворяют требованиям 1, 2, 3 и, следовательно, существование системы множеств $U_m(a_i)$ ($m = p, p+1, \dots$) со свойствами 1, 2, 3 доказано.

Положим

$$U(a_i) = \bigcup_m U_m(a_i) \quad (i = 1, \dots, n).$$

Из условия 2,3 следует, что

$$f(U(a_1), \dots, U(a_n)) \subseteq W. \quad (9)$$

С другой стороны, имеем:

$$U(a_i) \cap Y_s = \bigcup_m (U_m(a_i) \cap Y_s) = U_s(a_i) \cup (U_{s+1}(a_i) \cap Y_s) \cup \dots$$

Так как каждое слагаемое $U_{s+l}(a_i) \cap Y_s$, являясь пересечением Y_s с открытым в Y_{s+l} множеством $U_{s+l}(a_i)$, открыто в Y_s , то $U(a_i) \cap Y_s$ открыто в Y_s и $U(a_i)$ является ω -открытым. Поэтому из (9) следует, что операция f является непрерывной в ω -топологии.

Пусть, наконец, ω -топология на X совпадает с топологией X как подпространства заданной топологической алгебры A . Покажем, что в таком случае ω -топология совпадает с X_0 -топологией A . Поскольку X_0 -топология содержит всякую допустимую топологию A относительно X , то X_0 -топология содержит исходную топологию A и поэтому является хаусдорфовой. По условию, в X_0 -топологии множества X_i , а вместе с ними и множества Y_i , бикомпактны, а потому и замкнуты. Вследствие этого, всякое X_0 -замкнутое множество будет и ω -замкнутым, т. е. X_0 -топология содержится в ω -топологии. Обратное включение уже было установлено и потому X_0 -топология в рассматриваемом случае совпадает с ω -топологией.

Следствие 1. Если топологическая алгебра A порождается финитно элементами своего бикомпактного подпространства X , то свободной топологией A относительно X является ее X_0 -топология.

Для доказательства достаточно в теореме 8 положить $X = X_1 = X_2 = \dots$. Тогда можно считать, что $Y_i = X^i$, $i = 1, 2, \dots$. В результате ω -топология A будет совпадать с X_0 -топологией.

Следствие 2. Если свободная топологическая алгебра A какого-либо примитивного класса \mathfrak{S} над локально компактным со 2-й аксиомой счетности пространством X топологически содержит X и алгебраически свободна над X , то топология A является ее X_0 -топологией.

В самом деле, пусть U_1, U_2, \dots есть открытый базис X , замыкания $\overline{U_i}$ множеств которого компактны. Положим

$$V_m = U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_m, \quad X_m = \overline{V_m} \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Все X_m бикомпактны, $X = \bigcup X_m$ и множество $F \subseteq X$ тогда и только тогда замкнуто в X , когда замкнуты все пересечения $F \cap X_m$ ($m = 1, 2, \dots$).

Покажем, что

$$f(X_m, \dots, X_m) \cap F \subseteq X_m \cap F. \quad (10)$$

Действительно, в противном случае найдется элемент $x \in X$, для которого

$$x = f(x_1, \dots, x_n), \quad x \notin X_m, \quad x_1, \dots, x_n \in X_m. \quad (11)$$

Так как A алгебраически свободна над X , то соотношение (11) является тождеством и потому в него, не меняя правой части, можно вместо x подставить любой элемент X , т. е. X в этом случае состоит всего из одного элемента, что противоречит условию $x \notin X_m$. Соотношение (10) теперь показывает, что F является ω -замкнутым тогда и только тогда, когда F замкнуто в X .

Укажем еще одно предложение, непосредственно вытекающее из следствия 1.

ТЕОРЕМА 9. *Пространство топологической алгебры A , определяемой бикомпактным порождающим пространством X и произвольной системой определяющих соотношений, нормально.*

Согласно определению, топология алгебры A есть свободная топология относительно канонического образа X^σ в ней пространства X . Но пространство X бикомпактно, поэтому и образ его X^σ также бикомпактен. Согласно следствию 1, топология алгебры A есть X_0^σ -топология. Это означает, что множество $F \subseteq A$ тогда и только тогда замкнуто, когда замкнуты пересечения $F \cap (X^\sigma)^m$ ($m = 1, 2, \dots$). Иными словами, это значит, что пространство A есть свободное объединение возрастающей цепочки топологических пространств $X^{o1} \subseteq X^{o2} \subseteq \dots$, из которых каждое замкнуто в последующем, причем все подпространства X^{om} бикомпактны, а потому и нормальны. Однако хорошо известно [см. (5), стр. 302], что свободное объединение возрастающей цепочки нормальных пространств нормально. Поэтому алгебра A нормальна.

§ 6. Простейшие свободные топологические алгебры

Тождество вида $f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n)$ условимся называть *однородным*, если каждая из букв x_i участвует в записи каждого многочлена f, g один и только один раз. Примерами примитивных классов алгебр с однородными определяющими тождествами могут служить абсолютно свободный класс, для которого система тождеств пустая, класс полугрупп с одним тождеством $x(yz) = (xy)z$, класс коммутативных полугрупп с двумя тождествами $x(yz) = (xy)z$, $xy = yx$, и т. п. Легко видеть, что в свободной алгебре с однородными тождествами всякое тождество с повторяющимися аргументами может быть получено из однородного тождества соответствующим отождествлением аргументов.

ТЕОРЕМА 10. *Свободная топологическая алгебра A с однородными определяющими тождествами над топологическим пространством X является алгебраически свободной над X , и топология A есть X_0 -топология. Подалгебра B алгебры A , финитно порожденная элементами произвольного пространства Y из X , является топологической свободной алгеброй над Y .*

Пусть A — абстрактная свободная алгебра над X . В соответствии с теоремой 6 вводим в A X_0 -топологию. Нужно доказать, что эта топология хаусдорфова и что основные операции алгебры A непрерывны в этой топологии. Докажем сначала, что множества вида $\varphi(U_1, \dots, U_m)$, где φ — какой-либо многочлен, U_1, \dots, U_m — открытые подмножества пространства X , являются открытыми в X_0 -топологии. Для этого воспользуемся первоначальным определением X_0 -открытых множеств, указанным в § 4, и предположим, что $\psi(x_1, \dots, x_n) \in \varphi(U_1, \dots, U_m)$, откуда следует:

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = \varphi(x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) \quad (x_{n+i} \in U_i). \quad (12)$$

Согласно сделанному выше замечанию, найдется такое однородное тождество

$$f(z_1, \dots, z_s) = g(z_1, \dots, z_s),$$

из которого тождество (12) можно получить путем подстановки вместо z_1, \dots, z_s соответствующих элементов x_1, \dots, x_n . Пусть, например, x_i подставляется вместо $z_{m_i}, z_{m_i+1}, \dots, z_{m_i+1-1}$ и

$$x_{n+m_i+\lambda} = x_i \quad (i = 1, \dots, n; \quad m_1 = 1, \quad \lambda = 0, 1, \dots, m_{i+1} - m_i - 1).$$

Полагая

$$V_i = U_{m_i} \cap \dots \cap U_{m_{i+1}-1},$$

будем иметь: $x_i \in V_i$, V_i — открытые в X и

$$\psi(V_1, \dots, V_n) \subset f(V_1, \dots, V_n) = g(V_1, \dots, V_n) \subset \varphi(U_1, \dots, U_m),$$

а это и означает, что $\varphi(U_1, \dots, U_m)$ является X_0 -открытым. Рассмотрим теперь какие-либо два различных элемента

$$a = \varphi(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m), \quad b = \psi(x_1, \dots, x_k, x_{m+1}, \dots, x_n)$$

из A , где x_1, \dots, x_n различны, но x_1, \dots, x_k могут и отсутствовать. Обозначим через U_1, \dots, U_n попарно не пересекающиеся окрестности элементов x_1, \dots, x_n в пространстве X . Тогда $P = \varphi(U_1, \dots, U_m)$ и $Q = \psi(U_1, \dots, U_n)$ будут непересекающимися окрестностями элементов a, b . Действительно, если P, Q имеют общий элемент c , то $c = \varphi(u_1, \dots, u_m)$ ($u_i \in U_i$) и $c = \psi(u_1, \dots, u_n)$, откуда получаем:

$$\varphi(u_1, \dots, u_m) = \psi(u_1, \dots, u_n). \quad (13)$$

Алгебра A свободна, поэтому (13) — тождество в A и вместо u_1, \dots, u_n можно подставить соответственно x_1, \dots, x_n . Полученное в результате этого равенство

$$\varphi(x_1, \dots, x_m) = \psi(x_1, \dots, x_n)$$

будет противоречить условию $a \neq b$. Следовательно, $P \cap Q = \emptyset$ и пространство A хаусдорфово. Наконец, пусть для некоторых a_1, \dots, a_m из A

и основной операции φ будет $a = \varphi(a_1, \dots, a_m)$ и пусть U — какое-либо X_0 -открытое подмножество, содержащее a . Полагая $a_i = f_i(x_{i1}, \dots, x_{in})$, будем иметь:

$$a = \varphi(f_1, \dots, f_m) = F(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{mn}) \quad (x_{ij} \in X).$$

Из X_0 -открытости U следует, что для подходящих открытых в пространстве X множеств U_{11}, \dots, U_{mn} , содержащих соответственно точки x_{11}, \dots, x_{mn} , будем иметь $F(U_{11}, \dots, U_{mn}) \subset U$ или $\varphi(U_1, \dots, U_m) \subset U$, где множества $U_i = f_i(U_{i1}, \dots, U_{in})$, по доказанному, являются окрестностями элементов a_1, \dots, a_m в алгебре A . Таким образом, непрерывность операций доказана, а вместе с нею и первые два утверждения теоремы. Третье утверждение непосредственно вытекает из соотношения

$$f(U_1, \dots, U_n) \cap B = f(U_1 \cap Y, \dots, U_n \cap Y),$$

где f — произвольный многочлен, а U_1, \dots, U_n — любые подмножества пространства X .

Более тонкий пример доставляют свободные топологические *полурешетки*, т. е. алгебры с одной бинарной операцией сложения и тремя определяющими тождествами:

$$x + x = x, \quad x + y = y + x, \quad x + (y + z) = (x + y) + z.$$

Алгебраически свободная полурешетка A с порождающим множеством X реализуется как совокупность всех непустых конечных подмножеств из X , в качестве операции сложения в которой принята обычная операция объединения подмножеств. Поэтому задача сводится к топологизации совокупности всех непустых конечных подмножеств топологического пространства X так, чтобы операция объединения подмножеств была непрерывной и чтобы топология A была согласована с топологией пространства X .

Одной из таких топологизаций является «обычная» топологизация, в которой окрестностями множества, состоящего из элементов x_1, \dots, x_n , являются совокупности объединений непустых конечных подмножеств каких-либо фиксированных окрестностей U_1, \dots, U_n точек x_1, \dots, x_n в пространстве X . В силу замечания 1 § 1, откуда следует, что *свободная топологическая полурешетка, порождаемая произвольным топологическим пространством X , содержит X и является алгебраически свободной над X .*

Указанная «обычная» топология полурешетки в общем случае не будет ее свободной топологией. Чтобы убедиться в этом, достаточно сравнить «обычную» топологию с X_0 -топологией. Действительно, в рассматриваемом случае всякий многочлен от x_1, \dots, x_m имеет вид:

$$k_1 x_1 + \dots + k_m x_m,$$

где

$$kx = x + x + \dots + x, \quad x_i \in X.$$

Поэтому, согласно § 4, совокупность U из A тогда и только тогда X_0 -открыта в A , когда для каждого множества $u = \{x_1, \dots, x_m\}$, принадлежащего U , и каждого натурального k существуют такие окрестности U_1, \dots, U_m точек x_1, \dots, x_m в X , что любое конечное множество, содержащее не менее k точек из каждой окрестности U_i , принадлежит U .

Пусть X есть совокупность чисел $1, 2, \dots, n, \dots, \omega$ с ее естественной топологией. Пространство X бикompактно и потому свободной топологией полурешетки A будет ее X_0 -топология. Обозначим через U совокупность всех конечных подмножеств A , содержащих ω , и всех тех конечных подмножеств $\{x_1, \dots, x_m\}$, не содержащих ω , элементы которых удовлетворяют условию

$$x_1 \dots x_m < 2^m.$$

Легко видеть, что U будет X_0 -открытой совокупностью, содержащей ω . В то же время U не содержит ни одной «обычной» окрестности точки ω в A .

§ 7. β -классы. Свободные топологические группы

Примитивный класс алгебр, характеризующийся набором тождеств \mathfrak{S} , условимся называть β -классом, если каждая свободная топологическая алгебра этого класса над произвольным бикompактным пространством X содержит топологически X и является алгебраически свободной над X .

Свободная топологическая алгебра A β -класса, порождаемая вполне регулярным пространством X , содержит X в качестве замкнутого подмножества и является алгебраически свободной над X . Подалгебра B , порождаемая финитно в A элементами замкнутого подмножества $Y \subset X$, является замкнутой в A .

Для доказательства включим X в бикompактное пространство Z и допустим, что $Y = Z \cap F$, где F — замкнутое подмножество из Z . По предположению, свободная топологическая алгебра D над Z рассматриваемого класса содержит Z и алгебраически свободна над Z .

Обозначим через A_1, B_1, C подалгебры алгебры D , порождаемые финитно элементами соответственно множеств X, Y, F . Так как D алгебраически свободна над Z , то

$$A_1 \cap Z = X, \quad A_1 \cap C = B_1. \quad (14)$$

Но Z замкнуто в D и, согласно теореме 7 и следствию 1 теоремы 8, подалгебра C замкнута в D . Поэтому из соотношений (14) следует, что множество X замкнуто в алгебре A_1 и B_1 есть замкнутая подалгебра алгебры A_1 . Кроме того, A_1 и B_1 являются алгебраически свободными соответственно над X и Y как подалгебры алгебраически свободной алгебры D [см. (11)]. При переходе от построенной топологии алгебры A_1 к свободной топологии A_1 относительно X все замкнутые множества в A_1 останутся замкнутыми и в свободной топологии A_1 , что и требовалось доказать.

Гомоморфное отображение алгебры A в алгебру B называется *представлением A в B* . Система представлений ψ_i алгебры A в алгебрах B_i

называется *полной*, если для каждого двух различных элементов алгебры A найдется представление ψ_i , при котором эти элементы имеют различные образы в B_i . Напомним еще, что топологическое пространство A называется *линейно связным*, если для каждого двух его точек a, b найдется непрерывное отображение отрезка $[0, 1]$ в A , при котором 1 отобразится в b , а 0 — в a .

ЛЕММА. Для того чтобы некоторый примитивный класс был β -классом, достаточно, чтобы абстрактные свободные алгебры этого класса с конечным числом порождающих элементов допускали полную систему представлений в топологических линейно связных алгебрах.

Действительно, пусть X — произвольное бикомпактное пространство, A — свободная топологическая алгебра над X рассматриваемого класса \mathfrak{S} . Возьмем какие-нибудь многочлены f, g от элементов x_1, \dots, x_m из X , значения которых различны в абстрактной свободной алгебре S класса \mathfrak{S} с порождающими x_1, \dots, x_m . Пусть ψ — представление алгебры S в подходящей линейно связной алгебре B , при котором $f^\psi \neq g^\psi$. Выберем в B вспомогательную точку b , отличную от $x_1^\psi, \dots, x_m^\psi$, и обозначим через ψ_i непрерывное отображение отрезка $[0, 1]$ в B , переводящее числа 0, 1 соответственно в элементы b и x_i^ψ ($i = 1, \dots, m$). Отделяем теперь в пространстве X точки x_1, \dots, x_m непересекающимися окрестностями U_1, \dots, U_m и строим непрерывные функции $\varphi_i(x)$, отображающие X на отрезок $[0, 1]$ так, что дополнение U_i в X отображается в 0, а точка x_i — в 1. Полагая, далее, $\varphi(x) = \psi_i[\varphi_i(x)]$ для $x \in U_i$ и $\varphi(x) = b$ для $x \notin \bigcup U_i$, получим непрерывное отображение X в алгебру B , переводящее точки x_1, \dots, x_m соответственно в элементы $x_1^\psi, \dots, x_m^\psi$. Так как A топологически свободна над X , то отображение φ продолжаемо до гомоморфизма A в B . Но

$$f^\varphi = f(x_1^\varphi, \dots, x_m^\varphi) = f^\psi, \quad g^\varphi = g^\psi,$$

поэтому и в алгебре A будет $f \neq g$, т. е. A алгебранчески свободна над X . Утверждение, что A топологически содержит X , является непосредственным следствием замечания 2 из § 1.

Переходя к приложениям, заметим, прежде всего, что из доказанной леммы сразу вытекает центральный результат теории Маркова: *класс групп является β -классом*.

Действительно, хорошо известно, что группа всех неособенных матриц 2-го порядка над полем комплексных чисел является линейно связной и содержит свободные подгруппы со счетным числом порождающих. Согласно лемме, этого достаточно, чтобы класс групп был β -классом.

Рассмотрим еще в качестве примера класс \mathfrak{N}_s нильпотентных групп данной ступени s нильпотентности. Это означает, что рассматриваются группы, элементы которых удовлетворяют тождествам вида

$$x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_{s+1} = e, \quad (15)$$

где $x \circ y = x^{-1}y^{-1}xy$ и в «произведении» (15) скобки можно расставить произвольно. Класс \mathfrak{N}_1 является, очевидно, просто классом абелевых групп.

ТЕОРЕМА 11. *Нильпотентные группы данной степени нильпотентности образуют β -класс. Члены нижнего центрального ряда $G \supset G^{(2)} \supset G^{(3)} \supset \dots$ свободной топологической группы G над вполне регулярным пространством X замкнуты в G и фактор-группа $G/G^{(s+1)}$ изоморфна свободной нильпотентной топологической группе степени s над X .*

В самом деле, хорошо известно, что свободные нильпотентные группы с конечным числом порождающих являются группами без кручения и потому включаемы в нильпотентные группы Ли, допускающие изоморфные представления матрицами [см. (9)]. Таким образом, свободные нильпотентные группы с конечным числом порождающих допускают изоморфное представление в надлежащей группе матриц. Согласно лемме, отсюда следует, что нильпотентные группы данной степени составляют β -класс. Второе утверждение теоремы 11 непосредственно вытекает из следствия теоремы 3, так как на группах конгруэнтности перестановочны и непрерывные полные конгруэнтности отвечают разбиениям на смежные классы по замкнутым нормальным делителям.

§ 8. Свободные топологические кольца

Мы будем рассматривать кольца не обязательно ассоциативные. Кольцо R называется кольцом нулевой характеристики, если из равенства вида $mx = my$, где m — положительное целое число, $x, y \in R$, следует $x = y$. Класс колец, элементы которых кроме кольцевых аксиом удовлетворяют еще некоторой фиксированной системе тождеств \mathcal{S} , называется примитивным классом характеристики нуль, если характеристику нуль имеет свободное кольцо этого класса со счетным числом порождающих элементов, а следовательно, и всякое свободное кольцо класса \mathcal{S} .

ТЕОРЕМА 12. *Каждый примитивный класс колец нулевой характеристики является β -классом.*

Пусть R — свободное кольцо данного класса с конечным числом порождающих элементов x_1, \dots, x_m . По условию, R имеет характеристику нуль и потому, согласно (10), все тождества, характеризующие данный класс, могут быть приведены к полилинейной форме. Сверх того, из равенства нулю характеристики R следует [см. (16)], что R можно погрузить в качестве подкольца в линейную алгебру над полем рациональных чисел. Это поле можно расширить до поля вещественных чисел и тем самым получить погружение кольца R в алгебру A над полем вещественных чисел. Ввиду полилинейности тождеств, определяющих R , все они будут иметь место и в алгебре A , которая будет, таким образом, свободной линейной алгеброй над полем вещественных чисел в классе \mathcal{S} . Обозначим через I_n совокупность всех элементов A , имеющих степень, большую n относительно порождающих x_1, \dots, x_m . Согласно (10), I_n является идеалом в A . Алгебра вычетов A/I_n есть линейная алгебра конечной размерности над полем вещественных чисел и потому относительно ее естественной топологии является r -мерным евклидовым пространством. Таким образом, мы получили линейную связную топологическую алгебру A/I_n и естественно гомоморфное отображение ψ_n алгебры A , а вместе с нею и кольца R , в A/I_n . Любые элементы кольца R , степень которых относительно порождающих

не выше n , имеют различные образы в A/I_n . Поэтому представления φ_n образуют полную систему. В силу леммы, отсюда следует, что рассматриваемый класс колец является β -классом.

В качестве частного случая теоремы 12 получаем, что β -классами являются классы всех (неассоциативных) колец, всех ассоциативных колец, всех колец Ли, коммутативных колец и т. п.

Среди колец ненулевой характеристики важное значение имеют кольца Буля, т. е. ассоциативные кольца с единицей, в которых имеет место тождество $x^2 = x$. Из этого тождества, как известно [см. (2), стр. 217], следует тождество $2x = 0$, показывающее, что кольца Буля имеют характеристику 2. Согласно теореме Стона, класс колец Буля рационально эквивалентен * классу алгебр Буля, т. е. алгебр с тремя операциями $+$, \cdot , $'$, являющихся полурешетками относительно сложения и умножения и связанных тождествами:

$$x(y + z) = xy + xz, \quad x + xy = x, \quad (xy)' = x' + y', \quad x + yy' = x, \quad x'' = x.$$

Ввиду этого, вместо свободных топологических колец Буля можно рассматривать свободные топологические алгебры Буля.

Класс алгебр Буля, а следовательно, и класс колец Буля, являются β -классами.

В самом деле, из теории представлений алгебр Буля [см. (2), стр. 199] известно, что всякая абстрактная алгебра Буля допускает полную систему гомоморфизмов на алгебру с двумя элементами 0, 1, содержащуюся в любой алгебре Буля. Поэтому для применения леммы достаточно указать хотя бы одну топологическую линейно связную алгебру Буля. Но такая алгебра \mathfrak{B} хорошо известна. Элементами ее являются объединения конечного числа полусегментов вида $(a, b]$ ($0 \leq a < b \leq 1$), а также пустое множество. Операции $+$, \cdot , $'$ в этой алгебре совпадают соответственно с объединением, пересечением и дополнением в полусегменте $(0, 1]$. Расстоянием $\rho(P, Q)$ между элементами P, Q алгебры \mathfrak{B} называется выражение

$$\text{mes}(P \cup Q) - \text{mes}(P \cap Q).$$

Соотношения [см. (2), стр. 119]

$$\rho(P \cup Q, S \cup T) + \rho(P \cap Q, S \cap T) \leq \rho(P, S) + \rho(Q, T),$$

$$\rho(P', S') = \rho(P, S),$$

показывают, что в топологии, определяемой указанной метрикой, алгебра \mathfrak{B} становится топологической и, как легко проверить, линейно связной. Тем самым утверждение доказано.

* Рациональная эквивалентность означает, что в кольце Буля можно определить производные операции, относительно которых кольцо Буля становится алгеброй Буля и через которые первоначальные кольцевые операции могут быть снова выражены в качестве производных с аналогичными свойствами.

Алгебра \mathfrak{B} относительно кольцевого сложения, определяемого формулой

$$P \oplus Q = P'Q + PQ',$$

является абелевой группой, все элементы которой имеют порядок 2. Эта группа линейно связна и представляет собой простейший пример связных топологических периодических групп, общий прием конструирования которых был рассмотрен А. А. Марковым ⁽¹⁴⁾.

В заключение отметим несколько вопросов, решение которых, по-видимому, представляло бы интерес для развития теории свободных топологических алгебр.

В § 4 была построена трансфинитная последовательность топологий τ_λ ($\lambda \leq \tau$). Спрашивается, любое ли трансфинитное τ фактически может встретиться при разных A и разных X ? В ряде случаев выше было установлено равенство $\tau = 0$. Если рассматриваются свободные топологические группы, а в качестве X берутся не вполне регулярные пространства, то $\tau \neq 0$, так как все подмножества группового пространства вполне регулярны. Какие значения может иметь τ для свободных групп над вполне регулярными пространствами?

Другая серия вопросов связана с алгебраической структурой свободных топологических алгебр. Будет ли свободная топологическая группа над регулярным пространством алгебраически свободной? Можно ли указать какие-либо необходимые чисто алгебраические признаки β -классов? Отметим также вопрос о явном указании свободной топологии, тесно связанный, конечно, с вопросом о возможных значениях τ , но к нему не сводящийся.

Поступило
22.XI.1955

ЛИТЕРАТУРА

- Александров П. С., О понятии пространства в топологии, Успехи матем. наук, 2, № 2 (1948), 5—57.
- Биркгоф Г., Теория структур, М., ИЛ., 1952.
- Birkhoff G., On the structure of abstract algebras, Proc. Camb. Phil. Soc., 31 (1935), 433—454.
- Birkhoff G., Moore — Smith convergence in general topology, Ann. of Math., 38 (1937), 39—56.
- Граев М. И., Свободные топологические группы, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 12 (1948), 279—324.
- Граев М. И., О свободных произведениях топологических групп, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 14 (1950), 343—354.
- Hämisch W., Über die Topologie in der Algebra, Math. Zeitschr., 60, № 4 (1954), 458—487.
- Kakutani Sh., Free topological groups and infinite direct product topological groups, Proc. Imp. Acad. Tokyo, 20 (1944), 595—598.
- Мальцев А. И., Об одном классе однородных пространств, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 13 (1949), 9—32.
- Мальцев А. И., Об алгебрах с тождественными определяющими соотношениями, Матем. сб., 26 (68): 1 (1950), 19—34.
- Мальцев А. И., Об одном классе алгебраических систем, Успехи матем. наук, 8, № 1 (1953), 165—171.

- ¹² Мальцев А. И., К общей теории алгебраических систем, Матем. сб., 35 (77) : 1 (1954), 3—20.
 - ¹³ Марков А. А., О свободных топологических группах, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 9 (1945), 3—64.
 - ¹⁴ Марков А. А., О существовании периодических связных топологических групп, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 8 (1944), 225—232.
 - ¹⁵ Накаюта Т., Note on free topological groups, Proc. Imp. Acad. Tokyo, 19 (1943), 471—475.
 - ¹⁶ Окунев Л. Я., Кольцо, как алгебра относительно тела, Матем. сб., 40 (1933), 410—424.
 - ¹⁷ Чогошвили Г. С., О пространствах сходимости, Матем. сб., 9 (51) : 2 (1941) 377—381.
 - ¹⁸ Шанин Н. А., О погружениях в степень топологического пространства, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 8 (1944), 233—242.
 - ¹⁹ Sikorski R., Products of abstract algebras, Fund. Math., 39 (1952), 211—228.
-

В. Д. ПОДДЕРЮГИН

УСЛОВИЯ УПОРЯДОЧИВАЕМОСТИ ГРУППЫ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым)

В работе устанавливается чисто теоретико-групповой критерий линейной упорядочиваемости группы.

В 1947 г. Е. П. Шимбирева ⁽¹⁾ установила следующие близкие между собой условия упорядочиваемости группы:

- 1) существование центральной системы, все факторы которой являются группами без кручения, — условие достаточное, но не необходимое;
- 2) существование разрешимой нормальной системы, все факторы которой являются группами без кручения, — условие необходимое, но не достаточное.

Е. П. Шимбирева высказала предположение о возможности отыскания условий упорядочиваемости группы, промежуточных между условиями 1) и 2) и являющихся уже необходимыми и достаточными одновременно. Такого рода условия были независимо найдены К. Ивасавой ⁽²⁾ и А. И. Мальцевым ⁽³⁾. Однако в формулировках условий обоих этих авторов используются понятия, теории групп не принадлежащие. Именно, условия А. И. Мальцева содержат требования, налагаемые на кольца и поля, некоторым образом связываемые с факторами системы, а в условиях К. Ивасава требуется, чтобы факторы могли быть упорядочены и притом так, чтобы отношения порядка в различных факторах были между собой согласованы.

В теореме 3 настоящей работы устанавливаются необходимые и достаточные условия упорядочиваемости группы, промежуточные между условиями 1) и 2) и формулируемые на языке самой теории групп.

Этот путь получения необходимых и достаточных условий упорядочиваемости группы не является единственно возможным. Так, в 1949 г. П. Лоренцен ⁽⁴⁾ получил совершенно другого рода условия упорядочиваемости группы. Общеизвестно, что возможность упорядочить группу равносильна существованию в ней подполугруппы H (состоящей из всех элементов, неотрицательных при некотором упорядочении), обладающей свойствами:

- 1) $1 \in H$;
- 2) если $a \notin H$, то $a^{-1} \in H$;
- 3) если $a \in H$ и $a \neq 1$, то $a^{-1} \notin H$.

Подполугруппу, обладающую только свойствами 1) и 2), П. Лоренцен называет *линейной* подполугруппой. Такие подполугруппы всегда существуют; такова, например, сама группа.

Лоренцен доказал *, что группу тогда и только тогда можно упорядочить, когда пересечение всех ее линейных подполугрупп состоит только из 1. Он доказал также (не выделяя этого в отдельную теорему), что возможность упорядочить группу равносильна следующему условию: в группе не существует отличного от 1 элемента g , для которого нашлись бы такие элементы x_1, x_2, \dots, x_n , что

$$g \in h(x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1})$$

при любой комбинации знаков (здесь $h(a, b, \dots, t)$ — подполугруппа, порожденная элементами a, b, \dots, t и 1). Мы получим попутно условие, почти совпадающее с этим. Оно содержится в теореме 1.

Автор пользуется случаем выразить благодарность А. Г. Курошу, под руководством которого выполнялась работа, и Е. П. Шимбиревой, прочитавшей рукопись и сделавшей ряд ценных замечаний.

§ 1

Пусть G — группа с областью операторов Ω . Через $\bar{\Omega}$ будем обозначать множество эндоморфизмов группы G , соответствующих операторам из Ω . Область операторов будем обозначать прописной латинской буквой (например F) в том случае, если F — группа, $G = H_1/H_2$, где H_1 и H_2 ($H_1 \supset H_2$) — нормальные делители в F , и элементу $f \in F$ ставится в соответствие автоморфизм, индуцируемый в G внутренним автоморфизмом $x \rightarrow f^{-1}xf$ группы F . \bar{F} изоморфно в этом случае группе $F/H_2/Z(H_1/H_2)$, где $Z(H_1/H_2)$ — централизатор подгруппы H_1/H_2 в группе F/H_2 . Сюда, в частности, относится случай, когда G — нормальный делитель в F .

Группу G с областью операторов Ω будем называть Ω -упорядоченной, если она упорядочена и образ любого положительного элемента при любом эндоморфизме из $\bar{\Omega}$ неотрицателен. Примером такой группы является любая подгруппа A упорядоченной группы G . Именно, она $N(A)$ -упорядочена, где $N(A)$ — нормализатор подгруппы A в группе G . Аддитивная группа упорядоченного кольца R , рассматриваемая как группа с областью (правых) операторов $\Omega = R$, в том и только в том случае будет Ω -упорядоченной группой, если $R^2 = 0$.

Конечную систему элементов a_1, a_2, \dots, a_n группы G с областью операторов Ω будем называть *правильной*, если ни одно из равенств

$$a_i \omega = 1, \quad a_i \omega = a_k, \quad a_i \omega = a_k^{-1} \quad (i \neq k, \omega \in \bar{\Omega})$$

не выполняется ни при каких i, k, ω . Правильная система элементов будет называться *независимой*, если никакое произведение, составленное из элементов вида $a_i \omega$, не равно 1. Ясно, что всякая часть правильной системы правильна, всякая часть независимой системы независима.

* Мы заменяем терминологию П. Лоренцена общепринятой.

Докажем теперь следующую теорему, являющуюся аналогом теоремы 1 работы автора ⁽⁵⁾.

ТЕОРЕМА 1. Если $\bar{\Omega}$ есть подгруппа группы автоморфизмов группы G , содержащая все внутренние автоморфизмы, то для того чтобы G могла быть Ω -упорядочена, необходимо и достаточно, чтобы для любой правильной системы элементов a_1, a_2, \dots, a_n этой группы в ней нашлась хотя бы одна такая независимая система элементов b_1, b_2, \dots, b_n , что $b_i = a_i$ или $b_i = a_i^{-1}$.

Доказательство необходимости. Пусть группа G Ω -упорядочена и пусть система a_1, a_2, \dots, a_n — правильная. В качестве b_i выбираем положительный из элементов a_i, a_i^{-1} . Полученная система будет, очевидно, независимой.

Доказательство достаточности. Пусть выполнено условие теоремы. Тогда Ω порождает разбиение группы на непересекающиеся классы элементов, переходящих друг в друга при помощи автоморфизмов из $\bar{\Omega}$. Будем называть их Ω -классами. Ω -класс, содержащий элемент g , будем обозначать через $[g]$. Ω -класс $[1]$ состоит из одного элемента 1 . Так как из $g_2 = g_1\omega$ следует $g_2^{-1} = g^{-1}\omega$, то $[g^{-1}]$ состоит из элементов, обратных к элементам из $[g]$. Ω -класс $[g^{-1}]$ будем называть обратным к Ω -классу $[g]$. Если $g \neq 1$, то $[g] \neq [g^{-1}]$, иначе было бы $g = g^{-1}\omega$, откуда $g \cdot g\omega = 1$ и $g^{-1}g^{-1}\omega = 1$, т. е. для правильной системы, состоящей из одного элемента g , не существовало бы соответствующей независимой системы. Система элементов b_1, b_2, \dots, b_n будет называться близкой к системе a_1, a_2, \dots, a_n , если $b_i \in [a_i]$ или $b_i \in [a_i^{-1}]$. Если система a_1, a_2, \dots, a_n — правильная, то правильной будет и любая близкая к ней система. Заметим, что для каждой правильной системы элементов группы G существует, в силу условия теоремы, близкая к ней независимая система.

Образуем теперь множество всех (неупорядоченных) пар $\{[g], [g^{-1}]\}$ взаимно обратных Ω -классов, отличных от $[1]$, и вполне упорядочим это множество.

В первой паре выберем такой Ω -класс $[\bar{g}_1]$, чтобы для любой правильной системы

$$a_1 \in [\bar{g}_1], a_2, \dots, a_n$$

можно было так выбрать близкую к ней независимую систему b_1, b_2, \dots, b_n , что $b_1 \in [\bar{g}_1]$. Такой выбор Ω -класса $[\bar{g}_1]$ действительно возможен. В противном случае в группе G нашлась бы такая правильная система

$$a_{11} \in [g_1], a_{12}, \dots, a_{1m}, \quad (1)$$

что во всякой близкой к ней независимой системе $b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1m}$ было бы $b_{11} \in [g_1^{-1}]$. С другой стороны, в G нашлась бы такая правильная система

$$a_{21} \in [g_1^{-1}], a_{22}, \dots, a_{2l}, \quad (2)$$

что во всякой близкой к ней независимой системе $b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2l}$ было бы $b_{21} \in [g_1]$. Переделаем систему (2), заменив всякий ее элемент a_{2i} , лежащий в Ω -классе, обратном к Ω -классу, в котором содержится элемент a_{1j} системы (1), на этот последний элемент. Полученная система (обозна-

чим ее через (2')), очевидно, правильная и содержит элемент $a_{21}^{-1} = a_{11} \in [g_1]$. Во всякой близкой к ней независимой системе $\bar{b}_{21}, \bar{b}_{22}, \dots, \bar{b}_{2l}'$ непременно $\bar{b}_{21} \in [g_1]$, так как всякая система, близкая к (2'), близка и к (2), и наоборот.

Рассмотрим систему элементов, содержащую (1) и все те из элементов системы (2'), которые не входят в те же Ω -классы, что и элементы из (1). Эта система будет правильной, но близкой к ней независимой системы не существует. В самом деле, если бы эта последняя содержала элемент из $[g_1]$, то мы получили бы противоречие с выбором системы (1), а если бы она содержала элемент из $[g_1^{-1}]$, то это противоречило бы сказанному о системе (2').

Пусть для всех $\beta < \alpha$ уже выбраны такие Ω -классы $[\bar{g}_\beta]$, что для любой правильной системы

$$a_1 \in [\bar{g}_{\gamma_1}], a_2 \in [\bar{g}_{\gamma_2}], \dots, a_{m-1} \in [\bar{g}_{\gamma_{m-1}}], a_m \in [\bar{g}_\beta], a_{m+1}, \dots, a_n,$$

где $0 < m \leq n$, $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{m-1} < \beta$, а элементы a_{m+1}, \dots, a_n принадлежат к парам, номера которых больше β , можно найти такую близкую к ней независимую систему b_1, b_2, \dots, b_n , что

$$b_i \in [\bar{g}_{\gamma_i}], \quad i = 1, 2, \dots, m-1, \quad b_m \in [\bar{g}_\beta].$$

Как и для случая $\alpha = 1$, легко показать, что можно так выбрать Ω -класс $[\bar{g}_\alpha]$, что указанное выше свойство (при замене β на α) остается справедливым. Можно считать, следовательно, что Ω -классы $[\bar{g}_\alpha]$ выбраны во всех парах. Множество G^+ всех элементов этих классов обладает всеми свойствами множества всех положительных элементов при некотором Ω -упорядочении группы. Докажем это:

- 1) $1 \notin G^+$ по построению.
- 2) Если $g \notin G^+$ и $g \neq 1$, то $g^{-1} \in G^+$ по построению.
- 3) Если $g \in G^+$, то $g^{-1} \notin G^+$ по построению.
- 4) Если $g, h \in G^+$, то и $gh \in G^+$, ибо $gh \neq 1$, а $(gh)^{-1} \notin G^+$.

В самом деле, пусть $g \in [g_\alpha]$, $h \in [g_\beta]$, $(gh)^{-1} \in [g_\gamma]$ и пусть $\sigma = \max(\alpha, \beta, \gamma)$. Тогда $[g_\sigma]$ не может быть выбран в качестве $[\bar{g}_\sigma]$, ввиду равенства

$$(gh)^{-1} \cdot g \cdot h = 1,$$

т. е. $g, h, (gh)^{-1}$ не могут все лежать в G^+ .

5) Если $g \in G^+$, то и $g\omega \in G^+$ при любом ω из $\bar{\Omega}$, в частности $h^{-1}gh \in G^+$ при любом $h \in G$ по построению.

Теорема доказана.

Подгруппу H группы G с областью операторов Ω назовем Ω -изолированной, если из равенства

$$g\omega_1 \cdots g\omega_{l-1} \cdot g \cdot g\omega_1 \cdots g\omega_n = 1,$$

где $g \in G$, $h \in H$, $\omega_i \in \bar{\Omega}$, $1 \leq l \leq n+1$, всегда следует

$$g \in H, \quad g\omega_i \in H, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Элемент g группы G с областью операторов Ω назовем Ω -периодическим, если существуют такие $\omega_i \in \bar{\Omega}$, что имеет место равенство:

$$g \cdot g\omega_1 \cdot g\omega_2 \cdot \dots \cdot g\omega_n = 1.$$

G -изолированную подгруппу группы G будем называть *строго изолированной*. Пересечение Ω -изолированных подгрупп есть Ω -изолированная подгруппа. Объединение возрастающей последовательности Ω -изолированных подгрупп также есть Ω -изолированная подгруппа. Если H — допустимый нормальный делитель группы G , то при естественном взаимно однозначном соответствии между подгруппами фактор-группы G/H и подгруппами группы G , содержащими H , Ω -изолированные подгруппы группы G/H соответствуют Ω -изолированным подгруппам группы G , и наоборот. В частности, если H есть Ω -изолированный допустимый нормальный делитель группы G , то G/H не содержит Ω -периодических элементов, отличных от 1, и, наоборот, если фактор-группа G/H по допустимому нормальному делителю H не содержит Ω -периодических элементов, отличных от 1, то H Ω -изолирован.

Выпуклые подгруппы Ω -упорядоченной группы Ω -изолированы.

В самом деле, пусть G есть Ω -упорядоченная группа, H — выпуклая подгруппа в ней и пусть имеет место равенство:

$$g\omega_1 \cdot \dots \cdot g\omega_{l-1} \cdot g \cdot g\omega_1 \cdot \dots \cdot g\omega_n = h,$$

где $g \in G$, $h \in G$, $1 \leq l \leq n+1$. Если $g = 1$, то и все $g\omega_i = 1$, т. е. $g \in H$, $g\omega_i \in H$. Если $g > 1$, то все $g\omega_i > 1$ и $h > 1$, причем $k \geq g > 1$, $h > g\omega_i \geq 1$, т. е. $g \in H$, $g\omega_i \in H$. Если $g < 1$, то $g^{-1} > 1$ и

$$g^{-1}\omega_n \cdot \dots \cdot g^{-1}\omega_1 \cdot g^{-1}g^{-1}\omega_{l-1} \cdot \dots \cdot g^{-1}\omega_1 = h^{-1},$$

откуда $g^{-1} \in H$, $g^{-1}\omega_i \in H$, т. е. $g \in H$, $g\omega_i \in H$. Так как E есть выпуклая подгруппа, то отсюда следует, что Ω -упорядоченная группа не содержит Ω -периодических элементов, кроме 1. Обратное утверждение, очевидно, не верно. По всей вероятности оно не верно и в том частном случае, когда $\bar{\Omega}$ содержит группу внутренних автоморфизмов группы G . Однако справедлива следующая теорема, являющаяся некоторым обобщением известной теоремы Леви⁽⁶⁾.

ТЕОРЕМА 2. *Если $\bar{\Omega}$ есть подгруппа группы автоморфизмов группы G , $\bar{\Omega}$ и G коммутативны и G не содержит Ω -периодических элементов, отличных от 1, то G может быть Ω -упорядочена.*

Доказательство. Допустим, что G нельзя Ω -упорядочить. Это значит, в силу теоремы 1, что существует по крайней мере одна такая правильная система элементов a_1, a_2, \dots, a_n , для которой нельзя найти соответствующей независимой системы. Среди правильных систем, обладающих этим свойством, можно выбрать систему минимальной длины. Пусть a_1, a_2, \dots, a_n будет такой системой. Заметим, что $n > 1$, так как $\bar{\Omega}$ есть группа и все элементы группы G , кроме 1, не являются Ω -периодическими.

дическими. Таким образом, система a_1, a_2, \dots, a_{n-1} не пуста и для нее существует такая независимая система b_1, b_2, \dots, b_{n-1} , что $b_i = a_i$ или $b_i = a_i^{-1}$. Следовательно, ввиду коммутативности группы G , при подходящих значениях ω_{ij} , ω'_{il} , ω_k и ω'_r из $\bar{\Omega}$ имеют место равенства:

$$F_1 = \left(\prod_{1 \leq i < n} \cdot \prod_{j=1}^{m_i} b_i \omega_{ij} \right) \cdot \prod_{k=1}^{m_n} a_n \omega_k = 1,$$

$$F_2 = \left(\prod_{1 \leq i < n} \cdot \prod_{l=1}^{p_i} b_i \omega'_{il} \right) \cdot \prod_{r=1}^{p_n} a_n^{-1} \omega'_r = 1,$$

где символ $\prod_{1 \leq i < n}$ обозначает произведение не обязательно по всем i от 1 до $n-1$, а может быть лишь по некоторым из них. Во всяком случае, в силу вышеизложенного, по крайней мере один элемент вида $b_i \omega$ в каждом из равенств действительно содержится. Однако, ввиду коммутативности группы $\bar{\Omega}$,

$$\left[\prod_{r=1}^{p_n} \cdot \left(\prod_{k=1}^{m_n} a_n \omega_k \right) \omega'_r \right]^{-1} = \prod_{k=1}^{m_n} \cdot \left(\prod_{r=1}^{p_n} a_n^{-1} \omega'_r \right) \omega_k,$$

откуда

$$\left(\prod_{r=1}^{p_n} F_1 \omega'_r \right) \cdot \left(\prod_{k=1}^{m_n} F_2 \omega_k \right) = \prod_{1 \leq i < n} \cdot \prod_{s=1}^i b_i \omega_{is}'' = 1 \quad (\omega_{is}'' \in \bar{\Omega}),$$

что противоречит независимости системы b_1, b_2, \dots, b_{n-1} . Теорема доказана.

§ 2

Теперь мы в состоянии сформулировать и доказать основную теорему нашей работы, причем большая часть доказательства будет простым воспроизведением доказательства соответствующей теоремы А. И. Мальцева.

ТЕОРЕМА 3. Для того чтобы группа G могла быть упорядочена, необходимо и достаточно, чтобы в ней существовала разрешимая нормальная система Σ , удовлетворяющая следующим условиям:

1. Если $A \in \Sigma$, то и $g^{-1}Ag \in \Sigma$ для любого $g \in G$.

2. Если $A \subset B$ — соседние подгруппы из Σ , $N(A)$ — нормализатор A в G и $C(A) = [N(A), N(A)]$, то $[C(A), B] \subseteq A$.

3. Все подгруппы из Σ строго изолированы.

Доказательство необходимости. Пусть группа G упорядочена. В качестве Σ возьмем систему всех выпуклых подгрупп группы G . Прежде всего очевидно, что Σ — полная система и условие 1 в ней выполняется. Далее, если $A \subset B$ — соседние подгруппы из Σ , то $g^{-1}Ag \subset g^{-1}Bg$ для любого $g \in G$ и эти подгруппы также являются соседними. Отсюда следует, что A — нормальный делитель в B . Упорядочим естественным образом фактор-группу B/A . Легко видеть, что B/A не содержит выпуклых подгрупп. Следовательно, она архимедова и, в силу теоремы Гельдера

[см. например, (7)], коммутативна. Таким образом, Σ — разрешимая нормальная система.

Если $g^{-1}Bg = B$, т. е. $g \in N(B)$, то и $g^{-1}Ag = A$, и наоборот, т. е. $N(A) = N(B)$. Поэтому любой элемент $g \in N(A)$ вызывает в B/A некоторый автоморфизм, сохраняющий порядок. Такой автоморфизм, следуя А. И. Мальцеву, будем называть *главным*. Если B/A отобразить изоморфно с сохранением порядка на подгруппу R аддитивной группы действительных чисел, то главные автоморфизмы будут индуцировать некоторые автоморфизмы группы R , сохраняющие порядок. Но все такие автоморфизмы являются умножениями на положительные действительные числа [см., например, (8)]. Отсюда, в частности, следует, что автоморфизмы группы R , сохраняющие порядок, перестановочны, а значит перестановочны и главные автоморфизмы группы B/A , т. е. для любого b из B и любых $g, h \in N(A)$ имеет место:

$$hgb^{-1}g^{-1}h^{-1} \cdot ghbh^{-1}g^{-1} \in A.$$

Отсюда следует:

$$h^{-1}g^{-1}hgb^{-1}g^{-1}h^{-1}ghb \in A,$$

т. е.

$$[g, h]^{-1}b^{-1}[g, h]b \in A.$$

Если $b \in B$, $c \in C(A)$, т. е.

$$c = [g_1, h_1] \cdot [g_2, h_2] \dots [g_n, h_n],$$

где $g_i, h_i \in N(A)$, $i = 1, 2, \dots, n$, то, как легко проверить,

$$c^{-1}b^{-1}cb \in A,$$

а значит и всякое произведение элементов такого вида тоже входит в A , т. е.

$$[C(A), B] \subseteq A.$$

Наконец, выполнение условия 3 следует из доказанного выше более общего замечания о выпуклых подгруппах Ω -упорядоченной группы.

Доказательство достаточности. Пусть в группе G существует система подгрупп Σ , удовлетворяющая условиям теоремы. Если $A \subset B$ — соседние подгруппы из Σ , то и $g^{-1}Ag \subset g^{-1}Bg$ также являются соседними при любом $g \in G$. В каждом классе $\{B\}$ сопряженных подгрупп, являющихся верхними подгруппами скачков, выберем по одной отмеченной подгруппе B^* . Соседнюю с ней меньшую подгруппу обозначим через A^{**} . Для любого h такого, что $h^{-1}Bh = B^*$, имеет место $h^{-1}Ah = A^{**}$, и наоборот. Понятно, что подгруппа A может быть, в свою очередь, верхней подгруппой в каком-то другом скачке; A^{**} не обязана в этом случае совпадать с A^* .

Пусть $g \in G$ и $g \neq 1$. Тогда среди подгрупп системы Σ существуют подгруппы, содержащие g , например G . Возьмем пересечение всех таких подгрупп и обозначим его через B_g . Среди подгрупп системы Σ найдутся и такие, которые элемента g не содержат, например E . Возьмем объединение всех таких подгрупп и обозначим его через A_g .

Рассмотрим фактор-группу B_g^*/A_g^{**} . Она может быть упорядочена и при этом так, чтобы порядок сохранялся при главных автоморфизмах. В самом деле, из разрешимости системы Σ следует, что B_g^*/A_g^{**} коммутативна. Группа $\bar{\Omega}$ ее главных автоморфизмов изоморфна $N(A_g^{**})$. Из условия 2 следует коммутативность $N(A_g^{**})$. Пусть, действительно, g, h — элементы из $N(A_g^{**})$. Тогда

$$hgh^{-1}g^{-1} \in C(A_g^{**}) \text{ и } ghg^{-1}h^{-1}b^{-1}hgh^{-1}g^{-1}b \in A_g^{**},$$

где b — любой элемент, входящий в B_g^* и не входящий в A_g^{**} . Отсюда следует:

$$\overline{g^{-1}h^{-1}b^{-1}hg} = \overline{h^{-1}g^{-1}bgh},$$

что и означает перестановочность соответствующих главных автоморфизмов. Из условия 3 следует, что в B_g^*/A_g^{**} не существует $N(A_g^{**})$ -периодических элементов, отличных от 1. Мы находимся, следовательно, в условиях теоремы 2, применением которой и доказывается наше утверждение.

Пусть фактор-группы B_g^*/A_g^{**} для всех $g \in G$ упорядочены так, что порядок сохраняется при главных автоморфизмах. Элемент g группы G назовем *положительным*, если существует такой элемент $h \in G$, что

$$h^{-1}gh = g' \in B_g^*, \quad g' \notin A_g^{**},$$

и образ $\bar{g'}$ элемента g' положителен в B_g^*/A_g^{**} .

Условие

$$h^{-1}gh = g' \in B_g^*, \quad g' \notin A_g^{**},$$

равносильно условию $h^{-1}Bh = B_g^*$ (и, значит, $h^{-1}Ah = A_g^{**}$). Если элемент g положителен, то элемент $\overline{h^{-1}gh} = \bar{g'}$ положителен в B_g^*/A_g^{**} для любого h_1 такого, что

$$h_1^{-1}Bgh_1 = B_g^*.$$

В самом деле,

$$g'' = h_1^{-1}hg'h^{-1}h_1 \text{ и } h_1^{-1}hB_g^*h^{-1}h_1 = B_g^*, \quad h_1^{-1}hA_g^{**}h^{-1}h_1 = A_g^{**},$$

т. е. $h^{-1}h_1$ порождает главный автоморфизм θ в B_g^*/A_g^{**} . Значит, элемент $\bar{g''} = \bar{g'}\theta$ положителен в B_g^*/A_g^{**} .

Множество G^+ так определенных положительных элементов удовлетворяет всем аксиомам:

1) $1 \notin G^+$ по построению.

2) Если $g \notin G^+$ и $g \neq 1$, то $g^{-1} \in G^+$. В самом деле, подгруппы B_g^* и A_g^{**} существуют и при некотором h таком, что $h^{-1}Bgh = B_g^*$, образ $\bar{g'}$ элемента $g' = h^{-1}gh$ не положителен в B_g^*/A_g^{**} . Но $\bar{g'} \neq 1$, поэтому положителен элемент $(\bar{g'})^{-1}$, являющийся образом элемента $(g')^{-1} = h^{-1}g^{-1}h$.

3) Если $g \in G^+$, то $g^{-1} \notin G^+$. Если $h^{-1}Bgh = B_g^*$ и $\bar{g'} = \overline{h^{-1}gh}$ положителен в B_g^*/A_g^{**} и $g^{-1} \in G^+$, то, ввиду $B_g^{*-1} = B_g^*$, $(\bar{g'})^{-1} = \overline{h^{-1}g^{-1}h}$ тоже положителен в B_g^*/A_g^{**} , что невозможно.

4) Если $g_1, g_2 \in G^+$, то и $g_1 g_2 \in G^+$. Если $B_{g_1} = B_{g_2}$, то $g_1 g_2 \in B_{g_1}$ и $g_1 g_2 \notin A_{g_1}$, ибо в противном случае для h такого, что $h^{-1} B_{g_1} h = B_{g_1}^*$, имело бы место:

$$h^{-1} g_1 g_2 h = h^{-1} g_1 h \cdot h^{-1} g_2 h \in A_{g_1}^{**},$$

т. е. $\overline{g_1} \cdot \overline{g_2} = 1$, что невозможно. Таким образом, $B_{g_1 g_2} = B_{g_1}$ и $h^{-1} g \cdot g_2 h$ положителен в $B_{g_1 g_2}^* / A_{g_1 g_2}^{**}$. Если $B_{g_2} \subset B_{g_1}$, то $B_{g_1 g_2} = B_{g_1}$ и

$$\overline{h^{-1} g_1 g_2 h} = \overline{h^{-1} g_1 h}$$

при соответствующем h .

5) Если $g \in G^+$, то и $a^{-1} g a \in G^+$ для любого a из G . В силу определения, $B_{a^{-1} g a} = B_g^*$. Пусть

$$h^{-1} B_g h = B_g^*, \quad h_1^{-1} B_{a^{-1} g a} h_1 = B_g^*.$$

Тогда

$$h_1^{-1} (a^{-1} g a) h_1 = h_1^{-1} a^{-1} h (h^{-1} g h) h^{-1} a h_1,$$

но

$$h_1^{-1} a^{-1} h \cdot B_g^* \cdot h^{-1} a h_1 = B_g^*, \quad h_1^{-1} a^{-1} h \cdot A_g^{**} h^{-1} a h_1 = A_g^{**},$$

т. е. $h^{-1} a h_1$ порождает главный автоморфизм θ в $B_g^* / A_g^{**} = B_{a^{-1} g a}^* / A_{a^{-1} g a}^{**}$.

Следовательно,

$$\overline{h_1^{-1} (a^{-1} g a) h_1} = \overline{h^{-1} g h} \theta$$

положителен в $B_{a^{-1} g a}^* / A_{a^{-1} g a}^{**}$.

Теорема полностью доказана. Из доказательства видно, что условие 3 можно заменить одним из трех более слабых условий:

3'. Если $A \subset B$ — соседние подгруппы из Σ , то подгруппа A строго изолирована.

3". Если $A \subset B$ — соседние подгруппы из Σ , то подгруппа A строго изолирована в $N(A)$.

3'''. Если $A \subset B$ — соседние подгруппы из Σ , то подгруппа A $N(A)$ -изолирована в B .

Нетрудно доказать непосредственно, что центральная система, все факторы которой — группы без кручения, и система А. И. Мальцева (они обе являются разрешимыми нормальными системами) удовлетворяют условиям 1, 2, 3'''. Они удовлетворяют даже условию 3. Это вытекает из того, что все подгруппы каждой из этих систем (равно как и системы К. Ивасава и системы Σ нашей работы) при тех способах упорядочения, которые описаны авторами в доказательстве соответствующих теорем, будут выпуклыми. Система К. Ивасава при некотором упорядочении группы будет даже системой всех ее выпуклых подгрупп (поэтому она также удовлетворяет нашим условиям). В отношении других систем это, вообще говоря, неверно.

Следствие. Абелевы группы без кручения ранга 1 (т. е. подгруппы аддитивной группы рациональных чисел), и только они, допускают архимедову линейную упорядоченность, но не допускают никакой неархимедовой линейной упорядоченности.

Доказательство. Абелевы группы без кручения ранга 1 могут быть, очевидно, архимедовски упорядочены. Так как они не имеют

строго изолированных подгрупп, кроме всей группы и единичной подгруппы (понятие строго изолированной подгруппы совпадает в случае абелевых групп без кручения с понятием сервантной подгруппы), то неархимедовой линейной упорядоченности они не допускают.

Если группа G допускает линейную упорядоченность, то она будет группой без кручения. Если группа G допускает архимедову упорядоченность, то она коммутативна. Если же G не является абелевой группой без кручения ранга 1, то она обладает сервантной подгруппой H , отличной от G и E .

Система Σ , состоящая из E , H и G , удовлетворяет всем условиям теоремы 3. Следовательно, существует неархимедова упорядоченность группы G .

Поступило
16. III. 1956

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Ш и м б и р е в а Е. П., К теории частично упорядоченных групп, Мат. сб., 20 (62): 1 (1947), 145—178.
 - ² Jwasawa K., On linearly ordered groups, Journ. math. Soc. Japan, 1 (1948), 1—9.
 - ³ М а л ь ц е в А. И., Об упорядоченных группах, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 13 (1949), 473—482.
 - ⁴ L o r e n z e n P., Über halbgeordnete Gruppen, Math. Zeitschr., 52, № 4 (1949), 483—526.
 - ⁵ П о д д е р ю г и н В. Д., Условия упорядочиваемости произвольного кольца, Успехи матем. наук, IX, вып. 4 (1954), 211—216.
 - ⁶ L e v i F., Arithmetische Gesetze im Gebiete diskreter Gruppen, Rendiconti di Palermo, 35 (1913), 225—236.
 - ⁷ Б и р к г о ф Г., Теория структур, М., 1952.
 - ⁸ Х и о н Я. В., Архимедовски упорядоченные кольца, Успехи матем. наук, IX, вып. 5 (1954), 236—242.
-

Я. В. ХИОН

УПОРЯДОЧЕННЫЕ ПОЛУГРУППЫ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым)

В работе определяются и изучаются линейно упорядоченные полугруппы.

Теория полугрупп начинает занимать в алгебре все большее место. В частности, изучаются структурно упорядоченные полугруппы, причем получены обобщения ряда теорем из теории идеалов колец.

В настоящей работе изучаются линейно упорядоченные полугруппы. Теория упорядоченных полугрупп оказалась полезным орудием при получении ряда теорем о линейно упорядоченных кольцах и их обобщений на кольца, нормированные при помощи полугрупп. (Изложение этих результатов будет дано в другой статье.) Этими приложениями объясняются ограничения, накладываемые на изучаемые полугруппы.

Теория упорядоченных полугрупп может представлять также самостоятельный интерес в связи с общей теорией полугрупп. Линейно упорядоченным полугруппам посвящено пока мало работ: нам известна только одна [см. ⁽¹⁾].

Основным результатом настоящей работы является сведение изучения произвольных упорядоченных полугрупп к изучению трех типов последних (упорядоченных ниль-полугрупп, целых упорядоченных полугрупп, простых упорядоченных полугрупп) и к теории расширений упорядоченных полугрупп.

§ 1. Определение и простейшие свойства упорядоченных полугрупп

Множество P называется *упорядоченной полугруппой*, если:

1. P замкнуто относительно определенного в нем ассоциативного умножения.

2. P является (линейно) упорядоченным множеством.

3. Для любых $\alpha, \beta, \gamma \in P$ из $\alpha \geq \beta$ следует $\alpha\gamma \geq \beta\gamma$ и $\gamma\alpha \geq \gamma\beta$.

4. В P существует элемент 0 , удовлетворяющий условиям:

$$\alpha 0 = 0 \alpha = 0, \quad 0 \leq \alpha,$$

для любого $\alpha \in P$.

5. Для любых $\alpha, \beta, \gamma \in P$ из $\alpha\gamma = \beta\gamma \neq 0$ следует $\alpha = \beta$ и из $\gamma\alpha = \gamma\beta \neq 0$ следует $\alpha = \beta$.

Определение упорядоченной полугруппы, данное нами, не является наиболее широким, которое можно было бы дать. Естественно считать упорядоченной полугруппой уже множество P , удовлетворяющее аксиомам 1—3. Но мы будем почти исключительно заниматься более узким классом полугрупп, удовлетворяющих аксиомам 1—5, и будем ради краткости называть их упорядоченными полугруппами. Если мы будем иметь дело с упорядоченными полугруппами в более широком смысле, то это будет специально оговариваться.

Подмножество A упорядоченной полугруппы P называется *выпуклым* в P , если из $\alpha_1, \alpha_2 \in A$ и $\alpha_1 \leq \beta \leq \alpha_2$ следует $\beta \in A$.

Подмножество A полугруппы P называется *подполугруппой* в P , если A замкнуто относительно определенного в P умножения.

Подполугруппа упорядоченной полугруппы удовлетворяет всегда аксиомам 1—3 и 5 (аксиоме 4 удовлетворяют подполугруппы, состоящие из одного идемпотентного элемента и подполугруппы, содержащие 0, и только они).

Подмножество A полугруппы P называется *правым идеалом* в P , если из $\alpha \in A$ и $\rho \in P$ следует $\alpha\rho \in A$. Аналогично определяются понятия левого идеала и двустороннего идеала. Идеал всегда содержит нуль.

Подполугруппа A называется *выпуклой* в P , если она является выпуклым подмножеством в P . Таким же образом определяется понятие выпуклого идеала.

Если в упорядоченной полугруппе P задан выпуклый двусторонний идеал I , то по нему можно построить новую упорядоченную полугруппу, которую мы будем называть *фактор-полугруппой* P/I по I и обозначать через P/I . Элементами этой полугруппы служат символы $\bar{\alpha}$, соответствующие элементам α из P . При $\alpha \in I$ мы считаем $\bar{\alpha} = \bar{0}$, остальные $\bar{\alpha}$ считаем различными.

Умножение определяется формулой $\bar{\alpha}\bar{\beta} = \overline{\alpha\beta}$. Упорядоченность определяется тем, что считается $\bar{\alpha} \geq \bar{\beta}$, если $\alpha \geq \beta$. Легко проверить, что относительно так определенной операции и упорядоченности P/I будет упорядоченной полугруппой (со всеми аксиомами 1—5).

Для всякого элемента α упорядоченной полугруппы выполняется одна и только одна из следующих возможностей:

$$\alpha^2 < \alpha, \quad \alpha^2 = \alpha, \quad \alpha^2 > \alpha.$$

Множество всех таких α , для которых $\alpha^2 \leq \alpha$, мы будем обозначать через K и такие α будем называть *целыми*. Ненулевые элементы, для которых $\alpha^2 = \alpha$, будем называть *единицами*. В теореме 2 будет доказано, что в упорядоченной полугруппе может существовать самое большее одна единица. Множество целых элементов, не являющихся единицами, обозначим через M .

ЛЕММА 1. Если $\alpha \in K$, то при любом β из P $\alpha\beta \leq \beta$ и $\beta\alpha \leq \beta$.

Пусть $\alpha^2 \leq \alpha$. Допустим, что существует такое $\beta \in P$, что $\alpha\beta > \beta$. Тогда либо $\alpha^2\beta = \alpha\beta = 0$, либо $\alpha^2\beta > \alpha\beta$. Первое невозможно, так как $0 \leq \beta$, второе невозможно, так как из $\alpha^2 \leq \alpha$ следует $\alpha^2\beta \leq \alpha\beta$. Этим первое неравенство доказано; второе доказывается аналогично.

ТЕОРЕМА 1. *Множество K является во всякой упорядоченной полугруппе P выпуклой подполугруппой. Множество $P \setminus K$ является также выпуклой подполугруппой (без нуля) в P .*

Пусть $\alpha \in K$ и $\beta \leq \alpha$. Тогда $\beta^2 \leq \alpha\beta$ и, по лемме 1, $\alpha\beta \leq \beta$. Отсюда следует, что $\beta^2 \leq \beta$, т. е. $\beta \in K$ и K выпукло.

Допустим, что $\alpha, \beta \in K$. Тогда, по лемме 1, $\alpha\beta \leq \beta$ и, в силу выпуклости K , $\alpha\beta \in K$.

Множество $P \setminus K$ выпукло. Действительно, если $\beta \notin K$, то $\beta > \alpha$ для любых α из K . Из $\gamma \geq \beta$ следует, что γ больше любого элемента из K , т. е. также не принадлежит K .

Возьмем элементы $\beta, \gamma \in P \setminus K$, причем $\beta \leq \gamma$. Тогда $\beta < \beta^2 \leq \beta\gamma$, т. е. $\beta\gamma \in P \setminus K$. Теорема доказана.

ЛЕММА 2. *Если $\alpha \in P \setminus M$, то из $\alpha\beta \neq 0$ следует $\alpha\beta \geq \beta$ и из $\beta\alpha \neq 0$ следует $\beta\alpha \geq \beta$.*

Пусть $\alpha^2 \geq \alpha$. Допустим, что существует такое β , что $\alpha\beta < \beta$. Отсюда следует, что либо $\alpha^2\beta < \alpha\beta$, либо $\alpha^2\beta = \alpha\beta = 0$. Первое невозможно, так как $\alpha^2 \geq \alpha$ влечет $\alpha^2\beta \geq \alpha\beta$. Во втором случае $\alpha\beta = 0$. Первое утверждение леммы доказано. Второе утверждение доказывается аналогично.

ТЕОРЕМА 2. *Всякое выпуклое подмножество в K , содержащее 0, является в K двусторонним идеалом.*

Это следует из того, что, по лемме 1, при $\alpha, \beta \in K$, $\alpha\beta \leq \alpha$ и $\alpha\beta \leq \beta$.

Идеал I полугруппы называется простым, если из $\alpha \notin I$, $\beta \in I$ следует $\alpha\beta \notin I$.

ТЕОРЕМА 3. *Множество K содержит, кроме элементов из M , только, может быть, один элемент ε . Если $M \neq K$, то M является максимальным выпуклым двусторонним идеалом в K , идеал M прост в K и фактор-полугруппа K/M состоит из элементов $\bar{0}$ и $\bar{\varepsilon}$, где $\bar{\varepsilon}^2 = \bar{\varepsilon}$.*

Допустим, что $\varepsilon \neq 0$ и $\varepsilon^2 = \varepsilon$. Сопоставляя леммы 1 и 2, мы получим, что из $\varepsilon\beta \neq 0$ следует $\varepsilon\beta = \beta$ и из $\beta\varepsilon \neq 0$ следует $\beta\varepsilon = \beta$.

Чтобы доказать выпуклость множества M , достаточно показать, что если $\varepsilon \neq 0$, $\varepsilon^2 = \varepsilon$, $\beta \geq \varepsilon$, $\beta \in K$, то $\beta^2 = \beta$. Из $\beta \geq \varepsilon$ следует

$$\beta^2 \geq \beta\varepsilon \geq \varepsilon^2 = \varepsilon \neq 0,$$

т. е., по доказанному выше,

$$\beta^2 \geq \beta\varepsilon = \beta.$$

Отсюда и из $\beta \in K$ следует $\beta^2 = \beta$. Теперь легко установить и единственность идемпотента. Действительно, если наряду с ε существует еще другой идемпотент β , $\beta \geq \varepsilon$, то $\beta\varepsilon \neq 0$ и поэтому $\beta = \beta\varepsilon = \varepsilon$.

То, что M является двусторонним идеалом в K , следует теперь из теоремы 2. При $M \neq K$ идеал M максимален, так как в K вне M лежит только один элемент.

Остальные утверждения теоремы очевидны.

ТЕОРЕМА 4. *Если I является выпуклым правым (левым) идеалом в P и $I \neq P$, то $I \subset M$.*

Допустим, что I содержит какой-нибудь элемент α , не принадлежащий M . Покажем что тогда I содержит и любой элемент β из P , для которого $\beta \geq \alpha$. Для этого установим, что $\alpha\beta \geq \beta$. Если бы было $\alpha\beta < \beta$, то отсюда следовало бы $\alpha^2\beta \leq \alpha\beta$. С другой стороны, $\alpha \notin M$ означает,

что $\alpha^2 \geq \alpha$ и поэтому $\alpha^2 \beta \geq \alpha \beta$, так что $\alpha^2 \beta = \alpha \beta$. Но, ввиду $\alpha \beta < \beta$, это возможно только при $\alpha \beta = 0$. Последнее же невозможно, так как $\alpha \beta \geq \alpha^2 \geq \alpha > 0$.

§ 2. Радикал и максимальный выпуклый идеал

В полугруппах с нулем можно определить понятия делителя нуля, нильпотентного элемента, нильпотентного идеала, ниль-идеала совершенно аналогично соответствующим понятиям для колец.

Пусть в полугруппе P заданы подмножества A и B . Произведением AB этих подмножеств назовем совокупность всех таких $\alpha \beta$, где $\alpha \in A$ и $\beta \in B$. Таким же образом можно определить произведение любого конечного числа подмножеств и степени подмножеств.

ЛЕММА 3. Если в упорядоченной полугруппе P имеются делители нуля, то имеются и ненулевые нильпотентные элементы. Совокупность N_n элементов упорядоченной полугруппы P , для которых $\alpha^n = 0$, является при любом натуральном n выпуклым двусторонним идеалом в P , причем $(N_n)^n = 0$.

Пусть элементы α и β являются делителями нуля в P . Мы имеем:

$$(\min(\alpha, \beta))^2 \leq \alpha \beta \quad \text{и} \quad (\min(\alpha, \beta))^2 = 0,$$

т. е. $\min(\alpha, \beta)$ является нильпотентным элементом.

Покажем, что N_n является выпуклым двусторонним идеалом в P . Пусть $\alpha \in N_n$ и $\beta \in P$. Тогда при $\alpha \beta \geq \beta \alpha$ будет

$$0 = \alpha^n \beta^n \geq (\alpha \beta)^n \geq (\beta \alpha)^n,$$

т. е. $\alpha \beta$ и $\beta \alpha$ принадлежат N_n . Если же $\beta \alpha \geq \alpha \beta$, то используем вытекающее из этого неравенство:

$$0 = \beta^n \alpha^n \geq (\beta \alpha)^n \geq (\alpha \beta)^n$$

и получим тот же результат. Далее, из $\alpha \in N_n$ и $\alpha \geq \beta$ следует $0 = \alpha^n \geq \beta^n$, т. е. $\beta^n = 0$, что означает $\beta \in N_n$.

Убедимся, что $(N_n)^n = 0$. Действительно, возьмем какие-нибудь n элементов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ из N_n . Тогда

$$\alpha_1 \dots \alpha_n \leq (\max(\alpha_1, \dots, \alpha_n))^n = 0,$$

т. е. $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n = 0$. Значит, $(N_n)^n = 0$, что и требуется.

ТЕОРЕМА 5. В упорядоченной полугруппе P совокупность N всех нильпотентных элементов является выпуклым двусторонним идеалом в P . N является объединением всех правых нильпотентных идеалов полугруппы P . Фактор-полугруппа P/N не имеет делителей нуля.

Очевидно, что $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$, откуда сразу следует второе утверждение теоремы. Из того, что все N_n являются выпуклыми двусторонними идеалами, следует, что и N является выпуклым двусторонним идеалом.

Если бы в P/N существовали делители нуля, то в P/N существовали бы и ненулевые нильпотентные элементы. Но тогда мы пришли бы

в противоречие с определением множества N . Этим все утверждения теоремы доказаны.

Определенный в формулировке теоремы 5 выпуклый двусторонний идеал N мы назовем *радикалом* упорядоченной полугруппы P .

Заметим, что радикал упорядоченной полугруппы все же не всегда будет нильпотентным идеалом. Возьмем, например, упорядоченную мультипликативную полугруппу P , состоящую из всех действительных чисел α , удовлетворяющих неравенству $0 \leq \alpha < 1$.

Возьмем в P выпуклый идеал A , состоящий из всех α , для которых $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$. Фактор-полугруппа P/A будет упорядоченной полугруппой. Она является ниль-полугруппой, но не нильпотентна: беря элементы, соответствующие элементам из P , достаточно близким к единице, мы получим элементы со сколь угодно большими показателями нильпотентности.

ТЕОРЕМА 6. *Если $P \neq M$, то в P существует максимальный истинный выпуклый двусторонний идеал Λ . Фактор-полугруппа P/Λ не содержит нетривиальных выпуклых двусторонних идеалов.*

По теореме 4, всякий элемент полугруппы P , лежащий вне M , порождает выпуклый двусторонний идеал, совпадающий со всей полугруппой. Поэтому максимальный среди выпуклых идеалов, не содержащих элементов множества P/M , будет уже максимальным в P . Но существование такого идеала легко доказывается трансфинитной индукцией.

Если бы в фактор-полугруппе P/Λ содержался ненулевой выпуклый двусторонний идеал, то в P содержался бы выпуклый двусторонний идеал, строго больший чем Λ , что невозможно.

Пример, приведенный после теоремы 6, показывает, что в случае $P = M$ максимального идеала может не быть.

Очевидно, что максимальный выпуклый идеал Λ — единственный и является наибольшим среди выпуклых идеалов, так как последние образуют по включению линейно упорядоченное множество.

Упорядоченную полугруппу, не содержащую нетривиальных выпуклых двусторонних идеалов, будем называть *простой*.

Мы ввели в рассмотрение в упорядоченной полугруппе ряд ее выпуклых подполугрупп:

$$0 \subseteq N \subseteq M \subseteq K \subseteq P,$$

а в случае $M \neq P$ доказали еще существование Λ , $N \subseteq \Lambda \subseteq M$. Выясним, являются ли эти подполугруппы в общем случае различными и в какой мере они могут между собой совпадать в различных частных случаях.

Мы уже видели, что радикал может быть отличен от нуля. Покажем, что в общем случае $N \neq \Lambda$. Возьмем полугруппу по умножению, состоящую из нуля и всех неотрицательных степеней какого-нибудь действительного числа α , $0 < \alpha < 1$. Очевидно, что это — упорядоченная полугруппа. Здесь в Λ входят все элементы полугруппы, кроме 1, радикал же равен нулю.

Убедимся теперь, что Λ не обязательно совпадает с M . Построим следующую упорядоченную полугруппу. Элементами ее будут выражения $\alpha^m \beta^n$, где m и n принимают целые неотрицательные значения, и 0).

Умножение определяется формулой

$$(\alpha^m \beta^n)(\alpha^k \beta^l) = \alpha^{m+k} \beta^{n+l}.$$

Будем считать, что $\alpha^m \beta^n \geq \alpha^k \beta^l$, если $m > k$ или $m = k$ и $n \leq l$. В этой полугруппе нет выпуклых идеалов, т. е. $\Lambda = 0$, но $M \neq 0$, так как M состоит из элементов вида β^n (α входит в нулевой степени).

Может случиться, что в упорядоченной полугруппе K совпадает с нулем. Примером этого может служить полугруппа по умножению, состоящая из нуля и положительных степеней действительного числа α , $\alpha > 1$.

Рассмотрим еще раз построенную нами систему подполугрупп. Во всякой упорядоченной полугруппе существует либо цепочка вида

$$0 \subseteq N \subseteq M \subseteq P,$$

либо цепочка вида

$$0 \subseteq N \subseteq \Lambda \subseteq M \subseteq P;$$

N является всегда выпуклым двусторонним идеалом в P . Фактор-полугруппа P/N будет без делителей нуля. В первом случае эта фактор-полугруппа состоит только из целых элементов и не имеет единицы. Упорядоченную полугруппу без делителей нуля и без единицы, состоящую только из целых элементов, мы будем называть целой. Во втором случае в P/N содержится выпуклый двусторонний идеал Λ/N , являющийся целой полугруппой. Фактор-полугруппа P/Λ будет простой.

Таким образом, изучение упорядоченных полугрупп сводится к изучению упорядоченных ниль-полугрупп, упорядоченных целых полугрупп, простых упорядоченных полугрупп и к пока еще не созданной теории расширений для упорядоченных полугрупп, т. е. к обзору всех упорядоченных полугрупп с данным двусторонним идеалом и данной фактор-полугруппой по этому идеалу.

§ 3. Простые упорядоченные полугруппы. Архимедовские классы

ТЕОРЕМА 7. Простая упорядоченная полугруппа не содержит нетривиальных выпуклых односторонних идеалов.

Мы можем предположить, что $P \neq K$. В противном случае, по теореме 2, всякое выпуклое подмножество в P , содержащее 0, будет двусторонним идеалом, и поэтому P , будучи простым, может состоять только из двух элементов. В этом случае P , конечно, не будет иметь нетривиальных выпуклых односторонних идеалов.

Допустим теперь, что в простой упорядоченной полугруппе P существует ненулевой выпуклый левый идеал A . Тогда множество \overline{AP} , состоящее из всех таких β из P , для которых существуют такие $\alpha \in A$ и $\rho \in P$, что $\beta \leq \alpha\rho$, будет выпуклым двусторонним идеалом в P . Именно,

$$\beta \rho_1 \leq \alpha \rho \rho_1 = \alpha \rho_2,$$

$$\rho_1 \beta \leq \rho_1 \alpha \rho = \alpha_1 \rho.$$

Поэтому, ввиду простоты P , или $\overline{AP} = 0$, или же $\overline{AP} = P$. В первом

случае A будет двусторонним идеалом и поэтому $A = P$. Во-втором случае, так как $P \neq K$, существуют такие $\alpha \in A$ и $\rho \in P$, что $\alpha \rho \alpha \rho > \alpha \rho$. Отсюда следует $\alpha \rho \alpha > \alpha$ и поэтому

$$\rho \alpha \rho \geq \rho \alpha.$$

Так как $\rho \alpha \in A$, то мы получим, что A не содержится в M и, по теореме 4, $A = P$. Теорема доказана.

Определим в упорядоченной полугруппе архимедовские классы следующим образом. Пусть элементы α и β — целые и, например, $\alpha \geq \beta$. Тогда α и β отнесем к одному классу, если существует такое натуральное число n , что $\alpha^n \leq \beta$. Пусть, с другой стороны, элементы α и β — оба нецелые, причем $\alpha \geq \beta$. Отнесем α и β к одному классу, если существует такое натуральное n , что $\alpha \leq \beta^n$. Очевидно, что отношение принадлежности к одному классу рефлексивно и симметрично. Докажем его транзитивность. Пусть элементы α, β, γ — целые, $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ и α и β принадлежат одному классу, а также β и γ принадлежат одному классу.

Тогда существуют такие m и n , что $\alpha^m \leq \beta$ и $\beta^m \leq \gamma$. Из этого следует, что $\alpha^{mn} \leq \gamma$.

Случай нецелых элементов рассматривается аналогично.

Таким образом, упорядоченная полугруппа распадается на непересекающиеся архимедовские классы. Любой класс будет состоять либо только из целых, либо только из нецелых элементов. Единица, если она существует, составит отдельный класс. Легко видеть, что все классы являются выпуклыми множествами. Множество архимедовских классов можно упорядочить, считая, что один класс больше другого, если всякий элемент первого класса больше всех элементов второго класса. Обозначим класс элемента α через $\bar{\alpha}$.

ЛЕММА 4. Если $\alpha, \beta \in K$, то $\bar{\alpha\beta} = \min(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$. Если $\alpha, \beta \in P \setminus K$, то $\bar{\alpha\beta} = \max(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$.

Докажем первое утверждение. Пусть $\alpha, \beta \in K$ и, например, $\alpha \geq \beta$. По лемме 1, $\beta \geq \alpha\beta$ и из $\alpha \geq \beta$ следует $\alpha\beta \geq \beta^2$. Отсюда следует, что $\bar{\alpha\beta} = \bar{\beta}$.

Второе утверждение доказывается аналогично, только со ссылкой на лемму 2.

ТЕОРЕМА 8. Разбиение упорядоченной полугруппы P на архимедовские классы является разбиением на попарно не пересекающиеся выпуклые подполугруппы. Всякое разбиение полугруппы P на попарно не пересекающиеся выпуклые подполугруппы может быть продолжено до разбиения на архимедовские классы.

Мы знаем, что все архимедовские классы являются выпуклыми подмножествами в P и что они попарно не пересекаются. То, что эти классы являются подполугруппами, следует из леммы 4 при $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$.

Допустим, что элементы α и β (например, оба целые и $\alpha \geq \beta$) принадлежат одному архимедовскому классу, причем $\alpha \in A$, $\beta \in B$, где A и B — непересекающиеся выпуклые подполугруппы. По определению класса, существует такое n , что $\alpha^n \leq \beta$. Из выпуклости A следует $\beta \in A$, что приводит к противоречию с тем, что A и B не пересекаются. Этим до-

казано, что при разбиении P на попарно не пересекающиеся выпуклые подполугруппы всякая подполугруппа должна быть объединением некоторого множества архимедовских классов, откуда следует второе утверждение теоремы.

Мы говорим, что разбиение упорядоченной полугруппы на непересекающиеся классы определяет в ней отношение конгруэнтности, если множество классов упорядочено и из $\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_2$ следует $\bar{\alpha}_1\beta = \bar{\alpha}_2\beta$ и $\beta\bar{\alpha}_1 = \beta\bar{\alpha}_2$, а из $\alpha_1 \geq \alpha_2$ следует $\bar{\alpha}_1 \geq \bar{\alpha}_2$. Если в множестве классов отношения конгруэнтности определить умножение формулой $\bar{\alpha}\bar{\beta} = \overline{\alpha\beta}$, то получится новая полугруппа. Эта полугруппа называется *фактор-полугруппой* упорядоченной полугруппы по данному отношению конгруэнтности. Фактор-полугруппа упорядоченной полугруппы по некоторому отношению конгруэнтности удовлетворяет аксиомам 1—4, но не всегда аксиоме 5. Определенная нами ранее фактор-полугруппа по выпуклому двустороннему идеалу является частным случаем фактор-полугруппы по отношению конгруэнтности.

§ 4. Целые упорядоченные полугруппы

ТЕОРЕМА 9. *Разбиение целой упорядоченной полугруппы P на архимедовские классы определяет в P отношение конгруэнтности. Фактор-полугруппа по этому отношению конгруэнтности есть упорядоченное множество, в котором произведением двух элементов считается меньший из них. Для всякого упорядоченного множества с наименьшим элементом существует целая упорядоченная полугруппа, для которой данное упорядоченное множество является множеством архимедовских классов.*

Первые два утверждения теоремы следуют из приведенных выше определений и из леммы 4.

Докажем третье утверждение. Рассмотрим полугруппу T по умножению, состоящую из степеней действительного числа α , $0 < \alpha < 1$, с неотрицательными показателями. Пусть нам задано упорядоченное множество Σ с наименьшим элементом 0. Возьмем тогда множество $\Sigma \setminus 0$ и образуем ординальное прямое произведение по множеству $\Sigma \setminus 0$, где все множители являются полугруппами T . Элементами новой полугруппы будут последовательности

$$\beta = (\dots, \beta_\sigma, \dots),$$

где σ пробегает $\Sigma \setminus 0$ и β_σ — элементы из T , причем для каждого β только конечное число β_σ отлично от единицы. Умножение таких элементов определяется покомпонентно.

Упорядоченность новой полугруппы определяется так: $\beta > \gamma$, если для того первого σ (в смысле упорядоченности в Σ), для которого $\beta_\sigma \neq \gamma_\sigma$, будет $\beta_\sigma > \gamma_\sigma$. К полученной полугруппе присоединяется 0, архимедовским классом которого будет 0 упорядоченного множества. Если отбросить единицу, то получаем упорядоченную полугруппу. Легко проверить, что построенная полугруппа является целой упорядоченной полугруппой. Два элемента относятся к одному архимедовскому классу тогда и только тогда, если у них наименьшие индексы, для которых соответствующая

компонента отлична от единицы, совпадают. Теперь ясно, что множеством архимедовских классов построенной упорядоченной полугруппы будет множество Σ .

ТЕОРЕМА 10. *В целой упорядоченной полугруппе P всякий выпуклый простой идеал является объединением выпуклого множества архимедовских классов. Обратно, в P всякое объединение выпуклого множества архимедовских классов, содержащего нулевой класс, является выпуклым простым идеалом.*

Пусть A — выпуклый простой идеал. Допустим, что существуют элементы α и β , принадлежащие одному классу и такие, что $\alpha \in A$, $\beta \notin A$. Тогда обязательно $\beta > \alpha$. Существует, однако, такое n , что $\beta^n \leq \alpha$ и поэтому $\beta^n \in A$. Это противоречит простоте идеала A . Так как A — выпуклый идеал, он должен состоять из выпуклого множества архимедовских классов.

Объединение B выпуклого множества архимедовских классов, содержащего нулевой класс, будет выпуклым множеством и поэтому, по теореме 2, идеалом. Возьмем два элемента вне B . Их произведение будет лежать в архимедовском классе одного из них и поэтому также вне B , т. е. B является простым. Теорема доказана.

Упорядоченная полугруппа без делителей нуля называется *архимедовской снизу*, если она кроме классов нуля и единицы содержит не больше одного архимедовского класса, состоящего из целых элементов.

Упорядоченная полугруппа называется *архимедовской сверху*, если она содержит не больше одного архимедовского класса, состоящего из нецелых элементов.

Упорядоченная полугруппа называется архимедовской, если она является архимедовской сверху и снизу.

ТЕОРЕМА 11. *Для того чтобы целая упорядоченная полугруппа P была архимедовской, необходимо и достаточно, чтобы она не содержала нетривиальных (отличных от 0 и P) выпуклых простых идеалов.*

Теорема следует из теоремы 10 и определения архимедовской упорядоченной полугруппы.

Теперь мы будем рассматривать целые архимедовские упорядоченные полугруппы. Элементы α и β ($\alpha \geq \beta$) такой полугруппы называются *близкими*, если для любого натурального числа n выполняется соотношение

$$\alpha^n \geq \beta^n \geq \alpha^{n+1}.$$

Очевидно, что отношение близости двух элементов рефлексивно и симметрично. Покажем, что это отношение также транзитивно. Пусть α и β близки и β и γ близки, причем $\alpha > \beta > \gamma$. Допустим, что α и γ не близки, т. е. существует такое n , что $\alpha^{n+1} > \gamma^n$. Тогда $\alpha^{2n+2} > \gamma^{2n}$. Но, в силу близости β и γ , $\gamma^{2n} \geq \beta^{2n+1}$ и, в силу близости β и α , $\beta^{2n+1} \geq \alpha^{2n+2}$, т. е. $\alpha^{2n+2} \leq \gamma^{2n}$. Мы пришли к противоречию. Следовательно, целая архимедовская упорядоченная полугруппа распадается на непересекающиеся классы близких элементов. Легко видеть, что эти классы являются выпуклыми множествами и что множество этих классов можно естественно упорядочить аналогично тому, как мы упорядочивали множество архимедовских классов.

ТЕОРЕМА 12. Разбиение целой архимедовской упорядоченной полугруппы P на классы близких элементов определяет в P отношение конгруэнтности, фактор-полугруппа по которому изоморфна подполугруппе мультипликативной полугруппы неотрицательных действительных чисел. Для любого упорядоченного множества существует целая архимедовская упорядоченная полугруппа, для которой это множество является одним из классов близких элементов.

Выберем в P какой-нибудь ненулевой элемент α . Поставим в соответствие всякому элементу $\beta \neq 0$ из P следующим образом определенное действительное число. К верхнему классу сечения в области рациональных чисел отнесем те рациональные числа $\frac{m}{n}$, для которых $\beta^n > \alpha^m$, к нижнему классу — те рациональные числа $\frac{m}{n}$, для которых $\beta^n \leq \alpha^m$, а также нуль и отрицательные рациональные числа. Легко видеть, что оба класса не пусты. Действительно, если, например, $\alpha > \beta$, то, в силу архимедовости полугруппы, существует такое n , что $\alpha^n < \beta$. Тогда число 1 относится к нижнему классу, а число n — к верхнему.

Покажем, что если $\frac{m}{n}$ относится к верхнему классу, а $\frac{p}{q}$ — к нижнему, то $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$. По определению верхнего и нижнего классов, $\beta^n > \alpha^m$ и $\beta^q \leq \alpha^p$. Отсюда следует

$$\beta^{mq} \leq \alpha^{mp} < \beta^{np},$$

т. е. $\beta^{mq} < \beta^{np}$, а поэтому $mq > np$ и $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$.

Свойства сечения действительно выполняются.

Покажем, что одинаковые действительные числа ставятся в соответствие близким элементам и только им.

Пусть элементам β и γ поставлено в соответствие число n , причем $\beta > \gamma$. Допустим, что элементы β и γ не близки. Тогда существует такое n , что $\beta^{n+1} > \gamma^n$. Для числа r должно существовать такое рациональное число $\frac{p}{q}$, что

$$\frac{p}{q} \leq r < \frac{p(n+1)}{qn}.$$

Из определения числа r вытекает, что

$$\beta^q \leq \alpha^p, \quad \beta^{qn} > \alpha^{p(n+1)}.$$

Используя неравенства

$$\alpha^p \geq \beta^q \text{ и } \beta^{n+1} > \gamma^n,$$

получим:

$$\alpha^{p(n+1)} \geq \beta^{q(n+1)} > \gamma^{qn}.$$

Неравенства

$$\beta^{qn} > \alpha^{p(n+1)} > \gamma^{qn}$$

означают, что рациональное число $\frac{p(n+1)}{qn}$, которое, как мы знаем,

больше r , будет меньше действительного числа, определяемого элементом γ , что является противоречием.

Пусть теперь элементы β и γ ($\beta > \gamma$) близки. Чтобы элементам β и γ могли соответствовать различные числа, необходимо, чтобы существовали такие m и n , что

$$\beta^n \geq \alpha^m \geq \gamma^n.$$

Покажем, что β и γ определяют и в настоящем случае одно и то же число, а именно $\frac{m}{n}$. Докажем это для γ . Очевидно, что $\frac{m}{n}$ относится к нижнему классу сечения, определяющего число, соответствующее γ . Убедимся, что всякое большее рациональное число относится уже к верхнему классу. Это будет так, если для любого натурального k число $\frac{m(k+1)}{nk}$ относится к верхнему классу. Из близости β и γ следует близость β^n и γ^n , а тогда и близость α^m и γ^n , последняя же означает, что при любом k

$$\gamma^{nk} > \alpha^{m(k+1)}.$$

Этим показано, что число $\frac{m(k+1)}{nk}$ относится к верхнему классу сечения, соответствующего элементу γ .

Доказательство того, что элементу β соответствует число $\frac{m}{n}$, проводится таким образом. Если $\beta^n = \alpha^m$, то $\frac{m}{n}$ относится к нижнему классу сечения. Любое большее рациональное число относится уже к верхнему классу, так как при любом k

$$\beta^{nk} > \alpha^{m(k+1)}.$$

Если же $\beta^n > \alpha^m$, то, очевидно, $\frac{m}{n}$ относится к верхнему классу. В этом случае можно показать, что любое меньшее рациональное число относится уже к нижнему классу.

Покажем, что если элементам β и γ соответствуют действительные числа r и s , то элементу $\beta\gamma$ соответствует число $r + s$. Пусть $\frac{m}{n}$ относится к нижнему классу числа r , а $\frac{p}{q}$ — к нижнему классу числа s . Выведем отсюда, что число

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + np}{nq}$$

относится к нижнему классу числа t , соответствующего $\beta\gamma$. По определению чисел r и s ,

$$\beta^n \leq \alpha^m, \quad \gamma^q \leq \alpha^p.$$

Из этого следует, что

$$\beta^{nq} \leq \alpha^{mp}, \quad \gamma^{nq} \leq \alpha^{np}.$$

Пусть, например, $\beta\gamma \geq \gamma\beta$. Тогда легко проверить, что при любом нату-

ральном k

$$(\beta\gamma)^k \geq \beta^k \gamma^k.$$

Отсюда

$$(\beta\gamma)^{nq} \leq \beta^{nq} \gamma^{nq} \leq \alpha^{mq+np},$$

т. е.

$$\frac{mq+np}{nq} < t.$$

Если же $\beta\gamma \leq \gamma\beta$, то

$$(\beta\gamma)^k \leq (\gamma\beta)^k \leq \gamma^k \beta^k,$$

откуда

$$(\beta\gamma)^{nq} \leq \gamma^{nq} \beta^{nq} \leq \alpha^{np+mq}.$$

Проводя такое же рассуждение для верхних классов, получим, что $r+s=t$.

Выберем какое-нибудь действительное число a , $0 < a < 1$, и поставим в соответствие всякому $\beta \neq 0$ из P число a^r , где r — ранее определенное для β число; элементу 0 из P поставим в соответствие число 0 . Произведению элементов соответствует здесь произведение чисел, и порядок сохраняется. Теперь ясно, что разбиение P на классы близких элементов действительно определяет в P отношение конгруэнтности и что фактор-полугруппа по этому отношению конгруэнтности изоморфна подполугруппе мультипликативной полугруппы неотрицательных действительных чисел.

Пусть теперь задано упорядоченное множество Σ . Образует, как и в теореме 9, прямое произведение $P = \prod_{\sigma \in \Sigma} P_\sigma$ по множеству Σ упорядоченных полугрупп P_σ , каждая из которых изоморфна введенной там полугруппе T . Однако упорядочим P по-новому. Обозначим через α_σ элемент из P , σ -я компонента которого равна α , а все остальные компоненты равны единице. Тогда всякий элемент из P , кроме единицы, однозначно записывается в виде

$$\alpha_{\sigma_1}^{n_1} \dots \alpha_{\sigma_k}^{n_k}$$

(все n_i положительны). Нужная нам полугруппа Φ будет $P \setminus 1$ с присоединенным нулем. Назовем длиной элемента $\alpha_{\sigma_1}^{n_1} \dots \alpha_{\sigma_k}^{n_k}$ число $n_1 + \dots + n_k$. Пусть β и γ — ненулевые элементы из Φ . Мы считаем, что $\beta > \gamma$, если длина элемента β меньше длины γ , или, при равных длинах, если для первого σ , при котором $\beta_\sigma \neq \gamma_\sigma$, будет $\beta_\sigma > \gamma_\sigma$. Можно проверить, что Φ является целой архимедовской упорядоченной полугруппой. Элементами длины 1 будут элементы вида α_σ и только они. Очевидно, что элементы длины 1 близки между собой и не близки ни к какому элементу большей длины. Кроме того, $\alpha_\sigma < \alpha_\tau$, если $\sigma < \tau$ в Σ . Следовательно, Φ является такой целой архимедовской упорядоченной полугруппой, которая имеет Σ в качестве одного из классов близких элементов. Теорема доказана.

Заметим, что в работе Алимова ⁽¹⁾ рассматриваются произвольные архимедовские упорядоченные полугруппы (без нуля), в которых никакие два различных элемента не являются близкими. Там доказывается, что

такие полугруппы изоморфны подполугруппам мультипликативной группы действительных чисел. Приводится также пример архимедовской упорядоченной полугруппы, в которой существуют близкие элементы, не совпадающие друг с другом. Можно было бы, следовательно, в теореме 12 доказать лишь, что разбиение на классы близких элементов есть отношение конгруентности, в фактор-полугруппе по которому нет пар различных близких элементов, а затем сослаться на теорему Алимова.

ТЕОРЕМА 13. *Если в упорядоченной полугруппе P выполнено условие обрыва убывающих цепей для выпуклых левых идеалов, то любой идеал полугруппы P , содержащийся в M , нильпотентен.*

Пусть A является левым идеалом полугруппы P и $A \subset M$. Рассмотрим последовательность

$$\overline{A}, \overline{A^2}, \dots, \overline{A^n}, \dots$$

выпуклых замыканий степеней идеала A . Здесь $\overline{A^n}$ означает совокупность таких β из P , для которых существуют такие $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$, что $\beta \leq \alpha_1 \dots \alpha_n$. Легко видеть, что эта последовательность является убывающей последовательностью выпуклых левых идеалов полугруппы P . Поэтому должно существовать такое n , что

$$\overline{A^n} = \overline{A^{n+1}}.$$

Это значит, что для любых $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$ должны существовать такие $\alpha'_1, \dots, \alpha'_{n+1} \in A$, что

$$\alpha_1 \dots \alpha_n \leq \alpha'_n \dots \alpha'_{n+1}.$$

Обозначим $\overline{A^n} = B$ и покажем, что $B = \overline{B^2}$. Именно, пусть $\beta \in B$. Тогда

$$\beta \leq \alpha_1 \dots \alpha_n \leq \alpha'_1 \dots \alpha'_{n+1} \leq \alpha'_1 \alpha''_2 \dots \alpha''_{n+2}$$

и т. д., т. е. существует произведение $2n$ элементов из A или двух элементов из $\overline{A^n} = B$, большее или равное β .

Покажем, что $B = 0$. Допустим, что

$$B = \overline{B^2} \neq 0.$$

Пусть Γ будет минимальным среди выпуклых левых идеалов Δ , обладающих свойством $B\Delta \neq 0$. Такие Δ существуют, так как $B^2 \neq 0$, а минимальный среди них существует в силу условия минимальности. Тогда существует такое $\gamma \in \Gamma$, что $\overline{B\gamma} \neq 0$. $\overline{B\gamma}$ является выпуклым левым идеалом, $\overline{B\gamma} \subset \Gamma$ и $B\overline{B\gamma} \neq 0$, так как для любого $B\beta$ существуют такие β_1 и β_2 , что

$$\beta_1 \beta_2 \gamma \geq \beta \gamma.$$

Отсюда следует, что $\overline{B\gamma} = \Gamma$. В частности, должно существовать такое $\beta \in B$, что $\beta \gamma \geq \gamma$. Так как $B \subset \overline{A}$ и $\overline{A} \subset M$ (M выпукло), то $\beta \in M$. Так как $\gamma \neq 0$, то $\beta \neq 0$ и поэтому $\beta^2 < \beta$. Неравенство $\beta \gamma \geq \gamma$ дает $\beta^2 \gamma \geq \beta \gamma$, а $\beta^2 < \beta$ дает $\beta^2 \gamma \leq \beta \gamma$, следовательно,

$$\beta^2 \gamma = \beta \gamma.$$

Но в силу $\beta^2 \neq \beta$ должно быть

$$\beta^2 \gamma = \beta \gamma = 0.$$

Теперь $\beta \gamma \geq 0$ приводит к $\gamma = 0$, что противоречит выбору γ . Этим теорема доказана.

Поступило
23.XII.1955

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А л и м о в Н. Г., Об упорядоченных полугруппах, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 14 (1950), 569—576.
-

М. А. ЕВГРАФОВ

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым)

В работе получается аналог теории Фредгольма для линейных операторов в пространстве аналитических функций, регулярных при $|z_i| < r$, $i = 1, 2, \dots, k$, а для некоторого класса операторов (несамосопряженных) — и спектральное разложение.

§ 1. Изучаемое пространство и его основные свойства

В работах автора ⁽¹⁾, ⁽²⁾ и ⁽³⁾ были решены некоторые вопросы теории линейных операторов в пространстве аналитических функций, регулярных в круге $|z| < 1$, в котором сходимостью является равномерная сходимость в любом внутреннем круге. Это пространство является одним из наиболее простых линейных топологических пространств со счетным базисом. В силу многих хороших свойств этого пространства, оно является удобной моделью для изучения вопросов полноты и разложения в ряды. Однако это пространство хорошо моделирует лишь тот случай, когда основной базис допускает естественную однопараметрическую нумерацию. Случай же, когда естественной нумерацией основного базиса является нумерация многопараметрическая, моделируется плохо. В целях получения более подходящей модели, результаты, сформулированные в работах ⁽²⁾ и ⁽³⁾, переносятся в настоящей работе на случай многих переменных.

Пространством \mathfrak{U}_R^k мы будем называть множество аналитических функций k переменных z_1, z_2, \dots, z_k , регулярных при $|z_i| < R$, $i = 1, 2, \dots, k$, в котором сходимость определена как равномерная сходимость при $|z_i| \leq r$, $i = 1, 2, \dots, k$, при любом $r < R$. Пространство \mathfrak{U}_1^k мы будем обозначать для краткости просто \mathfrak{U}^k .

Пространством $\bar{\mathfrak{U}}_R^k$ мы будем называть множество аналитических функций k переменных z_1, z_2, \dots, z_k , регулярных при $|z_i| \geq R$, $i = 1, 2, \dots, k$, в котором сходимость определена как равномерная сходимость при $|z_i| \geq r$, $i = 1, 2, \dots, k$, для какого-либо $r < R$.

Систему функций $\{\varphi_{m_1, \dots, m_k}(z_1, \dots, z_k)\}$, принадлежащих \mathfrak{U}_R^k , мы назовем базисом в \mathfrak{U}_R^k , если любая $F \in \mathfrak{U}_R^k$ может быть разложена (и притом единственным образом) в ряд

$$F(z_1, \dots, z_k) = \sum_{m_1, \dots, m_k=0}^{\infty} a_{m_1, \dots, m_k} \varphi_{m_1, \dots, m_k}(z_1, \dots, z_k),$$

сходящийся в смысле топологии \mathfrak{U}_R^k .

Простейшим базисом в \mathfrak{U}_R^k является система степеней

$$\{z_1^{m_1} z_2^{m_2} \dots z_k^{m_k}\}, \quad m_1, \dots, m_k = 0, 1, 2, \dots$$

Систему функций $\{\psi_{m_1, \dots, m_k}(z_1, \dots, z_k)\}$, принадлежащих $\overline{\mathfrak{U}}_R^k$, мы назовем биортогональной с системой функций $\{\varphi_{m_1, \dots, m_k}(z_1, \dots, z_k)\}$, принадлежащих \mathfrak{U}_R^k , если

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi i)^k} \int_{|z_i|=r} \dots \int \varphi_{m_1, \dots, m_k}(z_1, \dots, z_k) \psi_{n_1, \dots, n_k}(z_1, \dots, z_k) dz_1, \dots, dz_k = \\ = \begin{cases} 1, & \text{если } m_i = n_i, i = 1, 2, \dots, k, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases} \end{aligned}$$

Системой, биортогональной с системой степеней, является система

$$\{z_1^{-m_1-1} z_2^{-m_2-1} \dots z_k^{-m_k-1}\}, \quad m_1, \dots, m_k = 0, 1, 2, \dots$$

Приведем ряд свойств пространства \mathfrak{U}_R^k , которые доказываются почти дословно так же, как это было сделано в работе (1) для случая $k = 1$.

1°. Любой линейный функционал $l(F)$ в \mathfrak{U}_R^k может быть представлен в виде:

$$l(F) = \frac{1}{(2\pi i)^k} \int_{|z_i|=r} \dots \int F(z_1, \dots, z_k) G(z_1, \dots, z_k) dz_1 \dots dz_k,$$

где $G \in \overline{\mathfrak{U}}_R^k$.

2°. Слабая сходимость в \mathfrak{U}_R^k эквивалентна сходимости по топологии. Для сокращения записи примем обозначения:

$$F(z_1, \dots, z_k) = F(z), \quad a_{m_1, \dots, m_k} = a_m, \quad z_1^{m_1} \dots z_k^{m_k} = z^m,$$

$$z_1^{-m_1-1} \dots z_k^{-m_k-1} = z^{-m-1}$$

и т. д.

Линейные операторы в \mathfrak{U}_R^k или в $\overline{\mathfrak{U}}_R^k$ будем определять, задавая функции

$$\varphi_m(z) = Az^m, \quad m_i = 0, 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

или, соответственно, функции

$$\psi_m(z) = Bz^{-m-1}, \quad m_i = 0, 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Если A — линейный оператор в \mathfrak{U}_R^k , определенный равенствами

$$Az^m = \varphi_m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} z^n,$$

то через A' мы будем обозначать линейный оператор в $\overline{\mathfrak{U}}_R^k$, определен-

ные равенствами

$$A'z^{-m-1} = \psi_m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m} z^{-n-1}.$$

В дальнейшем для нас будут наиболее интересны операторы, удовлетворяющие условию

А) Оператор A переводит \mathfrak{U}_R^k в \mathfrak{U}_R^k при любом R , $R_0 < R \leq R_1$.

Отметим ряд простейших свойств таких операторов.

ТЕОРЕМА 1. Оператор A , удовлетворяющий условию А), может быть представлен в виде:

$$AF = \frac{1}{(2\pi i)^k} \int \dots \int_{|\zeta_i|=r} A(z, \zeta) F(\zeta) d\zeta_1 \dots d\zeta_k, \quad (1)$$

где $A(z, \zeta)$ — аналитическая функция z и ζ , регулярная при $|z_i| < r$, $|\zeta_i| > r$, при любом r , $R_0 < r \leq R_1$.

Доказательство. Пусть $\varphi_m(z) = Az^m$. Рассмотрим последовательность

$$A_p(z, \zeta) = \sum_{n \leq p} \varphi_n(z) \zeta^{-n-1}$$

при $|z_i| \leq \rho$, $|\zeta_i| \geq r$, $R_0 < \rho < r \leq R_1$. Для любой $F \in \mathfrak{U}_r^k$

$$\frac{1}{(2\pi i)^k} \int \dots \int_{|\zeta_i|=r} A_p(z, \zeta) F(\zeta) d\zeta_1 \dots d\zeta_k \rightarrow AF, \quad \min p_i \rightarrow \infty,$$

равномерно по z при $|z_i| \leq \rho$. Отсюда, в силу свойства 2^0 , получаем утверждение теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Если оператор A удовлетворяет условию А), то оператор A' переводит $\bar{\mathfrak{U}}_R^k$ в $\bar{\mathfrak{U}}_R^k$ при любом R , $R_0 < R \leq R_1$, и может быть представлен в виде:

$$A'F = \frac{1}{(2\pi i)^k} \int \dots \int_{|\zeta_i|=r} A(\zeta, z) F(\zeta) d\zeta_1 \dots d\zeta_k, \quad (2)$$

где $A(z, \zeta)$ — та же функция, что и в теореме 1.

Доказательство. Ясно, что оператор, определенный формулой (2), действительно переводит $\bar{\mathfrak{U}}_R^k$ в $\bar{\mathfrak{U}}_R^k$ при $R_0 < R \leq R_1$. Остается проверить, что он совпадает с A' . Полагая

$$A(z, \zeta) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{p,n} z^p \zeta^{-n-1},$$

получаем:

$$Az^m = \sum_{p=0}^{\infty} a_{p,m} z^p, \quad A'z^{-m-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} z^{-n-1},$$

то и доказывает наше утверждение.

В заключение отметим два простейших критерия базиса.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\varphi_m(z) \in \mathcal{H}_R^k$, $\{\varphi_m(z)\}$ — система, биортогональная с системой $\{\psi_m(z)\}$, и все $\psi_m(z)$ регулярны при $|z_i| \geq R_0$, $R_0 < R$. Если ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m(z) \psi_m^*(\zeta) \quad (3)$$

при $|\zeta_i| \geq r$, $|z_i| \leq \rho(r)$ равномерно сходится по z и ζ к $\frac{1}{(\zeta_1 - z_1) \dots (\zeta_k - z_k)}$ и $\rho(r) \rightarrow R$ при $r \rightarrow R$, то система $\{\varphi_m(z)\}$ образует базис в \mathcal{H}_R^k . Если

$$\varphi_m(z) = \sum_{n \geq m} a_{m,n} z^n, \quad a_{m,m} = 1$$

$n \geq m$ означает, что $n_1 \geq m_1, \dots, n_k \geq m_k$), то условие относительно суммы ряда (3) можно отбросить: в этом случае ряд (3) не может сходиться ни к какой другой сумме.

Доказательство. Интегрируя равенство

$$\frac{F(\zeta)}{(\zeta_1 - z_1) \dots (\zeta_k - z_k)} = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m(z) \psi_m(\zeta) F(\zeta)$$

почленно, получаем, что любая $F \in \mathcal{H}_R^k$ разлагается в ряд по $\varphi_m(z)$. Единственность разложения следует из одного лишь существования биортогональной системы. Для доказательства того, что в случае

$$\varphi_m(z) = \sum_{n \geq m} a_{m,n} z^n, \quad a_{m,m} = 1,$$

можно отбросить условие на сумму ряда (3), заметим, что в этом случае биортогональной системой является система многочленов от $\frac{1}{z_1}, \dots, \frac{1}{z_k}$ с коэффициентом при z^{-m-1} , равным единице, содержащих лишь члены $-n-1$, $n \leq m$. Поэтому, полагая

$$P(z, \zeta) = \frac{1}{(\zeta_1 - z_1) \dots (\zeta_k - z_k)} - \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m(z) \psi_m(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m p_m(\zeta),$$

мы получили бы

$$\frac{1}{(2\pi i)^k} \int \dots \int_{|z_i|=r} P(z, \zeta) \psi_m(z) dz_1 \dots dz_k = \psi_m(\zeta) - \psi_m(\zeta) = 0,$$

т. е.

$$\sum_{n \leq m} \psi_{m,n} p_n(\zeta) = 0, \quad m_i = 0, 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

что возможно лишь когда все $p_m(\zeta)$ равны нулю.

Тем самым теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. Если A — оператор, имеющий в \mathfrak{U}_R^k обратный, и система $\{\varphi_m(z)\}$ образует базис в \mathfrak{U}_R^k , то и система $\{\varphi_m^{(1)}(z)\}$, $\varphi_m^{(1)} = A\varphi_m$, образует базис в \mathfrak{U}_R^k .

Доказательство. Применяя оператор A к обеим сторонам равенства

$$F = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \varphi_m(z),$$

получаем наше утверждение, так как уравнение $AF = G$ однозначно разрешимо в \mathfrak{U}_R^k .

§ 2. Аналог теории Фредгольма

Как и в случае $k=1$, построение фредгольмовой теории основано на следующей простой лемме.

ЛЕММА. Пусть линейный оператор A в \mathfrak{U}_R^k определен равенствами:

$$Az^m = \varphi_m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{m,n} z^n$$

и пусть

$$\sup_{R_1 < r < R} \sup_{m \geq 0} \sum_{n=0}^{\infty} |\varepsilon_{m,n}| r^{n_1 + \dots + n_k - m_1 - \dots - m_k} = \varepsilon_0. \quad (1)$$

Тогда оператор $A + \lambda E$ (E — единичный оператор) имеет в \mathfrak{U}_R^k обратный для любого λ , $|\lambda| > \varepsilon_0$.

Доказательство. Докажем, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{A^n F}{\lambda^{n+1}}, \quad A^0 = E, \quad (2)$$

при $|\lambda| > \varepsilon_0$ сходится в \mathfrak{U}_R^k для любой $F \in \mathfrak{U}_R^k$. В самом деле, положим

$$A^n F = \sum_{p=0}^{\infty} a_p^{(n)} z^p, \quad g_n(r) = \sum_{p=0}^{\infty} |a_p^{(n)}| r^{p_1 + \dots + p_k}.$$

Так как

$$A^{n+1} F = A \cdot A^n F = \sum_{p=0}^{\infty} a_p^{(n)} \varphi_p(z) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p^{(n)} z^p \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon_{p,s} z^{s-p},$$

то мы получаем:

$$g_{n+1}(r) \leq \varepsilon_0 g_n(r), \quad R_1 \leq r \leq R.$$

Значит, при любом r , $R_1 \leq r < R$,

$$\max_{|z| \leq r} \left| \frac{A^n F}{\lambda^{n+1}} \right| \leq \frac{\varepsilon_0^n}{|\lambda|^{n+1}} g_0(r),$$

что и доказывает сходимость ряда (2).

Нетрудно проверить, что оператор

$$A_1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}$$

действительно является обратным к $A + \lambda E$ и что он непрерывен в \mathfrak{A}_R^k .

С помощью леммы легко доказывается основной результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть A — оператор в \mathfrak{A}^k , определенный равенствами

$$Az^m = \varphi_m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{m,n} z^n,$$

и пусть существует такое число α , $0 < \alpha < 1$, что

$$\sup_{\alpha \leq r < 1} \lim_{\max m_i \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} |\varepsilon_{m,n}| r^{n_1 + \dots + n_k - m_1 - \dots - m_k} = \varepsilon_1. \quad (3)$$

Тогда для операторного уравнения $(A + \lambda E)F = G$ при $|\lambda| > \varepsilon_1$ справедливы все теоремы Фредгольма.

Доказательство. Заметим, прежде всего, что в силу теоремы 4 § 1, наличие в \mathfrak{A}_R^k оператора, обратного к $A + \lambda E$, эквивалентно тому, что система $\{\lambda z^m + \varphi_m(z)\}$ образует базис в \mathfrak{A}_R^k . Кроме того заметим, что если система $\{\lambda z^m + \varphi_m(z)\}$ образует базис в \mathfrak{A}_r^k при любом r , $r < R$, то она образует базис и в \mathfrak{A}_R^k . Выберем какие-либо числа $\delta > 0$, $\alpha < r_0 < 1$, где r_0 сколь угодно близко к единице, и возьмем число M_0 настолько большим, чтобы

$$\sup_{\alpha_1 \leq r \leq r_0} \sup_{\max m_i \geq M_0} \sum_{n=0}^{\infty} |\varepsilon_{m,n}| r^{n_1 + \dots + n_k - m_1 - \dots - m_k} < \varepsilon_1 (1 + \delta).$$

Оператор A_0 , определенный равенствами

$$A_0 z^m = \varphi_m^{(0)}(z) = \begin{cases} 0, & \max m_i < M_0, \\ \varphi_m(z), & \max m_i \geq M_0, \end{cases}$$

удовлетворяет условиям леммы с $\varepsilon_0 < \varepsilon_1 (1 + \delta)$. Это значит, что система $\{\lambda z^m + \varphi_m^{(0)}(z)\}$ образует базис в \mathfrak{A}_r^k при любом r , $\alpha_1 \leq r \leq r_0$. Но задача о разложении функции в ряд по функциям системы $\{\lambda z^m + \varphi_m(z)\}$ легко сводится к задаче о разложении в ряд по функциям системы $\{\lambda z^m + \varphi_m^{(0)}(z)\}$ и к конечным алгебраическим операциям. В самом деле, обозначая через $\{\psi_m^{(0)}(z)\}$ систему, биортогональную с системой $\{\lambda z^m + \varphi_m^{(0)}(z)\}$, и полагая

$$F(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (\lambda z^m + \varphi_m(z)), \quad F(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (\lambda z^m + \varphi_m^{(0)}(z)),$$

получаем для определения a_m систему уравнений:

$$b_n = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \Delta_{n,m},$$

$$\Delta_{n,m} = \frac{1}{(2\pi i)^k} \int \dots \int_{|z|=r} (\lambda z^m + \varphi_m(z)) \psi_n^{(z)}(z) dz_1 \dots dz_k.$$

Вопрос о разрешимости сводится к исследованию матрицы первых M_0^k уравнений. Таким образом, все свелось к конечномерному случаю, и, в силу того, что δ произвольно мало, а r_0 произвольно близко к единице, теорема доказана.

Заметим, что если мы потребуем от оператора A , чтобы

$$\lim_{\max m_i \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} |\varepsilon_{m,n}| r^{n_1+\dots+n_k-m_1-\dots-m_k} = 0, \quad \alpha \leq r < 1, \quad (4)$$

то получим, что теоремы Фредгольма будут справедливы для всех $\lambda \neq 0$. Условие (4) аналогично условию вполне непрерывности оператора A в нормированном пространстве.

Оператор, удовлетворяющий условию

$$Az^m = \varphi_m(z) = \sum'_{n \geq m} \varepsilon_{m,n} z^n \quad (5)$$

(штрих над знаком суммы означает, что член с $n = m$ в сумму не входит), мы будем называть оператором вольтерровского типа.

Если A — оператор вольтерровского типа, то уравнение

$$(A + \lambda E)F = 0$$

не имеет нетривиальных решений. Такие операторы часто встречаются в вопросах интерполяции.

Для решений уравнений $(E - A)F = G$, где A — оператор, удовлетворяющий условиям (4) и (5), имеет место следующая оценка.

ТЕОРЕМА 2. Пусть F — решение уравнения $(E - A)F = G$,

$$F(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m, \quad G(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m.$$

Полагая

$$g_0(r) = \sum_{m=0}^{\infty} |b_m| r^{m_1+\dots+m_k}, \quad \gamma_p(r) = \sup_{\max m_i \geq p} \sum'_{n \geq m} |\varepsilon_{m,n}| r^{n_1+\dots+n_k-m_1-\dots-m_k},$$

имеем:

$$\sum_{m=0}^{\infty} |a_m| r^{m_1+\dots+m_k} \leq g_0(r) \{1 + \gamma_1(r) + \gamma_1(r) \gamma_2(r) + \dots\}. \quad (6)$$

Доказательство. Положим

$$G_p(z) = A^p G = \sum_{m=0}^{\infty} b_m^{(p)} z^m, \quad g_p(r) = \sum_{m=0}^{\infty} |b_m^{(p)}| r^{m_1+\dots+m_k}.$$

Так как оператор A — вольтерровского типа, то после p -кратного приме-

нения этого оператора к функции G в степенной ряд получившейся функции войдут лишь члены $z_1^{m_1} \cdot z_2^{m_2} \dots z_k^{m_k}$, в которых хотя бы один из показателей m_i не меньше p . Поэтому

$$g_{p+1}(r) \leq \sum_{\max m_i \geq p} |b_m^{(p)}| \sum'_{n \geq m} |\varepsilon_{m,n}| r^{n_1 + \dots + n_k} =$$

$$= \sum_{\max m_i \geq p} |b_m^{(p)}| r^{m_1 + \dots + m_k} \sum'_{n \geq m} |\varepsilon_{m,n}| r^{n_1 + \dots + n_k - m_1 - \dots - m_k} \leq g_p(r) \gamma_p(r),$$

откуда и следует оценка (6).

Легко видеть, что теорема (2) допускает следующую интерпретацию.

Следствие. Пусть величины a_{m_1, m_2, \dots, m_k} удовлетворяют рекуррентному соотношению:

$$a_m = b_m + \sum'_{n \leq m} \alpha_{m,n} a_n, \quad m \geq 0.$$

Тогда

$$\sum_{m=0}^s |a_m| r^{m_1 + \dots + m_k} \leq g_s(r) \{1 + \gamma_1^{(s)}(r) + \dots + \gamma_1^{(s)}(r) \dots \gamma_s^{(s)}(r)\}, \quad (7)$$

где

$$g_s(r) = \sum_{m=0}^s |b_m| r^{m_1 + \dots + m_k},$$

$$\gamma_p^{(s)}(r) = \sup_{\max m_i \geq p} \sum'_{m \leq n \leq s} |\alpha_{n,m}| r^{n_1 + \dots + n_k - m_1 - \dots - m_k}$$

Оценка (7) имеет весьма общий характер.

§ 3. Спектральная теория операторов, отличающихся от диагонального на оператор вольтерровского типа

Для построения спектральной теории мы постараемся получить критерии, позволяющие утверждать, что система собственных функций некоторого класса операторов образует базис в \mathfrak{U}^k . Для этой цели мы используем критерий 4 § 1. Этот критерий предполагает знание оценок для системы собственных функций и для биортогональной системы, так что нашей ближайшей задачей является получение таких оценок.

Всюду в этом параграфе мы будем считать, что оператор A удовлетворяет условиям:

1. $Az^m = \lambda_m z^m + \varphi_m(z)$, $\varphi_m(z) = \sum'_{n \geq m} \varepsilon_{m,n} z^n$.
2. Оператор A переводит \mathfrak{U}_R^k в \mathfrak{U}_R^k в любом $R < 1$.
3. $\lambda_n \neq \lambda_m$ при $n \geq m$, $n \neq m$.

Задача о нахождении собственных функций такого оператора может быть приведена к решению уравнения вольтерровского типа.

ТЕОРЕМА 1. Собственная функция оператора A , отвечающая собственному значению λ_m , удовлетворяет уравнению $(E - A_m) u_m = z^m$, где A_m — оператор, определенный равенствами:

$$A_m z^p = \begin{cases} \sum'_{n \geq p} \frac{\varepsilon_{p,n}}{\lambda_m - \lambda_n} z^n, & p \geq m, \quad p \neq m, \\ 0 & \text{для других } p. \end{cases}$$

Доказательство. Условие $\lambda_m \cdot u_m = A u_m$ может быть записано в виде:

$$D u_m = B u_m, \quad D z^p = (\lambda_m - \lambda_p) z^p, \quad B z^p = \sum'_{n \geq p} \varepsilon_{p,n} z^n.$$

Так как разложение $u_m(z)$ мы можем предположить имеющим вид

$$u_m(z) = z^m + \sum'_{n \geq m} \alpha_n^{(m)} z^n,$$

то для определения $u_m(z)$ существенны лишь $D z^p$ и $B z^p$ при $p \geq m$, а остальные $D z^p$ и $B z^p$ можно задавать произвольно. В частности, можно положить $D_m z^p = D z^p$ при $p \geq m$, $p \neq m$, и $D_m z^p = z^p$ для всех остальных p , $B_m z^p = B z^p$ при $p \geq m$, $p \neq m$ и $B_m z^p = 0$ для всех остальных p . Тогда уравнение для $u_m(z)$ примет вид:

$$D_m u_m = z^m + B_m u_m,$$

или

$$(E - D_m^{-1} B) u_m = z^m.$$

Раскрывая $D_m^{-1} B_m z^p$, получаем наше утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Если ряд $Q_m(r)$,

$$Q_m(r) = 1 + \gamma_1^{(m)}(r) + \gamma_1^{(m)} \gamma_2^{(m)}(r) + \dots, \\ \gamma_q^{(m)}(r) = \sup_{\max p_i \geq q} \sum'_{n \geq p} \frac{|\varepsilon_{p,n}|}{|\lambda_m - \lambda_n|} r^{n_1 + \dots + n_k - m_1 - \dots - m_k},$$

сходится для всех $r < 1$, то для $u_m(z)$ имеет место оценка:

$$\max_{|z_i| \leq r} |u_m(z)| \leq r^{m_1 + \dots + m_k} Q_m(r). \quad (1)$$

Доказательство этой теоремы немедленно получается применением теоремы 2 § 2.

Через A' обозначим оператор в \mathfrak{U}^k , определенный равенствами

$$A' z^{-m-1} = \psi_m(z) = \lambda_m z^{-m-1} + \sum'_{n \leq m} \varepsilon_{n,m} z^{-n-1},$$

а через $v_m(z)$ — собственные функции этого оператора, отвечающие собственным значениям λ_m и начинающиеся с z^{-m-1} . Имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Система $\{v_m(z)\}$ является системой, биортогональной с системой $\{u_m(z)\}$.

Доказательство. Если не выполнено неравенство $n \geq m$, то в произведении $u_m(z) v_n(z)$ не будет члена $(z_1 \cdot z_2 \dots z_k)^{-1}$, так как ряд для $u_m(z)$ содержит лишь члены z^p с $p \geq m$, а ряд для $v_n(z)$ — члены z^{-p-1} с $p \leq n$. Поэтому если не выполнено неравенство $n \geq m$, то автоматически

$$\frac{1}{(2\pi i)^k} \int_{|z_i|=r} \dots \int u_m(z) v_n(z) dz_1 \dots dz_k = 1.$$

Далее, если $n = m$, то ряд для произведения $u_m(z) v_n(z)$ содержит лишь один член с $(z_1 \cdot z_2 \dots z_k)^{-1}$, причем коэффициент при нем равен единице. Поэтому

$$\frac{1}{(2\pi i)^k} \int_{|z_i|=r} \dots \int u_m(z) v_m(z) dz_1 \dots dz_k = 1.$$

Наконец, при $n \geq m$, $n \neq m$, имеем $\lambda_m u_m = A u_m$, $\lambda_n v_n = A' v_n$, откуда находим:

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_m - \lambda_n}{(2\pi i)^k} \int_{|z_i|=r} \dots \int u_m(z) v_n(z) dz_1 \dots dz_k = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^k} \int_{|z_i|=r} \dots \int (v_n A u_m - u_m A' v_n) dz_1 \dots dz_k. \end{aligned}$$

Легко проверить (используя, например, интегральное представление для AF), что правая часть равна нулю. Поскольку, в силу условия 3, $\lambda_n \neq \lambda_m$, получаем требуемое.

Для функций $v_m(z)$ имеют место утверждения, аналогичные теоремам 1 и 2.

ТЕОРЕМА 4. Собственная функция оператора A' , отвечающая собственному значению λ_m , удовлетворяет уравнению

$$(E - C_m) v_m = z^{-m-1},$$

где C_m — оператор, определенный равенствами:

$$C_m z^{-p-1} = \begin{cases} \sum'_{n \leq p} \frac{\varepsilon_{n,p}}{\lambda_n - \lambda_m} z^{-n-1}, & p \leq m, \quad p \neq m, \\ 0 & \text{для других } p. \end{cases}$$

Доказательство. Полагая

$$v_m = z^{-m-1} + \sum'_{n \leq m} \beta_n^{(m)} z^{-n-1},$$

как и при доказательстве теоремы 1, записываем уравнение

$$\lambda_m v_m = A' v_m$$

в виде

$$P_m v_m = R_m v_m + z^m,$$

где

$$P_m z^{-p-1} = \begin{cases} (\lambda_m - \lambda_p) z^{-p-1}, & p \leq m, \quad p \neq m, \\ z^{-p-1} & \text{для других } p, \end{cases}$$

$$R_m z^{-p-1} = \begin{cases} \sum'_{n \leq m} \varepsilon_{n,p} z^{n-1}, & p \leq m, \quad p \neq m, \\ 0 & \text{для других } p. \end{cases}$$

Отсюда находим:

$$(E - P_m^{-1} R_m) v_m = z^{-m-1}$$

и, раскрывая $P_m^{-1} R_m z^{-p-1}$, получаем утверждение теоремы.

Дословно повторяется и оценка.

ТЕОРЕМА 5. Для функций $v_m(z)$ — собственных функций оператора A' , отвечающих собственным значениям λ_m , — имеет место оценка:

$$\max_{|z_i| \geq \rho} |v_m(z)| \leq \rho^{-m_1 - \dots - m_k} Q_m^{(1)}, \quad \rho \leq 1, \quad (2)$$

где

$$Q_m^{(1)} = \rho^{-k} (1 + \gamma_1^{(m)} + \dots + \gamma_1^{(m)} \dots \gamma_m^{(m)}),$$

$$\gamma_q^{(m)} = \sup_{\max(p_i - n_i) \geq q} \sum'_{n \leq p} \frac{|\varepsilon_{n,p}|}{|\lambda_m - \lambda_n|}.$$

Оценки (1) и (2) в сочетании с теоремой 3 § 1 сразу же дают нам достаточные условия того, что система собственных функций оператора образует базис в \mathfrak{U}_r^k , $r < 1$.

ТЕОРЕМА 6. Если при любом $r < 1$

$$\overline{\lim}_{\max m_i \rightarrow \infty} \{Q_m(r) Q_m^{(1)}\}^{\frac{1}{m_1 + \dots + m_k}} \leq 1, \quad (3)$$

то система собственных функций оператора A образует базис в \mathfrak{U}_r^k , $r < 1$.

В общем виде условие (3) довольно трудно обозримо. В случае правильного роста λ_m (скажем, $\lambda_m = m_1^\alpha + \dots + m_k^\alpha$) оно несколько слабее условия

$$\lim_{\max m_i \rightarrow \infty} \frac{1}{|\lambda_m|} \sum'_{n \geq m} |\varepsilon_{n,m}| r^{n_1 + \dots + n_k - m_1 - \dots - m_k} = 0, \quad r < 1,$$

но не очень существенно.

После того как доказано, что система собственных функций оператора образует базис, легко получить для этого оператора спектральное разложение.

ТЕОРЕМА 7. При выполнении условий теоремы 6 оператор A может быть представлен в виде:

$$AF = \frac{1}{(2\pi i)^k} \int \dots \int_{|\zeta_i| = r} A(z, \zeta) F(\zeta) d\zeta_1 \dots d\zeta_k,$$

где

$$A(z, \zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m u_m(z) v_m(\zeta).$$

Доказательство. Поскольку $\{u_m(z)\}$ образует базис в \mathcal{U}^k , а $v_m(z)$ биортогональны с $u_m(z)$, то любая $F \in \mathcal{U}^k$ может быть разложена в ряд

$$F(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m u_m(z), \quad a_m = \frac{1}{(2\pi i)^k} \int_{|z_i|=\tau} \dots \int F(z) v_m(z) dz_1 \dots dz_k.$$

Но $Au_m = \lambda_m u_m$, следовательно,

$$AF = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m a_m u_m(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_m a_m u_m(z)}{(2\pi i)^k} \int_{|\zeta_i|=\tau} \dots \int F(\zeta) v_m(\zeta) d\zeta_1 \dots d\zeta_k,$$

откуда, меняя порядок суммирования и интегрирования, получаем наше утверждение.

Поступило
21. III. 1956

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Евграфов М. А., Метод близких систем в пространстве аналитических функций и его применение к интерполяции, Труды Моск. матем. общ., т. 5 (1956), 89—201.
- ² Евграфов М. А., Аналог теории Фредгольма для операторов в пространствах аналитических функций и обобщение теоремы Пуанкаре о разностных уравнениях, Доклады Ак. наук СССР, 101, № 4 (1955), 597—600.
- ³ Евграфов М. А., Спектральная теория операторов некоторого вида в пространстве аналитических функций, Доклады Ак. наук СССР, 105, № 4 (1955), 625—627.

Л. А. САХНОВИЧ

О ПРИВЕДЕНИИ ВОЛЬТЕРРОВСКИХ ОПЕРАТОРОВ К ПРОСТЕЙШЕМУ ВИДУ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым)

В работе приводится к простейшему виду определенный класс вольтерровских операторов. Проводится спектральный анализ операторов из этого класса. Полученные результаты прилагаются при доказательстве теорем единственности для систем дифференциальных уравнений.

Введение

В работе М. С. Лившица ⁽¹⁾ * было показано, что всякий оператор класса $i\Omega$, спектр которого сосредоточен в одной точке $\lambda = 0$, может быть приведен при помощи унитарного преобразования к «треугольному» виду:

$$Af = i \int_0^x f(t) \beta(t) Idt \beta(x) \quad (0 \leq x \leq l), \quad (1)$$

где $f(x) \in L_r^2[0, l]$ **, матрица $\beta(t)$ неотрицательна и $\text{Sp } \beta^2(x) = 1$, а I — диагональная матрица, на диагонали которой стоят либо $+1$, либо -1 .

В настоящей работе рассматривается вопрос о дальнейшем упрощении оператора (1) при помощи линейных (не обязательно унитарных) преобразований.

При некоторых дополнительных ограничениях, наложенных на матрицу $\beta^2(x)I$, устанавливается, что оператор A линейно эквивалентен оператору $I^{(m)}$, где $I^{(m)}$ определен на векторах из $L_r^2[0, b]$ формулой:

$$I^{(m)}\varphi = \left[i \int_0^x \varphi_1(t) dt, \dots, i \int_0^x \varphi_m(t) dt, 0, 0, \dots \right], \quad x \in [0, b].$$

Оператор $I^{(m)}$ представляет собой прямую сумму простейших операторов интегрирования.

* Мы предполагаем, что читатель знаком с основными результатами работы ⁽¹⁾.

** Под пространством L_r^2 мы будем понимать пространство вектор-функций $f(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_r(x)]$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \sum_{i=1}^r \int_0^l f_i(x) \overline{g_i(x)} dx.$$

В частности, получен следующий результат для интегральных операторов Вольтерра:

ТЕОРЕМА 1. Пусть ядро $K(x, y)$ оператора

$$Kf = i \int_0^x f(y) K(x, y) dy, \quad f(y) \in L^2[0, b], \quad (2)$$

удовлетворяет условиям:

1) $K(x, y)$ представляется в виде:

$$K(x, y) = \sum_{j=1}^r \varphi_j(x) \overline{\varphi_j(y)} \varepsilon_j \quad (r \leq \infty), \quad (3)$$

где функции $\varphi_j(x)$ линейно независимы, $\varepsilon_j = \pm 1$;

2) ряды

$$\sum_{j=1}^r |\varphi_j(x)|^2, \quad \sum_{j=1}^r |\varphi_j'(x)|^2, \quad \sum_{j=1}^r |\varphi_j''(x)|^2$$

сходятся равномерно;

$$3) K(x, x) = \sum_{j=1}^r |\varphi_j(x)|^2 \varepsilon_j \neq 0;$$

$$4) \varphi_1(x) \neq 0.$$

Тогда оператор K линейно эквивалентен простейшему оператору интегрирования $I^{(1)}$, определенному формулой:

$$I^{(1)}\varphi = i \int_0^x \varphi(t) dt, \quad \varphi(x) \in L^2[0, b].$$

Если ядро $K(x, y)$ конечно-парное, т. е. в разложении (3) $r < \infty$, то для справедливости теоремы 1 достаточно потребовать равномерной ограниченности по x функций $\varphi_j''(x)$ и выполнения неравенства $K(x, x) \neq 0$.

Отметим, что оператор (1) имеет систему вложенных друг в друга инвариантных подпространств H_α , где H_α состоит из всех вектор-функций, обращающихся в нуль на интервале $[0, \alpha]$. Естественно возникает вопрос: существуют ли у оператора (1) другие инвариантные подпространства, отличные от H_α ?

Следуя М. С. Бродскому, мы будем называть оператор *одноклеточным*, если, каковы бы ни были инвариантные подпространства H_1 и H_2 оператора A , выполняется одно из соотношений: $H_1 \in H_2$, $H_2 \in H_1$.

Из теоремы 1 вытекает, что оператор K [см. (2)] является одноклеточным, т. е. что оператор K не имеет инвариантных подпространств, отличных от H_α .

Доказательство того, что оператор K является одноклеточным, когда ядро $K(x, y)$ неотрицательное и конечно-парное, было ранее другим методом получено М. С. Бродским. В частности, он показал, что оператор интегрирования

$$I^{(1)}\varphi = i \int_0^x \varphi(t) dt, \quad \varphi(t) \in L^2[0, l], \quad (4)$$

является одноклеточным, но не дал условий линейной эквивалентности операторов K [см. (2)] и $I^{(1)}$ [см. (4)].

В качестве приложений полученных результатов в настоящей работе доказываются некоторые теоремы единственности для обратных задач, связанных с системами дифференциальных уравнений:

$$\frac{dw(x, \lambda)}{dx} = i\lambda w(x, \lambda) \beta^2(x) I \quad (0 \leq x \leq l). \quad (5)$$

К виду (5) легко сводятся следующие системы (см. § 4):

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dt} &= \lambda [b(t) \xi_1 + c(t) \xi_2], \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= -\lambda [a(t) \xi_1 + b(t) \xi_2] \end{aligned} \quad (6)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} &= \lambda \psi + a(x) \varphi + b(x) \psi, \\ \frac{d\psi}{dx} &= -\lambda \varphi + b(x) \varphi - a(x) \psi. \end{aligned} \quad (7)$$

Аналитические свойства матрицы монодромии системы (6) были изучены М. Г. Крейном ⁽²⁾; им же для систем (6) и (7) была решена обратная задача.

Система (7) также рассматривалась М. Г. Крейном ⁽³⁾ в связи с континуальным обобщением ортогональных полиномов.

Заметим, что при $b(x) \equiv 0$ система (7) легко сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка. В этом случае получаются ранее известные в теории обратных задач результаты [см. (4)].

§ 1

1. Рассмотрим оператор

$$Af = i \int_0^x f(t) \beta(t) I dt \beta(x) \quad (0 \leq x \leq l). \quad (1.1)$$

В дальнейшем, если не будет оговорено особо, будем считать, что матрица $\beta^2(x) I$ удовлетворяет следующим условиям регулярности (условия (I)):

а) существует такая матрица $V(x)$, что

$$V(x) \beta^2(x) IV(x)^{-1} = D(x) \quad (0 \leq x \leq l),$$

где $D(x)$ — вещественная диагональная матрица, все элементы которой, отличные от нуля, равны между собой;

б) $\sup_{0 \leq x \leq l} \max \{\|V(x)\|, \|V'(x)\|, \|V''(x)\|, \|V^{-1}(x)\|, \|D(x)\|, \|D'(x)\|\} \leq M$;

в) $\text{rang } D(x) \neq 0 \quad (0 \leq x \leq l)$.

Пусть

$$h = [h_1, h_2, \dots, h_r] \quad \left(\sum_{j=1}^r |h_j|^2 < \infty \right)$$

— некоторый постоянный вектор. Докажем, что имеет место следующая формула:

$$(A - \lambda I)^{-1} [h\beta(x)] = -\frac{hw(x, \lambda)\beta(x)}{\lambda} \quad (\lambda \neq 0), \quad (1.2)$$

где

$$w(x, \lambda) = \int_0^x e^{i\frac{\beta^2(s)I}{\lambda} ds}$$

Действительно,

$$\begin{aligned} -\frac{hw(x, \lambda)\beta(x)}{-\lambda}\lambda + i\int_0^x h\frac{w(t, \lambda)\beta^2(t)I}{-\lambda} dt \beta(x) = \\ = hw(x, \lambda)\beta(x) - h\int_0^x \frac{dw}{dt} dt = h\beta(x). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Равенство (1.3) равносильно следующему соотношению:

$$(A - \lambda I) \left[h\frac{w(x, \lambda)\beta(x)}{-\lambda} \right] = h\beta(x). \quad (1.4)$$

Применяя оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ к обеим частям соотношения (1.4), получим формулу (1.2).

Из (1.2) следует, что

$$\int_0^x \{(A - \lambda I)^{-1} [h\beta(t)]\} \beta(t) I dt = h \int_0^x \frac{w(t, \lambda)\beta^2(t)I}{-\lambda} dt = ih[w(x, \lambda) - I]. \quad (1.5)$$

Пусть $\frac{1}{\lambda} = s$. Изучим подробней матрицу $w(x, s)$.

ЛЕММА 1.1. *Существует такое число R , при котором справедливо неравенство:*

$$\|w(x, s)\| \leq Re^{\int_0^x |d(t)| dt \cdot |\operatorname{Im} s|}$$

где $d(t)$ — собственное число матрицы $D(t)$, отличное от нуля.

Доказательство. Так как матрица $\beta^2(x)I$ непрерывна, то для любого $\delta > 0$ можно найти такое разбиение сегмента $[0, x]$, что

$$\begin{aligned} \|w(x, s)\| &\leq \left\| \prod_{j=0}^{m-1} e^{is\beta^2(x_j)I\Delta x} \right\| + \delta \leq \|V(x_0)\| \cdot \prod_{j=0}^{m-2} \|V(x_j)^{-1}V(x_{j+1})\| \cdot \|V^{-1}(x_m)\| \cdot \\ &\quad \prod_{j=0}^{m-1} \|e^{-\operatorname{Im} s \cdot D(x_j)\Delta x}\| + \delta \leq \\ &\leq M^2 \prod_{j=0}^{m-2} \|I + V(x_j)^{-1}[V(x_{j+1}) - V(x_j)]\| \cdot e^{\sum_{j=0}^{m-1} \|D(x_j)\| \cdot \Delta x \cdot |\operatorname{Im} s|} + \delta. \end{aligned}$$

Так как $\|D(x_j)\| = |d(x_j)|$ и матрица $V(x)$ удовлетворяет условию Липшица ($\alpha = 1$), то справедливо неравенство:

$$\|w(x; s)\| \leq M^2 \prod_{j=0}^{m-2} [1 + K \Delta x] e^{\sum_{j=0}^{m-1} |d(x_j)| \Delta x \cdot |\operatorname{Im} s|} + \delta.$$

Выбирая достаточно мелкое разбиение, получим:

$$\|w(x, s)\| \leq M^2 e^{Kl} e^{\int_0^x |d(t)| dt \cdot |\operatorname{Im} s| + \delta} + \delta, \quad (1.6)$$

откуда, ввиду произвольности δ , следует требуемое неравенство:

$$\|w(x, s)\| \leq R e^{\int_0^x |d(t)| dt \cdot |\operatorname{Im} s|}$$

Из условий регулярности вытекает, что $d(x)$ сохраняет знак во всех точках сегмента $[0, l]$. Для определенности будем считать $d(x) > 0$.

ЛЕММА 1.2. Существует такое число N , при котором справедливо неравенство:

$$\|w(x, s)\| \leq N \quad (\operatorname{Im} s \geq 0).$$

Доказательство леммы 1.2 ничем не отличается от доказательства леммы 1.1, нужно только учесть, что имеет место неравенство:

$$\|e^{iD(x_j)s\Delta x}\| \leq 1 \quad (\operatorname{Im} s \geq 0).$$

Из лемм 1.1 и 1.2 и теоремы Палея — Винера⁽⁵⁾ вытекает представление:

$$w(x, s) - I = s \int_0^{\omega(x)} e^{isy} K(x, y) dy, \quad (1.7)$$

где

$$K(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isy} \frac{[w(x, s) - I]}{s} ds, \quad \omega(x) = \int_0^x d(t) dt, \quad (1.8)$$

причем несобственный интеграл в правой части (1.8) сходится в смысле среднего квадратичного.

Пользуясь формулой (1.5), можем записать равенство:

$$\int_0^x \{(A - \lambda I)^{-1} [h\beta(t)]\} \beta(t) I dt = ih \frac{1}{\lambda} \int_0^{\omega(x)} e^{i\frac{1}{\lambda}y} K(x, y) dy \quad (0 \leq x \leq l). \quad (1.9)$$

Разлагая обе части (1.9) в ряд по λ в окрестности бесконечно удаленной точки и приравнявая соответствующие коэффициенты, получим:

$$\int_0^x \{A^n [h\beta(t)]\} \beta(t) I dt = ih \int_0^{\omega(x)} \frac{i^n y^n}{n!} K(x, y) dy \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.10)$$

Следовательно,

$$\{A^n[h\beta(x)]\}\beta(x)I = ih \frac{d}{dx} \int_0^{\omega(x)} \frac{i^n y^n}{n!} K(x, y) dy \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.11)$$

Введем оператор $\beta(x)^{-1}$, который будем понимать следующим образом: оператор $\beta(x)^{-1}$ определен на векторах вида

$$\varphi(x) = f(x)\beta^2(x),$$

где $f(x) \in L_r^2$ и

$$\varphi(x)\beta(x)^{-1} = f(x)\beta(x).$$

Однозначность оператора $\beta(x)^{-1}$ легко вытекает из самосопряженности матрицы $\beta(x)$ при каждом x ($0 \leq x \leq l$).

Вектор $A^n[h\beta(x)]$ представляется в виде $f(x)\beta(x)$ [см. (1.2)]. Поэтому имеет место равенство:

$$A^n[h\beta(x)]\beta(x)\beta(x)^{-1} = A^n[h\beta(x)] \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.12)$$

Из (1.11) и (1.12) следует, что

$$A^n[h\beta(x)] = ih \frac{d}{dx} \int_0^{\omega(x)} \frac{i^n y^n}{n!} K(x, y) dy \beta(x)^{-1}. \quad (1.13)$$

2. Изучим структуру матрицы $K(x, y)$, определенной формулой (1.8).

Матрица $w(x, s)$ является решением системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dw(x, s)}{dx} = isw(x, s)\beta^2(x)I, \quad (1.14)$$

$$w(0, s) \equiv I, \quad 0 \leq x \leq l.$$

Асимптотика решений системы (1.14) изучалась различными авторами [см. (6), (7)] в предположении, что собственные числа матрицы $\beta^2(x)I$ различны. Методы, развитые этими авторами, без труда переносятся и на тот случай, когда $\beta^2(x)I$ имеет одинаковые собственные числа, но элементарные делители все простые.

Пусть $\beta^2(x)I$ удовлетворяет условиям регулярности (I). Соответствующая матрица $D(x)$ имеет вид:

$$D(x) = \left\{ \underbrace{d(x), d(x), \dots, d(x)}_m, 0, 0, 0, \dots \right\}.$$

Можно найти такую матрицу $V_1(x)$, для которой будут выполняться условия [см., например, (7)]:

$$1) V_1(x)\beta^2(x)IV_1(x)^{-1} = D(x) \quad (0 \leq x \leq l);$$

$$2) \sup_{0 \leq x \leq l} \max \{ \|V_1(x)\|, \|V_1'(x)\|, \|V_1''(x)\|, \|V_1^{-1}(x)\| \} \leq M.$$

3) матрица $G(x) = V_1^{-1}(x) \frac{dV_1}{dx}$ имеет следующую структуру:

$$G(x) = \begin{bmatrix} 0, & A_{12}(x) \\ \underbrace{A_{21}(x)}_m, & 0 \end{bmatrix} \} m$$

При этих условиях справедливо [см. (7)] равенство:

$$w(x, s) = V_1(0)^{+1} e^{is \int_0^x D(t) dt} V_1^{-1}(x) + P(x, s) \quad (\text{Im } s = 0), \quad (1.15)$$

где

$$\|P(x, s)\| \leq \frac{N}{|s|} \quad (|s| \geq r_0), \quad \|P'_x(x, s)\| \leq N.$$

Воспользовавшись формулой (1.8), получим соотношение:

$$\begin{aligned} K(x, y) = & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isy} V_1(0)^{+1} \frac{e^{is \int_0^x D(t) dt} - I}{s} V_1^{-1}(x) ds + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isy} \frac{V_1^{+1}(0) V_1^{-1}(x) - I + P(x, s)}{s} ds. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Вычислим сначала первое слагаемое правой части (1.16):

$$\begin{aligned} K_1(x, y) = & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isy} V_1(0)^{+1} \frac{e^{is \int_0^x D(t) dt} - I}{s} V_1^{-1}(x) ds = \\ = & V_1(0)^{+1} \widetilde{K_1}(x, y) V_1^{-1}(x), \end{aligned} \quad (1.17)$$

где

$$\widetilde{K_1}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isy} \frac{e^{is \int_0^x D(t) dt} - I}{s} ds$$

— диагональная матрица, диагональные элементы которой $\tilde{K}_{1, ii}(x, y)$ определяются формулой:

$$\tilde{K}_{1, ii}(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y \leq \int_0^x d(t) dt, \\ 0, & y > \int_0^x d(t) dt, \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

$$\tilde{K}_{1, ii}(x, y) \equiv 0 \quad (i > m).$$

Перейдем ко второму слагаемому правой части (1.16):

$$\begin{aligned}
 K_2(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isy} \frac{V_1(0)^{+1} V_1^{-1}(x) - I + P(x, s)}{s} ds = \\
 &= \int_{-1}^1 e^{-isy} \frac{V_1(0)^{+1} V_1^{-1}(x) - I + P(x, s)}{s} ds + \\
 &+ \int_1^{\infty} e^{-isy} \frac{V_1(0)^{+1} V_1^{-1}(x) - I}{s} ds + \int_{-\infty}^{-1} e^{-isy} \frac{V_1(0)^{+1} V_1^{-1}(x) - I}{s} ds + \\
 &+ \int_{-1}^{\infty} e^{-isy} \frac{P(x, s)}{s} ds + \int_{-\infty}^{-1} e^{-isy} \frac{P(x, s)}{s} ds. \quad (1.18)
 \end{aligned}$$

Из (1.18) непосредственно следует существование такого постоянного числа R , что

$$\|K_2(x, y)\| \leq R, \quad \left\| \frac{\partial}{\partial x} K_2(x, y) \right\| \leq R. \quad (1.19)$$

ЛЕММА 1.3. *Имеет место равенство:*

$$K\left(x, \int_0^x d(t) dt\right) = K_1\left(x, \int_0^x d(t) dt\right), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (1.20)$$

Доказательство. Утверждение леммы эквивалентно равенству:

$$K_2\left(x, \int_0^x d(t) dt\right) \equiv 0.$$

Действительно, $K(x, y) = 0$ при $y > \int_0^x d(t) dt$ [см. (1.7)], $K_1(x, y) = 0$ при $y > \int_0^x d(t) dt$. Тогда и $K_2(x, y) = 0$ при $y > \int_0^x d(t) dt$.

С другой стороны, как мы показали выше, в любой точке x существует матрица $\frac{\partial}{\partial x} K_2(x, y)$. Следовательно,

$$K_2\left(x, \int_0^x d(t) dt\right) \equiv 0.$$

3. Обозначим через H_m пространство векторов вида:

$$\varphi = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m, 0, 0, \dots, 0], \quad \varphi_k(y) \in L^2\left[0, \int_0^l d(t) dt\right] \quad (k=1, 2, \dots, m).$$

Рассмотрим оператор B , действующий из H_m в L_r^2 и заданный формулой:

$$B\varphi = i \frac{d}{dx} \int_0^x \varphi(y) K(x, y) dy \cdot I\beta(x)^{-1} \quad (0 \leq x \leq l). \quad (1.24)$$

Из (1.13) видно, что оператор B определен на векторах вида:

$$\varphi = [y^{n_1}, y^{n_2}, \dots, y^{n_m}, 0, 0, \dots] \quad (n_1, n_2, \dots, n_m = 0, 1, 2, \dots),$$

$$0 \leq y \leq \int_0^l d(t) dt,$$

т. е. на плотном в H_m множестве.

Пользуясь результатами п. 2, можно написать:

$$B\varphi = i \left[\varphi(\omega(x)) K_1(x, \omega(x)) d(x) + \int_0^{\omega(x)} \varphi(y) \frac{\partial}{\partial x} K(x, y) dy \right] I \beta(x)^{-1}. \quad (1.22)$$

Из условий регулярности (I) вытекает существование такого числа $\delta > 0$, при котором справедливо неравенство:

$$d(x) \geq \delta \quad (0 \leq x < l). \quad (1.23a)$$

В силу (1.23), оператор

$$B_1\varphi = i \left[\varphi(\omega(x)) K_1(x, \omega(x)) d(x) + \int_0^{\omega(x)} \varphi(y) \frac{\partial}{\partial x} K(x, y) dy \right] I \quad (1.24)$$

ограничен. Кроме того, из (1.23) вытекает ограниченность оператора $\beta(x)^{-1}$. Отсюда следует, что оператор B (1.22) также ограничен.

Обозначим через H_n замыкание линейного многообразия, в которое переходит $L_r^2[0, l]$ при умножении его элементов на матрицу $\beta(x)$.

Из формулы (1.22) видно, что оператор B переводит H_m в H_n .

Докажем, что существует ограниченный оператор B^{-1} , обратный по отношению к B и действующий из H_n в H_m .

Очевидно, достаточно доказать высказанное утверждение для оператора B_1 (1.24).

Согласно (1.17) и (1.24), имеет место равенство:

$$B_1\varphi = i \left[\varphi(\omega(x)) V_1(0)^{+1} D(x) V^{-1}(x) + \int_0^{\omega(x)} \varphi(y) \frac{\partial}{\partial x} K(x, y) dy \right] I. \quad (1.25)$$

Так как $B_1\varphi \in H_n$, то вектор

$$f(x) = [B_1\varphi] \cdot I \cdot V_1(x)^{+1}$$

имеет вид:

$$f(x) = [f_1(x), \dots, f_m(x), 0, 0, \dots]. \quad (1.26)$$

Рассмотрим оператор

$$B_2\varphi = i \left[\varphi(\omega(x)) V_1(0)^{+1} D(x) + \int_0^{\omega(x)} \varphi(y) \cdot \frac{\partial}{\partial x} K(x, y) dy V_1(x)^{+1} \right]. \quad (1.27)$$

Оператор B_2 переводит H_m в себя. Методом последовательных приближений, как для вольтерровских операторов, нетрудно показать, что существует ограниченный оператор B_2^{-1} , переводящий векторы вида (1.26) в векторы (1.26).

Отсюда легко вытекает существование ограниченного оператора B^{-1} , переводящего H_n в H_m .

Обозначим через $I^{(m)}$ оператор, определенный равенством:

$$I^{(m)}\varphi = \left[i \int_0^y \varphi_1(t) dt, \dots, i \int_0^y \varphi_m(t) dt, 0, 0, \dots \right], \quad 0 \leq y \leq \omega(l). \quad (1.28)$$

Нетрудно видеть, что пространство H_m инвариантно относительно оператора $I^{(m)}$.

Из формулы (1.13) следует, что на плотном в H_m множестве выполняется равенство:

$$AB\varphi = BI^{(m)}\varphi, \quad \varphi \in H_m. \quad (1.29)$$

Из ограниченности оператора B вытекает справедливость формулы (1.29) для любой функции $\varphi \in H_m$.

В силу формулы (1.13) и ограниченности оператора B , конечные линейные комбинации векторов $A^n[h\beta(x)]$ образуют в H_n плотное множество.

Следовательно, H_n совпадает с областью определения простой части A_n оператора A .

Суммируя высказанное, сформулируем основную теорему.

Если $\beta^2(x)I$ удовлетворяет условиям регулярности (I), то простая часть оператора A (1.1) линейно эквивалентна оператору $I^{(m)}$, т. е. имеет место равенство:

$$A_n = BI^{(m)}B^{-1},$$

где B и B^{-1} — ограниченные операторы.

Следствие. *Дополнительная компонента оператора A (1.1) состоит из тех и только тех векторов $f(x)$ ($f(x) \in L^2_r$), для которых почти при всех x справедливо равенство:*

$$f(x)\beta(x) \equiv 0.$$

4. В настоящем пункте мы изучим некоторые свойства оператора $I^{(1)}$. Очевидно оператор $I^{(1)}$ можно считать заданным в $L^2[0, b]$ формулой

$$I^{(1)}f = i \int_0^x f(t) dt, \quad 0 \leq x \leq b.$$

ЛЕММА 1.4 *. *Функция $f(x)$ является порождающей для оператора $I^{(1)}$ в том и только в том случае, если при любом α ($\alpha > 0$) в сегменте $[0, \alpha]$ существует множество точек x положительной меры, на котором $f(x) \neq 0$.*

* Как нам стало известно, доказательство леммы 1.4, аналогичное приведенному, было предложено М. Г. Крейном.

Достаточность. Допустим, что утверждение леммы неверно. Тогда существует такая функция $g(x) \in L^2[0, b]$, что

$$\left(\left(I^{(1)} - \frac{1}{\lambda} I \right)^{-1} f, g \right) \equiv 0. \quad (1.30)$$

Вычислим выражение, стоящее в левой части (1.30):

$$\left(\left(I^{(1)} - \frac{1}{\lambda} I \right)^{-1} f, g \right) = -\lambda \int_0^b f(t) \overline{g(t)} dt - i\lambda^2 \int_0^b \int_0^x f(t) e^{i\lambda(x-t)} dt \overline{g(x)} dx. \quad (1.31)$$

Из (1.31) вытекают равенства:

$$\int_0^b f(t) \overline{g(t)} dt = 0, \quad \int_0^b \int_0^x f(t) e^{i\lambda(x-t)} dt \overline{g(x)} dx = 0. \quad (1.32)$$

Запишем очевидное соотношение:

$$\int_0^x f(t) e^{i\lambda(x-t)} dt = \int_0^x f(x-y) e^{i\lambda y} dy. \quad (1.33)$$

Согласно (1.32) и (1.33), справедливо тождество:

$$\int_0^b \int_0^x e^{i\lambda y} f(x-y) dy \cdot \overline{g(x)} dx \equiv 0,$$

или

$$\int_0^b e^{i\lambda y} \int_y^b f(x-y) \overline{g(x)} dx dy \equiv 0,$$

т. е. почти при всех y имеет место равенство:

$$\int_y^b f(x-y) \overline{g(x)} dx = 0. \quad (1.34)$$

Полагая $x = b - x_1$, $y = b - y_1$, преобразуем (1.34):

$$\int_0^{y_1} f(y_1 - x_1) \overline{g(b - x_1)} dx_1 = 0, \quad 0 \leq y_1 \leq b. \quad (1.35)$$

В силу известной теоремы Титчмарша ⁽⁸⁾, из (1.35) вытекает, что $g(x) = 0$ почти при всех x . Отсюда непосредственно следует, что функция $f(x)$ является порождающей для оператора $I^{(1)}$.

Необходимость условия леммы очевидна.

Обозначим через H_α ($0 \leq \alpha \leq b$) пространство, образованное функциями $f(x)$ ($f(x) \in L^2[0, b]$), удовлетворяющими условию $f(x) = 0$ почти при всех x , принадлежащих $[0, \alpha]$.

Очевидно H_α при любом α ($0 \leq \alpha \leq b$) является инвариантным подпространством для оператора $I^{(1)}$.

Из леммы 1.4 непосредственно получаем

Следствие 1. Оператор $I^{(1)}$ не имеет других инвариантных подпространств, кроме H_α .

Пусть оператор A имеет единственную особенность в точке $\lambda = 0$. Введем следующее определение:

Типом оператора будем называть верхний предел выражения $\frac{1}{|\lambda|} \ln \left\| \left(A - \frac{1}{\lambda} I \right)^{-1} \right\|$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$.

Следствие 2. Тип оператора $I^{(1)}$ равен b .

Доказательство. Пусть $f(x)$ не обращается тождественно в нуль ни в одном из сегментов $[0, \alpha]$ ($0 < \alpha \leq b$), а $g(x)$ — ни в одном из сегментов $[\beta, b]$ ($0 \leq \beta < b$).

Повторяя рассуждения леммы 1.4, убедимся, что

$$\omega(\lambda) = \left(\left(I^{(1)} - \frac{1}{\lambda} \right)^{-1} f g \right) = -\lambda \int_0^b f(x) \overline{g(x)} dx + i\lambda^2 \int_0^b e^{i\lambda s} \int_s^b f(x-s) \overline{g(x)} dx ds. \quad (1.36)$$

Допустим, что тип аналитической функции $\omega(\lambda)$ равен b' ($b' < b$). Тогда из теоремы Палей — Винера следует справедливость почти при всех s ($s \in [b', b]$) равенства:

$$\int_s^b f(x-s) \overline{g(x)} dx = 0.$$

Снова пользуясь теоремой Титчмарша, приходим к противоречию. Таким образом, тип $\omega(\lambda)$ равен b . Следовательно, тип оператора $I^{(1)}$ не меньше b .

Непосредственное рассмотрение выражения $\left\| \left(I^{(1)} - \frac{1}{\lambda} I \right)^{-1} \right\|$ позволяет установить, что тип оператора $I^{(1)}$ не больше b . Отсюда вытекает утверждение следствия 2.

В дальнейшем нам понадобится следующее очевидное замечание: *типы линейно эквивалентных операторов совпадают*.

5. Рассмотрим вольтерровский оператор

$$Kf = i \int_0^x f(y) K(x, y) dy, \quad f(y) \in L^2[0, l]. \quad (1.37)$$

Ядро $K(x, y)$ удовлетворяет следующим условиям регулярности:

1) $K(x, y)$ представляется в виде:

$$K(x, y) = \sum_{j=1}^r \varphi_j(x) \overline{\varphi_j(y)} \varepsilon_j \quad (r \leq \infty),$$

где функции $\varphi_j(x)$ линейно независимы, $\varepsilon_j = \pm 1$.

2) Ряды

$$\sum_{j=1}^r |\varphi_j(x)|^2, \quad \sum_{j=1}^r |\varphi_j'(x)|^2, \quad \sum_{j=1}^r |\varphi_j''(x)|^2$$

сходятся равномерно.

$$3) |\varphi_1(x)| > 0 \quad (0 \leq x \leq l). *$$

$$4) K(x, x) \neq 0 \quad (0 \leq x \leq l).$$

Из условия 3) следует неравенство:

$$\sum_{j=1}^r |\varphi_j(x)|^2 > 0.$$

Без ограничения общности можно считать, что

$$\sum_{j=1}^r |\varphi_j(x)|^2 \equiv 1.$$

Оператор K унитарно эквивалентен [см. (1)] (с точностью до дополнительной компоненты) оператору

$$Af = i \int_0^x f(t) \beta(t) I dt \beta(x), \quad (1.38)$$

где

$$f(x) \in L_r^2[0, l], \quad \beta(x) = \|\varphi_i(x) \overline{\varphi_j(x)}\|_{i,j=1}^r,$$

а I — диагональная матрица, у которой на пересечении j -й строки с j -й колонной стоит число ε_j .

Докажем, что $\beta^2(x) I$ удовлетворяет условиям регулярности.

Матрица $\beta^2(x) I$ представляется в виде:

$$\beta^2(x) I = \beta(x) I,$$

так как

$$\sum_{k=1}^r |\varphi_k(x)|^2 \equiv 1.$$

Введем матрицу $T(x)$:

$$T(x) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \varphi_1(x), & \varepsilon_2 \overline{\varphi_2(x)}, \dots, & \varepsilon_n \overline{\varphi_n(x)}, \dots \\ -\varphi_2(x), & \varphi_1(x), 0, 0, \dots, 0, & \dots \\ -\frac{\varphi_3(x)}{\varphi_1(x)}, & 0 & 1, 0, \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ -\frac{\varphi_n(x)}{\varphi_1(x)}, & 0 & & & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

* При $r < \infty$ от условия 3) можно освободиться, так как при некоторых $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ $\left(\sum_{i=1}^r |d_i|^2 \varepsilon_i = \varepsilon_1 \right)$ выполняется условие: $|\psi_1(x)| > 0$, где $\psi_1(x) = \sum_{i=1}^r \alpha_i \varphi_i(x)$.

Обозначим

$$v = [\varepsilon_2 \overline{\varphi_2(x)}, \varepsilon_3 \overline{\varphi_3(x)}, \dots],$$

$$u = \begin{bmatrix} -\overline{\varphi_2(x)} \\ -\overline{\varphi_3(x)} \\ \overline{\varphi_1(x)} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad P(x) = \begin{bmatrix} \overline{\varphi_1(x)}, 0, \dots \\ 0, 1, \dots \\ 0, 0, 1, \dots \\ \dots \end{bmatrix}.$$

Тогда матрица $T(x)$ запишется в виде:

$$T(x) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \overline{\varphi_1(x)}, & v(x) \\ u(x), & P(x) \end{bmatrix}, \quad (1.39)$$

а матрица $T^{-1}(x)$ — в виде:

$$T^{-1}(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha(x)}, & r(x) \\ q(x), & Q(x) \end{bmatrix}, \quad (1.40)$$

где

$$\alpha(x) = \varepsilon_1 \overline{\varphi_1(x)} - v(x) P^{-1}(x) u(x) = \frac{K(x, x)}{\varphi_1(x)},$$

$$r(x) = -\frac{v(x) P^{-1}(x)}{\alpha(x)}, \quad q(x) = -P^{-1}(x) \frac{u(x)}{\alpha(x)},$$

$$Q(x) = P^{-1}(x) + \frac{P^{-1}(x) u(x) v(x) P^{-1}(x)}{\alpha(x)}.$$

Так как $K(x, x)$ не обращается в нуль, то норма матрицы $T^{-1}(x)$ равномерно ограничена по x .

Нетрудно убедиться в справедливости равенства:

$$K(x, x) T^{-1}(x) I_{11} T(x) = \beta^2(x) I, \quad (1.41)$$

где

$$I_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

Из (1.39), (1.40), (1.41) вытекает, что матрица $\beta^2(x) I$ удовлетворяет условиям регулярности.

Следовательно, оператор K простой и линейно эквивалентен оператору $I^{(1)}$, определенному в $L^2[0, b]$, где

$$b = \int_0^l K(x, x) dx.$$

Из линейной эквивалентности операторов K и $I^{(1)}$ и результатов п. 4 следует справедливость следующих предложений:

1°. Функция $f(x)$ является порождающей для оператора K в том и только том случае, если при любом $\alpha (\alpha > 0)$ в сегменте $[0, \alpha]$ существует

множество точек x положительной меры, на котором выполняется неравенство $f(x) \neq 0$.

2°. Подпространство G является инвариантным для оператора K в том и только том случае, если оно состоит из всех функций $f(x) \in L^2[0, l]$, обращающихся в нуль в некотором сегменте $[0, \alpha]$.

Несколько сложнее доказывается следующее утверждение:

3°. Если $g_1(x), \dots, g_k(x)$ являются порождающей системой векторов для оператора K , то существует порождающий вектор $g(x)$, являющийся линейной комбинацией векторов $g_1(x), \dots, g_k(x)$:

$$g(x) = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) + \dots + \alpha_k g_k(x).$$

З а м е ч а н и е. Допустим, что нам заранее неизвестно разложение ядра оператора $K(x, y)$ в ряд.

Определим $K(x, y)$ при $x < y$:

$$K(x, y) = \overline{K(y, x)}.$$

Будем считать, что производные

$$\frac{\partial^{j+k} K(x, y)}{\partial x^j \partial y^k} \quad (i, k = 1, 2)$$

непрерывны и самосопряженный оператор

$$\frac{K - K^*}{i} f = \int_0^l f(y) K(x, y) dy$$

имеет лишь конечное число отрицательных собственных чисел.

Тогда, пользуясь теоремой Мерсера, получаем:

$$K(x, y) = \sum_{k=1}^r \frac{\psi_k(x) \overline{\psi_k(y)}}{\lambda_k}, \quad (1.42)$$

где $\psi_k(x)$ — собственные функции оператора $\frac{K - K^*}{i}$.

Из теоремы Крейна — Данилевского вытекает возможность дважды почленно дифференцировать ряд (1.42) по x и по y .

§ 2

1. В настоящем параграфе мы будем рассматривать оператор

$$Af = i \int_0^x f(t) \beta^2(t) I dt \beta(x), \quad (2.1)$$

где $\beta^2(x) I$ удовлетворяет следующим условиям регулярности (условия (II)):

а) существует такая матрица $V(x)$, что

$$V(x) \beta^2(x) IV(x)^{-1} = D(x) \quad (0 \leq x \leq l),$$

где $D(x)$ — вещественная диагональная матрица, положительные элементы которой равны между собой, а отрицательные — между собой.

б) $\sup_{0 \leq x \leq l} \max \{ \|V(x)\|, \|V'(x)\|, \|V''(x)\|, \|V^{-1}(x)\|, \|D(x)\|, \|D'(x)\| \} \leq M$.

с) При любом x существует по крайней мере одно положительное собственное число $d_1(x)$ и по крайней мере одно отрицательное собственное число $d_2(x)$ матрицы $D(x)$.

Большинство результатов § 1 сохраняется и для условий регулярности (II).

Так же, как леммы 1.1 и 1.2, доказывается

ЛЕММА 2.1. При некотором R справедливы неравенства:

$$\|W(x, s)\| \leq \operatorname{Re} \int_0^x |d_2(t)| dt \cdot |\operatorname{Im} s|, \quad \operatorname{Im} s \geq 0,$$

$$\|W(x, s)\| \leq \operatorname{Re} \int_0^x |d_1(t)| dt \cdot |\operatorname{Im} s|, \quad \operatorname{Im} s \leq 0.$$

Из леммы 2.1 и теоремы Палея — Винера ⁽⁵⁾ вытекает представление:

$$W(x, s) - I = s \int_{\omega_2(x)}^{\omega_1(x)} e^{isy} K(x, y) dy, \quad (2.2)$$

где

$$K(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isy} \frac{w(x, s) - I}{s} ds, \quad \omega_1(x) = \int_0^x d_1(t) dt, \quad \omega_2(x) = \int_0^x d_2(t) dt, \quad (2.3)$$

причем несобственный интеграл в правой части (2.3) сходится в смысле среднего квадратичного.

Как и в § 1 (1.13), можно записать формулу:

$$A^n[h\beta(x)] = ih \frac{d}{dx} \int_{\omega_2(x)}^{\omega_1(x)} \frac{(iy)^n}{n!} K(x, y) dy \cdot I\beta(x)^{-1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.4)$$

2. Пусть $\beta^2(x)I$ удовлетворяет условиям регулярности (II). Соответствующая матрица $D(x)$ имеет вид:

$$D(x) = \{\underbrace{d_1(x), d_1(x), \dots, d_1(x)}_{m_1}, \underbrace{d_2(x), d_2(x), \dots, d_2(x)}_{m_2}, 0, 0, \dots\}.$$

Можно найти такую матрицу $V_1(x)$, что будут выполняться условия [см., например, (7)]:

- 1) $V_1(x)\beta^2(x)IV_1(x)^{-1} = D(x) \quad (0 \leq x \leq l)$,
- 2) $\sup_{0 \leq x \leq l} \max \{\|V_1(x)\|, \|V_1'(x)\|, \|V_1''(x)\|, \|V_1^{-1}(x)\|, \|D(x)\|, \|D'(x)\|\} \leq M$.

3) Матрица $G(x) = V_1^{-1}(x) \frac{dV_1}{dx}$ имеет следующую структуру:

$$G(x) = \left[\begin{array}{ccc} \overbrace{0, \dots, 0}^{m_1} & \overbrace{A_{12}, \dots, A_{1m_2}}^{m_2} & A_{13} \\ A_{21}, & 0, & A_{23} \\ A_{31}, & A_{32}, & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \} m_1 \\ \} m_2 \end{array}$$

При этих условиях справедливо равенство:

$$W(x, s) = V_1(0)^{-1} e^{is \int_0^x D(t) dt} V_1(x) + P(x, s) \quad (s = \bar{s}), \quad (2.5)$$

где

$$\|P(x, s)\| \leq \frac{N}{|s|} \quad (|s| \geq r_0), \quad \|P'_x(x, s)\| \leq N.$$

3. Пространство векторов вида:

$$\varphi(y) = [\varphi_1(y), \dots, \varphi_{m_1}(y), 0, 0, \dots] \quad (\omega_2(l) \leq y \leq \omega_1(l)), \quad \varphi(y) = 0 \quad (y < 0),$$

обозначим через $H_{m_1}^{(1)}$.

Пространство векторов вида:

$$\varphi(y) = [0, 0, 0, \dots, 0, \varphi_{m_1+1}(y), \dots, \varphi_{m_1+m_2}(y), 0, 0, \dots] \quad (\omega_2(l) \leq y \leq \omega_1(l)),$$

$$\varphi(y) \equiv 0 \quad (y > 0),$$

обозначим через $H_{m_2}^{(2)}$.

Сумму $H_{m_1}^{(1)} + H_{m_2}^{(2)}$ обозначим через H_{m_1, m_2} .

Рассмотрим оператор B , действующий из H_{m_1, m_2} в $L_r^2[0, l]$ и заданный формулой:

$$B\varphi = i \frac{d}{dx} \int_{\omega_2(x)}^{\omega_1(x)} \varphi(y) K(x, y) dy \cdot I\beta(x)^{-1}. \quad (2.6)$$

Как и в § 1, запишем:

$$B\varphi = i \left[\varphi(\omega_1(x)) K_1(x, \omega_1(x)) d_1(x) - \varphi(\omega_2(x)) K_1(x, \omega_2(x)) d_2(x) + \right. \\ \left. + \int_{\omega_2(x)}^{\omega_1(x)} \varphi(y) \frac{\partial}{\partial x} K(x, y) dy \right] \cdot I\beta(x)^{-1} \quad (0 \leq x \leq l), \quad (2.7)$$

где

$$K_1(x, y) = V_1(0)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isy} \frac{e^{is \int_0^x D(t) dt} - I}{s} ds V_1^{-1}(x).$$

Матрица

$$\widetilde{K}_1(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isy} \frac{e^{is \int_0^x D(t) dt} - I}{s} ds$$

— диагональная, диагональные элементы $\widetilde{K}_{1, ii}(x, y)$ определяются формулой:

$$\widetilde{K}_{1, ii}(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y \leq \int_0^x d_1(t) dt \quad (i = 1, 2, \dots, m_1), \\ 0, & 0 \leq y \leq \int_0^x d_1(t) dt \quad (i > m_1), \\ 1, & 0 \geq y \geq -\int_0^x d_2(t) dt \quad (i = m_1 + 1, \dots, m_1 + m_2), \\ 0, & 0 \geq y \geq -\int_0^x d_2(t) dt \quad (i > m_1 + m_2). \end{cases}$$

Из (2.7) видно, что оператор B ограничен.

Обозначим через H замыкание линейного многообразия, в которое переходит $L_r^2[0, l]$ при умножении его элементов на матрицу $\beta(x)$.

Из (2.7) вытекает, что оператор B переводит пространство H_{m_1, m_2} в H .

Повторяя рассуждения § 1, можно показать, что существует ограниченный обратный оператор B^{-1} , переводящий H в H_{m_1, m_2} .

Обозначим через $I^{(m)}$ ($m = m_1 + m_2$) оператор, определенный равенством:

$$I^{(m)}\varphi = \left[i \int_0^y \varphi_1(t) dt, i \int_0^y \varphi_2(t) dt, \dots, i \int_0^y \varphi_m(t) dt, 0, 0, \dots \right], \quad (2.8)$$

где $\varphi \in H_{m_1, m_2}$, $\omega_2(l) \leq y \leq \omega_1(l)$.

Имеет место

ТЕОРЕМА. Если $\beta^2(x)I$ удовлетворяет условиям регулярности (II), то простая часть оператора A (2.1) линейно эквивалентна оператору $I^{(m)}$, т. е. справедливо равенство:

$$A_n = BI^{(m)}B^{-1},$$

где B и B^{-1} — ограниченные операторы.

§ 3

1. Рассмотрим снова оператор

$$Af = i \int_0^x f(t) \beta(t) I dt \beta(x) \quad (0 \leq x \leq l), \quad (3.1)$$

где $\beta^2(x)I$ удовлетворяет условиям регулярности (I). Обозначим характеристическую матрицу-функцию оператора (3.1) через $W(\lambda)$. Возникает вопрос, однозначно ли определяется по $W(\lambda)$ оператор (3.1)?

Разложим $W(\lambda)$ в окрестности бесконечной точки в степенной ряд по λ . Рассматривая коэффициент при λ^{-1} , равный $I|\omega|$, убеждаемся, что по $W(\lambda)$ однозначно определяются матрицы I и $|\omega| = \int_0^l \beta(t) dt$.

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 3.1. Если задана некоторая характеристическая матрица-функция $W(\lambda)$ и ей соответствуют в «треугольной модели» два оператора

$$A_1 f = i \int_0^x f(t) \beta_1(t) dt I \beta_1(x) \quad (0 \leq x \leq l) \quad (3.2)$$

и

$$A_2 f = i \int_0^x f(t) \beta_2(t) dt I \beta_2(x) \quad (0 \leq x \leq l), \quad (3.3)$$

где $\beta_1^2(x)I$ и $\beta_2^2(x)I$ удовлетворяют условиям регулярности (I), то выполняются соотношения:

$$V \beta_1(t) V^{-1} = \beta_2(t) \quad (0 \leq t \leq l), \quad (3.4)$$

$$VW(\lambda)V^{-1} = W(\lambda), \quad (3.5)$$

где V — некоторая постоянная унитарная матрица.

Доказательство. Так как характеристические матрицы-функции операторов A_1 и A_2 совпадают, то операторы A_1 и A_2 унитарно эквивалентны (с точностью до дополнительной компоненты), т. е. унитарно эквивалентны операторы, индуцируемые A_1 и A_2 соответственно на подпространствах $L_r^2 \beta_1(x) = H_1$ и $L_r^2 \beta_2(x) = H_2$. Обозначим унитарный оператор, переводящий A_2 в A_1 , через U ($A_1 = UA_2U^{-1}$).

Рассмотрим подпространство $G_t^{(2)}$, состоящее из векторов $g(x) \in H_2$, где $g(x) = 0$ при $x < t$ ($t \leq l$).

Очевидно, $G_t^{(2)}$ является инвариантным подпространством оператора A_2 .

Из следствия 2 леммы 1.4 вытекает, что оператор A_2 индуцирует в $G_t^{(2)}$ оператор типа $\left| \int_t^l d_2(v) dv \right|$, где $d_2(v)$ — собственное число матрицы $\beta_2^2(v)I$.

Рассмотрим подпространство $G_s^{(1)}$, состоящее из векторов $g(x) \in H_1$, где $g(x) = 0$ при $x < s$ ($s \leq l$).

Нетрудно убедиться, что оператор U переводит $G_t^{(2)}$ в $G_s^{(1)}$, причем

$$\left| \int_t^l d_2(v) dv \right| = \left| \int_s^l d_1(v) dv \right|. \quad (3.6)$$

Аналогично доказывается, что U^{-1} переводит $G_s^{(1)}$ в $G_t^{(2)}$.

Если обозначить оператор проектирования пространства H_2 на $G_t^{(2)}$ через $P_t^{(2)}$, а оператор проектирования пространства H_1 на $G_s^{(1)}$ — через $P_s^{(1)}$, то из вышесказанного легко вытекает равенство:

$$UP_t^{(2)}g = P_s^{(1)}Ug, \quad g \in H_2, \quad \left| \int_t^l d_2(v) dv \right| = \left| \int_s^l d_1(v) dv \right|. \quad (3.7)$$

Кроме того, оператор U должен переводить собственные векторы $\frac{A_2 - A_2^*}{i}$ в собственные векторы оператора $\frac{A_1 - A_1^*}{i}$.

Собственные векторы оператора $\frac{A_2 - A_2^*}{i}$ имеют вид:

$$g_i(x)_2 = [\beta_{i1}(x)_2, \beta_{i2}(x)_2, \dots] \quad (i = 1, 2, \dots, r). \quad (3.8)$$

Соответствующие собственные числа по модулю равны:

$$\int_0^l \sum_{k=1}^r |\beta_{ik}(x)_2|^2 dx = |\omega^{(i)}|. \quad (3.9)$$

Аналогично, собственные векторы оператора $\frac{A_1 - A_1^*}{i}$ имеют вид:

$$g_i(x)_1 = [\beta_{i1}(x)_1, \beta_{i2}(x)_1, \dots] \quad (i = 1, 2, \dots, r), \quad (3.10)$$

а соответствующие собственные числа по модулю равны:

$$|\omega^{(i)}| = \int_0^l \sum_{k=1}^r |\beta_{ik}(x)|^2 dx. \quad (3.11)$$

Рассмотрим, как действует оператор U на вектор-функцию $g_i(x)_2$. Если $\omega^{(i)}$ — собственное число кратности k , то справедливо соотношение:

$$U g_i(x)_2 = \alpha_{i1} g_1(x)_1 + \alpha_{i2} g_2(x)_1 + \dots + \alpha_{ik} g_k(x)_1 \quad (1 \leq i \leq k), \quad (3.12)$$

причем

$$\sum_{j=1}^k |\alpha_{ij}|^2 = 1.$$

Пусть

$$q_i(x) = U g_i(x)_2 \quad (1 \leq i \leq r).$$

Нетрудно видеть, что и при $i > k$ для $q_i(x) = \{q_{i1}(x), \dots, q_{ir}(x)\}$ имеют место соотношения, аналогичные (3.12).

Так как оператор U — унитарный, то выполняется равенство:

$$\int_0^l \sum_{k=1}^r \beta_{ik}(x)_2 \overline{\beta_{kj}(x)_2} dx = \int_0^l \sum_{k=1}^r q_{ik}(x) \overline{q_{kj}(x)} dx \quad (i, j = 1, 2, \dots, r). \quad (3.13)$$

Воспользовавшись равенством (3.7), получим, что

$$\int_0^l \sum_{k=1}^r \beta_{ik}(x)_2 \overline{\beta_{kj}(x)_2} dx = \int_0^l \sum_{s=1}^r q_{ik}(x) \overline{q_{kj}(x)} dx. \quad (3.14)$$

Обозначим через $Q(x)$ матрицу с элементами $q_{ik}(x)$. Выясним связь матриц $Q(x)$ и $\beta_1(x)$.

Из соотношения (3.12) вытекает существование постоянной унитарной и I -унитарной матрицы V , удовлетворяющей условию

$$V \beta_1(x) = Q(x). \quad (3.15)$$

В силу (3.14) и (3.15), запишем равенство:

$$\int_t^l \beta(x)_2^2 dx = V \int_s^l \beta^2(x)_1 dx V^{-1}, \quad (3.16)$$

или

$$\int_t^l \text{Sp } \beta^2(x)_2 dx = \int_s^l \text{Sp } \beta_1^2(x) dx. \quad (3.17)$$

Так как $\text{Sp } \beta_2^2(x) \equiv \text{Sp } \beta_1^2(x) \equiv 1$, то $t \equiv s$. Тогда из (3.6) следует, что

$$d_2(t) = d_1(t) \quad (0 \leq t \leq l),$$

а из (3.16) вытекает равенство при всех t :

$$\beta_2^2(t) = V \beta_1^2(t) V^{-1}, \quad (3.18)$$

т. е.

$$\beta_2(t) = V \beta_1(t) V^{-1}. \quad (3.19)$$

Из I -унитарности матрицы V и соотношения (3.18) вытекает формула:

$$V \beta_1^2(t) I V^{-1} = \beta_2^2(t) I. \quad (3.20)$$

Пользуясь мультипликативным представлением характеристической матрицы-функции $W(\lambda)$, нетрудно убедиться в справедливости второго утверждения теоремы.

Доказанная теорема может быть сформулирована как теорема единственности для систем дифференциальных уравнений:

Рассмотрим две системы:

$$\begin{aligned} \frac{dW_1(x, \lambda)}{dx} &= -\frac{i}{\lambda} W_1(x, \lambda) \beta_1^2(x) I \quad (0 \leq x \leq l), \\ \frac{dW_2(x, \lambda)}{dx} &= -\frac{i}{\lambda} W_2(x, \lambda) \beta_2^2(x) I \quad (0 \leq x \leq l), \end{aligned} \quad (3.21)$$

где $\beta_1^2(x) I$ и $\beta_2^2(x) I$ удовлетворяют условиям регулярности (I).

Если вронскианы этих систем совпадают ($W_1(l, \lambda) = W_2(l, \lambda) = W(\lambda)$), то выполняются соотношения:

$$V \beta_1(t) V^{-1} = \beta_2(t) \quad (0 \leq t \leq l), \quad VW(\lambda) V^{-1} = W(\lambda),$$

где V — некоторая постоянная унитарная матрица.

Справедливость высказанного предложения непосредственно вытекает из доказанной теоремы, если принять во внимание, что характеристическая матрица-функция оператора

$$Af = i \int_0^x f(t) \beta(t) I dt \beta(x) \quad (0 \leq x \leq l)$$

является вронскианом системы уравнений:

$$\frac{dW(x, \lambda)}{dx} = -\frac{i}{\lambda} W(x, \lambda) \beta^2(x) I, \quad W(0, \lambda) \equiv I \quad (0 \leq x \leq l). \quad (3.22)$$

2. Почти дословным повторением рассуждений теоремы 3.1 может быть доказана следующая

ТЕОРЕМА 3.2. Если задана некоторая характеристическая матрица-функция $W(\lambda)$ и ей соответствуют в «треугольной модели» два оператора

$$A_1 f = i \int_0^x f(t) \beta_1(t) dt I \beta_1(x) \quad (0 \leq x \leq l)$$

и

$$A_2 f = i \int_0^x f(t) \beta_2(t) dt I \beta_2(x) \quad (0 \leq x \leq l),$$

где $\beta_1^2(x) I$ и $\beta_2^2(x) I$ удовлетворяют условиям регулярности (II), и если, кроме того, положительные и отрицательные собственные числа как

матрицы $\beta_1^2(x)I$, так и матрицы $\beta_2^2(x)I$ по модулю равны между собой, то выполняются соотношения:

$$V\beta_1(t)V^{-1} = \beta_2(t) \quad (0 \leq t \leq l),$$

$$VW(\lambda)V^{-1} = W(\lambda),$$

где V — некоторая постоянная унитарная матрица.

Теорема 3.2 также может быть сформулирована как теорема единственности для систем дифференциальных уравнений:

Рассмотрим две системы

$$\begin{aligned} \frac{dW_1(x, \lambda)}{dx} &= -\frac{i}{\lambda} W_1(x, \lambda) \beta_1^2(x)I & (0 \leq x \leq l), \\ \frac{dW_2(x, \lambda)}{dx} &= -\frac{i}{\lambda} W_2(x, \lambda) \beta_2^2(x)I & (0 \leq x \leq l), \end{aligned} \quad (3.23)$$

где $\beta_1^2(x)I$ и $\beta_2^2(x)I$ удовлетворяют условиям теоремы 3.2.

Если вронскианы этих систем совпадают ($W_1(l, \lambda) = W_2(l, \lambda) = W(\lambda)$), то выполняются соотношения:

$$V\beta_1(t)V^{-1} = \beta_2(t), \quad VW(\lambda)V^{-1} = W(\lambda), \quad (3.24)$$

где V — некоторая постоянная матрица.

Пусть $\text{Sp } \beta_1^2(x)$ и $\text{Sp } \beta_2^2(x)$ не обязательно тождественно равны 1. Всем остальным условиям регулярности (II) матрицы $\beta_1^2(x)I$ и $\beta_2^2(x)I$ удовлетворяют. Пусть, кроме того, собственные числа матриц $\beta_1^2(x)I$ и $\beta_2^2(x)I$ при любом x совпадают.

При этих предположениях, если вронскианы систем (3.23) совпадают, то выполняются соотношения (3.24).

Определение. Мы будем говорить, что матрица $\beta_1(t)$ определена некоторыми условиями по существу однозначно, если любые две матрицы $\beta_1(t)$ и $\beta_2(t)$, удовлетворяющие этим условиям, связаны соотношением:

$$V\beta_1(t)V^{-1} = \beta_2(t),$$

где V — постоянная унитарная матрица.

Например, матрица $\beta_1^2(t)I$, удовлетворяющая условиям теоремы 3.2, определяется вронскианом системы (3.23) $W(\lambda)$ по существу однозначно.

3. В ряде важных случаев, как будет показано ниже, матрица $\beta^2(t)I$, удовлетворяющая условиям теоремы 3.1 или теоремы 3.2, однозначно определяется вронскианом системы

$$\frac{dW(x, \lambda)}{dx} = -\frac{i}{\lambda} W(x, \lambda) \beta^2(x)I.$$

ТЕОРЕМА 3.3. Если $\beta_1^2(x)I$ и $\beta_2^2(x)I$ удовлетворяют условиям регулярности (I), $\text{rang } \beta_1(x) \equiv \text{rang } \beta_2(x) \equiv 1$, $r < \infty$ и вронскианы систем

$$\frac{dW_1(x, \lambda)}{dx} = -\frac{i}{\lambda} W_1(x, \lambda) \beta_1^2(x)I, \quad \frac{dW_2(x, \lambda)}{dx} = -\frac{i}{\lambda} W_2(x, \lambda) \beta_2^2(x)I$$

совпадают ($W_1(l, \lambda) = W_2(l, \lambda) = W(\lambda)$), то имеет место тождество:

$$\beta_1^2(x) I \equiv \beta_2^2(x) I \quad (0 \leq x \leq l).$$

Из теоремы 3.1 следует существование такой постоянной унитарной матрицы V , что

$$V \beta_1^2(x) I V^{-1} = \beta_2^2(x) I, \quad VW(\lambda) V^{-1} = W(\lambda). \quad (3.25)$$

Если V — скалярная матрица, то теорема доказана.

Так как $r < \infty$ и матрица V унитарная, то ее можно представить в следующем виде:

$$V = U H U^{-1},$$

где U — унитарная матрица, H — диагональная унитарная матрица.

Рассмотрим матрицу

$$W^{(1)}(\lambda) = U^{-1} W(\lambda) U.$$

Очевидно [см. (3.25)], матрица $W^{(1)}(\lambda)$ перестановочна с H . Следовательно, при надлежащем расположении элементов H , матрица $W^{(1)}(\lambda)$ распадается, по крайней мере, на два блока, т. е. имеет вид:

$$W^{(1)}(\lambda) = \begin{bmatrix} W_{11}^{(1)}(\lambda) & 0 \\ 0 & W_{22}^{(1)}(\lambda) \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Из общей теории М. С. Лившица ⁽¹⁾ вытекает, что оператор A , характеристической матрицей-функцией которого является $W^{(1)}(\lambda)$, распадается на два оператора: A_1 и A_2 , действующих во взаимно ортогональных пространствах.

Но это противоречит тому факту, что оператор A унитарно эквивалентен (с точностью до дополнительной компоненты) оператору

$$\tilde{A}f = i \int_0^x f(t) \beta_1(t) I dt \beta_1(x) \quad (0 \leq x \leq l),$$

который является одноклеточным, откуда вытекает справедливость доказываемой теоремы.

ТЕОРЕМА 3.4. Если $\beta_1^2(x) I$ и $\beta_2^2(x) I$ удовлетворяют условиям теоремы 3.2, $r = 2$ и вронскианы систем

$$\frac{dW_1(x, \lambda)}{dx} = -\frac{i}{\lambda} W_1(x, \lambda) \beta_1^2(x) I, \quad \frac{dW_2(x, \lambda)}{dx} = -\frac{i}{\lambda} W_2(x, \lambda) \beta_2^2(x) I$$

совпадают ($W_1(l, \lambda) = W_2(l, \lambda) = W(\lambda)$), то имеет место тождество:

$$\beta_1^2(x) I \equiv \beta_2^2(x) I.$$

Доказательство. Согласно теореме 3.2, существует постоянная матрица V такая, что

$$V \beta_1^2(x) I V^{-1} = \beta_2^2(x) I, \quad VW(\lambda) V^{-1} = W(\lambda).$$

В рассматриваемом случае

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, V , будучи I -унитарной матрицей, имеет вид:

$$V = \begin{bmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_1} \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

Если $\alpha = \alpha_1 + 2\pi n$, то теорема доказана.

Пусть $\alpha \neq \alpha_1 + 2\pi n$; тогда $W(\lambda)$ имеет следующую структуру:

$$W(\lambda) = \begin{bmatrix} W_{11}(\lambda) & 0 \\ 0 & W_{22}(\lambda) \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

Рассмотрим оператор

$$Af = i \int_0^x f(t) \beta(t) I dt \beta(x) \quad (0 \leq x \leq l),$$

где

$$\beta^2(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Его характеристической матрицей-функцией, очевидно, является $W(\lambda)$ (3.28). Согласно теореме 3.2, существует постоянная матрица V_1 такая, что

$$V_1 \beta_1^2(x) I V_1^{-1} = \beta^2(x) I \quad (0 \leq x \leq l). \quad (3.29)$$

Так как V_1 имеет вид (3.27), то из (3.29) следует тождество:

$$\beta^2(x) I \equiv \beta_1^2(x) I \equiv \beta_2^2(x) I.$$

Теорема доказана.

Аналогично доказывается

ТЕОРЕМА 3.5. Если матрицы $\beta_1^2(x) I$ и $\beta_2^2(x) I$ удовлетворяют условиям регулярности (II) (лишь $\text{Sp } \beta_1^2(x) \neq 1$, $\text{Sp } \beta_2^2(x) \neq 1$), $r = 2$, собственные числа матриц $\beta_1^2(x) I$ и $\beta_2^2(x) I$ совпадают и вронскианы систем

$$\frac{dW_1(x, \lambda)}{dx} = -\frac{i}{\lambda} W_1(x, \lambda) \beta_1^2(x) I, \quad \frac{dW_2(x, \lambda)}{dx} = -\frac{i}{\lambda} W_2(x, \lambda) \beta_2^2(x) I$$

равны между собой, то имеет место тождество:

$$\beta_1^2(x) I \equiv \beta_2^2(x) I.$$

§ 4

Примеры. 1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dt} &= \lambda [b(t) \xi_1 + c(t) \xi_2] \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= -\lambda [a(t) \xi_1 + b(t) \xi_2] \end{aligned} \quad (0 \leq t \leq l). \quad (4.1)$$

Будем считать, что функции $b(t)$, $c(t)$, $a(t)$ — действительные и имеют ограниченные вторые производные. Кроме того, выполняются соотношения:

$$\begin{aligned} a(t) > 0, \quad c(t) > 0, \\ a(t)c(t) - b^2(t) > 0, \quad a(t) + c(t) \equiv 1. \end{aligned}$$

В матричном виде уравнение (4.1) может быть записано следующим образом:

$$\frac{dW_1}{dt} = i\lambda W_1 H_1(t) I_1, \quad (4.2)$$

где

$$H_1(t) = \begin{bmatrix} a(t) & b(t) \\ b(t) & c(t) \end{bmatrix}, \quad I_1 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}.$$

Очевидно существует такая постоянная унитарная матрица U (ее трудно найти), что $UI_1U^{-1} = I$, где

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Пусть $W = W_1U$; тогда

$$\frac{dW}{dt} = i\lambda WH(t)I, \quad \text{где } H(t) = UH_1(t)U^{-1} \quad (0 \leq t \leq l). \quad (4.3)$$

Как легко видеть, матрица $H(t)I$ удовлетворяет условиям теоремы 3.3. Следовательно, вронскианом $W(l, \lambda)$ матрица $H(t)$ определяется однозначно. Тогда вронскианом $W_1(l, \lambda)$ матрица $H_1(t)$ определяется также однозначно.

2. К системе вида (4.1) сводится следующая система дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} &= \lambda\varphi + a(x)\varphi + b(x)\psi \\ &\quad (0 \leq x \leq l), \\ \frac{d\psi}{dx} &= -\lambda\varphi + b(x)\varphi - a(x)\psi \end{aligned} \quad (4.4)$$

где предполагается существование конечных производных от действительных функций $a(x)$, $b(x)$.

Уравнение (4.4) рассматривалось М. Г. Крейном⁽³⁾ в связи с континуальным обобщением ортогональных полиномов.

В матричном виде уравнение (4.4) примет вид:

$$\frac{dW_1}{dx} = i\lambda W_1 I_1 + W_1 H_1(x), \quad W_1(0, \lambda) = I,$$

где

$$I_1 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \quad H_1(x) = \begin{bmatrix} a(x) & b(x) \\ b(x) & -a(x) \end{bmatrix}.$$

Пусть

$$W_1(x, \lambda) = W(x, \lambda) V(x).$$

Полагая

$$V(x) = \int_0^x e^{\int_0^t H_1(t) dt},$$

запишем уравнение:

$$\frac{dW(x, \lambda)}{dx} = i\lambda W(x, \lambda) V(x) I_1 V(x)^{-1}. \quad (4.5)$$

Так как $W_1(l, 0) = V(l)$, то по $W_1(l, \lambda)$ матрица $W(l, \lambda)$ определяется однозначно.

Как и в предыдущем пункте, убеждаемся, что по $W(l, \lambda)$ однозначно определяется матрица

$$H(x) = V(x) I_1 V(x)^{-1}. \quad (4.6)$$

Матрица $V(x)$, как легко видеть из ее мультипликативного представления, I_1 -унитарна, т. е.

$$V(x) I_1 V(x)^* = I_1.$$

Докажем, что матрица $V(x)$ определяется однозначно следующими условиями:

1) матрица $V(x)$ представляется в виде:

$$V(x) = \int_0^x e^{\int_0^t H_1(t) dt},$$

где $H_1(t)$ — некоторая матрица вида:

$$H_1(t) = \begin{bmatrix} a(t) & b(t) \\ b(t) & -a(t) \end{bmatrix}.$$

2) $H(x) = V(x) I_1 V(x)^{-1}$, где $H(x)$ — некоторая фиксированная матрица.

Доказательство. Пусть матрица $U(x)$ тоже удовлетворяет условиям 1) и 2).

Тогда $U(x)$ представляется в виде:

$$U(x) = V(x) T(x), \quad \text{где } T(x) = \begin{bmatrix} r(x) & q(x) \\ -q(x) & r(x) \end{bmatrix},$$

$r(x)$ и $q(x)$ — действительные функции с ограниченными производными и $r^2(x) + q^2(x) \equiv 1$.

Кроме того, согласно условию 1), $U(x)$ представляется в виде:

$$U(x) = \int_0^x e^{\int_0^t H_1(t) dt}$$

Тогда

$$\frac{dU}{dx} = \frac{dV}{dx} T + V \frac{dT}{dx} = VT \widetilde{H_1(x)}. \quad (4.7)$$

Так как

$$\frac{dV}{dx} = VH_1(x),$$

то

$$VH_1(x)T + V \frac{dT}{dx} = VT \widetilde{H_1(x)},$$

т. е.

$$\frac{dT}{dx} T^{-1}(x) = \widetilde{TH_1(x)} T^{-1} - H_1(x), \quad T(0) = I. \quad (4.8)$$

Производя умножение матриц левой и правой частей равенства (4.8) и сравнивая их, убеждаемся, что (4.8) справедливо лишь тогда, когда

$$\frac{dT}{dx} T^{-1}(x) = 0.$$

Таким образом, мы доказали, что

$$T(x) \equiv I.$$

Следовательно, матрицей $H(x)$ (4.6) матрица $V(x)$ определяется однозначно, а тогда однозначно по $H(x)$ определяется и матрица $H_1(x)$.

Суммируя все вышесказанное, можно утверждать, что вронскианом $W_1(l, \lambda)$ системы (4.4) матрица $H_1(x)$ определяется однозначно.

Положим в (4.4) $b(x) \equiv 0$. Тогда система (4.4) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} &= \lambda\psi + a\varphi \\ (0 \leq x \leq l). \\ \frac{d\psi}{dx} &= -\lambda\varphi - a\psi \end{aligned} \quad (4.9)$$

Заметим, что система (4.9) легко сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка.

Поступило
2. IV. 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Л и в ш и ц М. С., О спектральном разложении линейных несамосопряженных операторов, Матем. сборн., 36 (76) : 1 (1954), 145—199.
2. К р е й н М. Г., К теории целых матриц - функций экспоненциального типа, Укр. матем. журнал, 3, № 2 (1951), 165—173.
3. К р е й н М. Г., Континуальные аналоги предложений о многочленах, ортогональных на единичной окружности, Доклады Ак. наук СССР, 105, № 4 (1955), 637—640.
4. М а р ч е н к о В. А., Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка. I, Труды Моск. матем. об-ва, 1 (1952), 327—420.

- ⁵ Paley R. E. A. G. and Wiener N., Fourier Transforms in the complex domain, New York, 1943.
- ⁶ Birkhoff G. D. and Langer R. E., The boundary problems and developments associated with a system of ordinary linear differential equations of the first order, Proc. of the Amer. Acad. of Arts and Sciences, 58 (1923), 51—128.
- ⁷ Пугачев В. С., Об асимптотических представлениях интегралов систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, содержащих параметр, Матем. сборн., 15 (57) : 1 (1944), 13—54.
- ⁸ Титчмарш Е., Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, М., 1948.
-

И. С. САРГСЯН

О ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОПЕРАТОРА ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым)

В работе изучается асимптотическое поведение производных спектральной функции самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка, заданного на полупрямой. Полученные асимптотические оценки для производных спектральной функции применены к изучению вопросов суммируемости производных разложений по собственным функциям. Основными вспомогательными средствами являются метод и тауберовы теоремы Б. М. Левитана.

Введение

В настоящей работе изучаются вопросы дифференцирования разложений по собственным функциям самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка, известного под названием оператора Штурма — Лиувилля,

$$y'' + \{\lambda - q(x)\} y = 0, \quad (0.1)$$

определенного на полупрямой $(0, \infty)$, с начальными условиями

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = h. \quad (0.2)$$

Предполагается, что функция $q(x)$ действительна, определена на полупрямой $(0, \infty)$ и суммируема в каждом конечном интервале. На протяжении всей работы предполагается, что спектр задачи (0.1) — (0.2) неотрицателен.

Пусть $\lambda = \mu^2$ ($\lambda > 0$). Обозначим через $\varphi(x, \mu)$ решение задачи (0.1) — (0.2).

Как известно [см. (1)], при данном h существует по крайней мере одна монотонная, ограниченная в каждом конечном интервале функция $\rho(\mu)$ такая, что для каждой функции $f(x) \in L_2(0, \infty)$ справедливо равенство Парсеваля:

$$\int_0^\infty f^2(x) dx = \int_{-\infty}^\infty F(\mu) d\rho(\mu), \quad F(\mu) = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{A} \int_0^A f(s) \varphi(s, \mu) ds.$$

Обозначим через $\theta(x, s; \mu)$ спектральную функцию уравнения (0.1) (при начальных данных (0.2)), т. е. положим

$$\theta(x, s; \mu) = \begin{cases} \int_0^\mu \varphi(x, \nu) \varphi(s, \nu) d\nu, & \mu > 0, \\ -\int_0^\mu \varphi(x, \nu) \varphi(s, \nu) d\nu, & \mu < 0, \\ 0, & \mu = 0. \end{cases} \quad (0.3)$$

Настоящая работа посвящена изучению асимптотического поведения производных спектральной функции $\theta(x, s; \mu)$ и вопросов суммирования производных разложения по собственным функциям оператора Штурма — Лиувилля. Асимптотическое поведение самой спектральной функции и вопросы сходимости разложения по собственным функциям оператора Штурма — Лиувилля изучены Б. М. Левитаном [см. (2) и (3)].

Обозначим через $\theta^*(x, s; \mu)$ спектральную функцию уравнения (0.1) при $q(x) \equiv 0$, т. е. положим

$$\theta^*(x, s; \mu) = \frac{2}{\pi} \int_0^\mu \cos \nu x \cdot \cos \nu s \, d\nu. \quad (0.4)$$

Приведем один из основных результатов работы:

Если функция $q(x)$ суммируема в каждом конечном интервале, то при каждом фиксированных x и s и при $\mu \rightarrow \infty$ справедлива оценка:

$$\left| \int_0^\mu \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2} \right) d\nu \left\{ \frac{\partial \theta(x, s; \nu)}{\partial x} - \frac{\partial \theta^*(x, s; \nu)}{\partial x} \right\} \right| < C,$$

где константа C зависит от интервала изменения x и s и не зависит от μ .

Основываясь на оценках, полученных для производных спектральной функции, мы доказываем следующую теорему:

Пусть $f(x) \in L_2(0, \infty)$. Если функция $q(x)$ в каждом конечном интервале имеет суммируемую первую производную, то разность между средними по Рису первого порядка производных первого порядка разложения функции $f(x)$ по собственным функциям оператора Штурма — Лиувилля и разложения в обычный интеграл Фурье по косинусам стремится к нулю равномерно в каждом конечном интервале.

Аналогичные результаты имеют место и для старших производных как спектральной функции $\theta(x, s; \mu)$, так и разложения по собственным функциям оператора Штурма — Лиувилля.

Приношу глубокую благодарность Б. М. Левитану, под руководством которого написана настоящая работа.

§ 1. Вывод вспомогательных формул

Рассмотрим задачу:

$$y'' + \{\lambda - q(x)\} y = 0, \quad (1.1)$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \quad (1.2)$$

Предположим, что функция $q(x)$ действительна, определена на полу-прямой $(0, \infty)$ и суммируема в каждом конечном интервале. Далее, предположим, что спектр задачи (1.1) — (1.2) неотрицателен. Пусть $\lambda = \mu^2$

($\lambda > 0$). Обозначим через $\varphi(x, \mu)$ решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям (1.2).

Продолжим функцию $q(x)$ на отрицательную полуось четно и рассмотрим решение уравнения в частных производных:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - q(x)u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (1.3)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0, \quad (1.4)$$

где функция $f(x)$ дважды дифференцируема для всех положительных x .

Введем характеристики

$$\xi = x - t, \quad \eta = x + t.$$

Тогда уравнение (1.3) и начальные условия (1.4) примут вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{4} q\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right) u = 0, \quad (1.5)$$

$$u|_{\xi=\eta} = f(\xi), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)|_{\xi=\eta} = 0. \quad (1.6)$$

Обозначим через $R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$ функцию Римана для уравнения (1.5). Функция Римана $R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$ есть то решение уравнения (1.5), которое при $\xi = \xi_0$, а также при $\eta = \eta_0$, обращается в единицу. Пользуясь формулами (38) и (39) работы (5) (стр. 132) и начальными условиями (1.6), запишем решение уравнения (1.5) в виде [см. (6)]:

$$u_M = \frac{1}{2} \{u_{A_1} + u_{A_2}\} + \frac{1}{2} \int_{A_1}^{A_2} u \left(\frac{\partial R}{\partial \eta} d\eta - \frac{\partial R}{\partial \xi} d\xi \right). \quad (1.7)$$

Полагая $\xi = \eta = s$ и возвращаясь к переменным x, t , мы получим:

$$u(x, t; f) = \frac{1}{2} \{f(x+t) + f(x-t)\} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} w(x, t, s) u(s, t; f) ds, \quad (1.7')$$

где

$$w(x, t, s) = \left(\frac{\partial R}{\partial \eta} - \frac{\partial R}{\partial \xi} \right)_{\xi=\eta=s}. \quad (1.8)$$

Так как функция $R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$ на прямых $\xi = \xi_0$ и $\eta = \eta_0$ обращается в единицу, то из (1.8) следует (см. рис. 1), что

$$w(x, t, x-t) = w(x, t, x+t) = 0. \quad (1.9)$$

Перепишем уравнение (1.3) в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -q(x)u. \quad (1.3')$$

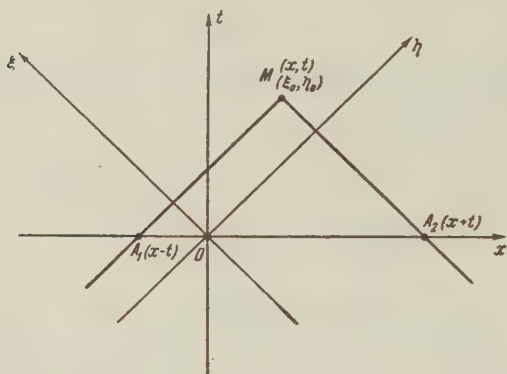
Рассматривая в уравнении (1.3') правую часть как известную функцию, мы можем заменить его, совместно с начальными условиями (1.4), следующим интегральным уравнением [см. (7)]:

$$u(x, t; f) = \frac{1}{2} \{f(x+t) + f(x-t)\} - \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \left\{ \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} q(z) u(z, \tau; f) dz \right\}. \quad (1.10)$$

Уравнение (1.10) можно решать методом последовательных приближений [см. (2)]. Положим

$$u_0(x, t; f) = \frac{1}{2} \{f(x+t) + f(x-t)\},$$

$$u_k(x, t; f) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \left\{ \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} q(z) u_{k-1}(z, \tau; f) dz \right\} \quad (k = 1, 2, \dots).$$



Тогда

$$u(x, t; f) = u_0(x, t; f) - u_1(x, t; f) + u_2(x, t; f) - \dots \quad (1.11)$$

Покажем, что каждую из функций $u_k(x, t; f)$ ($k = 1, 2, \dots$) можно представить в виде

$$u_k(x, t; f) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} w_k(x, t, s) f(s) ds. \quad (1.12)$$

При $k = 1$ имеем:

$$\begin{aligned} u_1(x, t; f) &= \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \left\{ \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} q(z) \cdot \frac{1}{2} [f(z+\tau) + f(z-\tau)] dz \right\} = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} q(z) f(z+\tau) dz + \frac{1}{4} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} q(z) f(z-\tau) dz = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^t d\tau \int_{x-t+2\tau}^{x+t} q(s-\tau) f(s) ds + \frac{1}{4} \int_0^t d\tau \int_{x-t}^{x+t-2\tau} q(s+\tau) f(s) ds. \end{aligned}$$

Меняя порядок интегрирования, находим:

$$\begin{aligned} u_1(x, t; f) &= \frac{1}{4} \int_{x-t}^{x+t} f(s) ds \int_0^{\frac{1}{2}(s-x+t)} q(s-\tau) d\tau + \\ &+ \frac{1}{4} \int_{x-t}^{x+t} f(s) ds \int_0^{\frac{1}{2}(x-s+t)} q(s+\tau) d\tau = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} f(s) ds \left\{ \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}(x+s-t)}^{\frac{1}{2}(x+s+t)} q(\tau) d\tau \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получим формулу (1.12), если положим

$$w_1(x, t, s) = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}(x-s-t)}^{\frac{1}{2}(x+s+t)} q(\tau) d\tau.$$

При $k = 2$ имеем:

$$u_2(x, t; f) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \left\{ \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} q(z) dz \left[\frac{1}{2} \int_{z-\tau}^{z+\tau} f(s) w_1(z, \tau, s) ds \right] \right\}.$$

Меняя порядок интегрирования так, чтобы внешний интеграл брался по s , получим:

$$\begin{aligned} u_2(x, t; f) = & \frac{1}{4} \int_{x-t}^{x+t} f(s) ds \left\{ \int_{\frac{1}{2}(s-x+t)}^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{s+\tau} q(z) w_1(z, \tau, s) dz + \right. \\ & + \int_{\frac{1}{2}(x-s+t)}^t d\tau \int_{s-\tau}^{x+t-\tau} q(z) w_1(z, \tau, s) dz \left. \right\} + \\ & + \frac{1}{2} \int_{x-t}^x f(s) ds \int_0^{\frac{1}{2}(s-x+t)} d\tau \int_{s-\tau}^{s+\tau} q(z) w_1(z, \tau, s) dz + \\ & + \frac{1}{2} \int_x^{x+t} f(s) ds \int_0^{\frac{1}{2}(x-s+t)} d\tau \int_{s-\tau}^{s+\tau} q(z) w_1(z, \tau, s) dz. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} w_2^{(1)}(x, t, s) = & \left. \begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}(s-x+t)}^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{s+\tau} q(z) w_1(z, \tau, s) dz + \\ & + \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}(x-s+t)}^t d\tau \int_{s-\tau}^{x+t-\tau} q(z) w_1(z, \tau, s) dz, \end{aligned} \right\} \\ w_2^{(2)}(x, t, s) = & \left\{ \begin{aligned} & \int_0^{\frac{1}{2}(s-x+t)} d\tau \int_{s-\tau}^{s+\tau} q(z) w_1(z, \tau, s) dz, & x-t \leq s \leq x, \\ & \int_0^{\frac{1}{2}(x-s+t)} d\tau \int_{s-\tau}^{s+\tau} q(z) w_1(z, \tau, s) dz, & x \leq s \leq x+t, \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (1.14)$$

и положим

$$w_2(x, t, s) = w_2^{(1)}(x, t, s) + w_2^{(2)}(x, t, s).$$

В силу (1.14), из (1.13) получим формулу (1.12) при $k = 2$, т. е.

$$u_2(x, t; f) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} f(s) w_2(x, t, s) ds.$$

Аналогичным образом формулу (1.12) получим и для $k \geq 3$. В силу (1.7'), (1.11), (1.12) и единственности решения задачи (1.3)—(1.4), получим:

$$w(x, t, s) = -w_1(x, t, s) + w_2(x, t, s) - w_3(x, t, s) + \dots \quad (1.15)$$

Из дифференцируемости функций $w_k(x, t, s)$ по x и сходимости рядов, полученных почленным дифференцированием ряда (1.15), следует

ЛЕММА 1.1. Если функция $q(x)$ имеет $(k-1)$ -ю производную, то функция $w(x, t, s)$ имеет k -ю производную по x .

Если вместо функции $f(x)$ в начальных условиях (1.4) мы подставим функцию $\varphi(x, \mu)$, т. е. решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям (1.2), и решим задачу (1.3)—(1.4) по методу Фурье, то, в силу единственности решения задачи (1.3)—(1.4), из формулы (1.7') мы получим формулу:

$$\begin{aligned} \varphi(x, \mu) \cos \mu t &= \frac{1}{2} \{ \varphi(x+t, \mu) + \varphi(x-t, \mu) \} + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} w(x, t, s) \varphi(s, \mu) ds, \end{aligned}$$

которая в дальнейшем будет играть важную роль.

§ 2. Предварительная оценка производных спектральной функции

Рассмотрим задачу (1.1)—(1.2) при тех же предположениях, что и прежде. Для произвольного действительного t мы в предыдущем параграфе получили формулу:

$$\begin{aligned} \varphi(x, \mu) \cos \mu t &= \frac{1}{2} \{ \varphi(x+t, \mu) + \varphi(x-t, \mu) \} + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} w(x, t, s) \varphi(s, \mu) ds, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\varphi(x, \mu)$ — решение задачи (1.1)—(1.2).

Обозначим через $g_\varepsilon(t)$ функцию, удовлетворяющую следующим условиям:

1. $g_\varepsilon(t)$ четна, т. е. $g_\varepsilon(t) = g_\varepsilon(-t)$,
 2. $g_\varepsilon(t)$ обращается в нуль вне интервала $(-\varepsilon, \varepsilon)$,
 3. $g_\varepsilon(t)$ имеет непрерывную вторую производную.
- $$\left. \vphantom{\begin{matrix} 1. \\ 2. \\ 3. \end{matrix}} \right\} \quad (2.2)$$

Обозначим через $\psi_\varepsilon(\mu)$ \cos -преобразование Фурье функции $g_\varepsilon(t)$, т. е.

$$\psi_\varepsilon(\mu) = \int_0^\pi g_\varepsilon(t) \cos \mu t dt. \quad (2.3)$$

Дифференцируя равенство (2.1) по x , получим:

$$\begin{aligned} \varphi'_x(x, \mu) \cos \mu t &= \frac{1}{2} \{ \varphi'_x(x+t, \mu) + \varphi'_x(x-t, \mu) \} + \\ &+ \frac{1}{2} \{ w(x, t, x+t) \varphi(x+t, \mu) - w(x, t, x-t) \varphi(x-t, \mu) \} + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} \varphi(s, \mu) ds. \end{aligned} \quad (2.4)$$

В силу равенств (1.9), равенство (2.4) принимает вид:

$$\begin{aligned} \varphi'_x(x, \mu) \cos \mu t &= \frac{1}{2} \{ \varphi'_x(x+t, \mu) + \varphi'_x(x-t, \mu) \} + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} \varphi(s, \mu) ds. \end{aligned} \quad (2.4')$$

Помножим обе части равенства (2.4') на $g_\varepsilon(t)$ и проинтегрируем по t от 0 до ε , после чего, в силу (2.3), получим:

$$\begin{aligned} \varphi'_x(x, \mu) \psi_\varepsilon(\mu) &= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^\varepsilon \varphi'_t(x+t, \mu) g_\varepsilon(t) dt - \right. \\ &\left. - \int_0^\varepsilon \varphi'_t(x-t, \mu) g_\varepsilon(t) dt \right\} + \frac{1}{2} \int_0^\varepsilon g_\varepsilon(t) \left\{ \int_{x-t}^{x+t} \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} \varphi(s, \mu) ds \right\} dt. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Преобразуем первый член в правой части равенства (2.5). Интегрируя по частям, найдем:

$$\begin{aligned} \int_0^\varepsilon \varphi'_t(x+t, \mu) g_\varepsilon(t) dt &= -\varphi(x, \mu) g_\varepsilon(0) - \int_0^\varepsilon \varphi(x+t, \mu) g'_\varepsilon(t) dt, \\ \int_0^\varepsilon \varphi'_t(x-t, \mu) g_\varepsilon(t) dt &= -\varphi(x, \mu) g_\varepsilon(0) - \int_0^\varepsilon \varphi(x-t, \mu) g'_\varepsilon(t) dt. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^\varepsilon \varphi'_t(x+t, \mu) g_\varepsilon(t) dt - \frac{1}{2} \int_0^\varepsilon \varphi'_t(x-t, \mu) g_\varepsilon(t) dt &= \\ = -\frac{1}{2} \int_0^\varepsilon \varphi(x+t, \mu) g'_\varepsilon(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^\varepsilon \varphi(x-t, \mu) g'_\varepsilon(t) dt = \\ = -\frac{1}{2} \int_x^{x+\varepsilon} \varphi(s, \mu) \frac{\partial g_\varepsilon(s-x)}{\partial s} ds - \frac{1}{2} \int_{x-\varepsilon}^x \varphi(s, \mu) \frac{\partial g_\varepsilon(s-x)}{\partial s} ds = \\ = -\frac{1}{2} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \varphi(s, \mu) \frac{\partial g_\varepsilon(s-x)}{\partial s} ds. \end{aligned} \quad (2.6)$$

В силу равенства (2.6), равенство (2.5) принимает вид:

$$\varphi'_x(x, \mu) \psi_\varepsilon(\mu) = -\frac{1}{2} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \varphi(s, \mu) \frac{\partial g_\varepsilon(s-x)}{\partial s} ds + \frac{1}{2} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \varphi(s, \mu) \chi_\varepsilon(x, s) ds, \quad (2.7)$$

где

$$\chi_\varepsilon(x, s) = \int_{|x-s|}^{\varepsilon} \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} g_\varepsilon(t) dt.$$

Положим

$$g_\varepsilon(t, a) = g_\varepsilon(t) \cos at,$$

где a — произвольное действительное число. Вычислим cos-преобразование Фурье функции $g_\varepsilon(t, a)$. В силу (2.3), имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^\varepsilon g_\varepsilon(t, a) \cos \mu t dt &= \int_0^\varepsilon g_\varepsilon(t) \cos at \cdot \cos \mu t dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\varepsilon g_\varepsilon(t) \{ \cos(\mu + a)t + \cos(\mu - a)t \} dt = \frac{1}{2} \{ \psi_\varepsilon(\mu + a) + \psi_\varepsilon(\mu - a) \}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Так как функция $g_\varepsilon(t, a)$ удовлетворяет условиям (2.2), то, заменяя в равенстве (2.7) $g_\varepsilon(t)$ на $g_\varepsilon(t, a)$, получим, в силу (2.8):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \varphi'_x(x, \mu) \{ \psi_\varepsilon(\mu + a) + \psi_\varepsilon(\mu - a) \} &= \\ = \frac{1}{2} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \varphi(s, \mu) \left\{ \frac{\partial g_\varepsilon(s-x, a)}{\partial x} + \chi_\varepsilon(x, s, a) \right\} ds, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где

$$\chi_\varepsilon(x, s, a) = \int_{|x-s|}^{\varepsilon} \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} g_\varepsilon(t, a) dt.$$

Пусть функция $f(x) \in L_2(0, \infty)$. Обозначим через $F(\mu)$ преобразование Фурье функции $f(x)$ (по собственным функциям $\varphi(x, \mu)$), т. е. положим

$$F(\mu) = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{A} \int_0^A f(x) \varphi(x, \mu) dx. \quad (2.10)$$

Тогда, в силу равенства Парсеваля, из (2.9) и (2.10) следует:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu) \{ \psi_\varepsilon(\mu + a) + \psi_\varepsilon(\mu - a) \} \varphi'_x(x, \mu) d\mu &= \\ = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(s) \left\{ \frac{\partial g_\varepsilon(s-x, a)}{\partial x} + \chi_\varepsilon(x, s, a) \right\} ds. \end{aligned} \quad (2.11)$$

В силу произвольности функции $f(x)$, из (2.11) следует тождество:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'_x(x, \mu) \varphi(s, \mu) \{ \psi_\varepsilon(\mu + a) + \psi_\varepsilon(\mu - a) \} d\mu &= \\ = \begin{cases} \frac{\partial g_\varepsilon(s-x, a)}{\partial x} + \chi_\varepsilon(x, s, a), & |x-s| \leq \varepsilon, \\ 0, & |x-s| \geq \varepsilon. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Дифференцируя тождество (2.12) по s , находим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi'_x(x, \mu) \varphi'_s(s, \mu) \{ \psi_\varepsilon(\mu + a) + \psi_\varepsilon(\mu - a) \} d\rho(\mu) =$$

$$= \begin{cases} \frac{\partial^2 g_\varepsilon(s-x, a)}{\partial x \partial s} + g_\varepsilon(x-s, a) \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} \Big|_{t=|x-s|} + \\ + \int_0^\varepsilon g_\varepsilon(t, a) \frac{\partial^2 w(x, t, s)}{\partial x \partial s} dt, & |x-s| \leq \varepsilon, \\ 0, & |x-s| \geq \varepsilon. \end{cases} \quad (2.13)$$

В силу определения спектральной функции $\theta(x, s; \mu)$, тождество (2.13) примет вид (см. обозначение (0.3) во введении):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{ \psi_\varepsilon(\mu + a) + \psi_\varepsilon(\mu - a) \} d\mu \frac{\partial^2 \theta(x, s; \mu)}{\partial x \partial s} =$$

$$= \begin{cases} \frac{\partial^2 g_\varepsilon(s-x, a)}{\partial x \partial s} - g_\varepsilon(s-x, a) \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} \Big|_{t=|x-s|} + \\ + \int_0^\varepsilon g_\varepsilon(t, a) \frac{\partial^2 w(x, t, s)}{\partial x \partial s} dt, & |x-s| \leq \varepsilon, \\ 0, & |x-s| \geq \varepsilon. \end{cases} \quad (2.13')$$

Пользуясь нечетностью функции $\theta(x, s; \mu)$ относительно μ , из тождества (2.13') при $x=s$ получим:

$$2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu - a) d\mu \frac{\partial^2 \theta(x, s; \mu)}{\partial x \partial s} \Big|_{s=x} =$$

$$= g''_\varepsilon(0, a) + \int_0^\varepsilon g_\varepsilon(t, a) \frac{\partial^2 w(x, t, s)}{\partial x \partial s} \Big|_{s=x} dt. \quad (2.14)$$

Тождество (2.14) позволит нам оценить производные спектральной функции $\theta(x, s; \mu)$ при больших μ .

ЛЕММА 2.1. Если функция $q(x)$ в каждом конечном интервале имеет суммируемую первую производную, то при $a \rightarrow \infty$ имеет место оценка:

$$\bigvee_a^{a+1} \left\{ \frac{\partial^2 \theta(x, s; \mu)}{\partial x \partial s} \right\}_{s=x} = \int_a^{a+1} [\varphi'_x(x, \mu)]^2 d\rho(\mu) = O(a^2). \quad (2.15)$$

Оценка (2.15) имеет место равномерно в каждом конечном интервале.

Доказательство. В силу леммы 1.1 и определения функции $g_\varepsilon(t, a)$, для больших a из тождества (2.14) следует оценка:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu - a) d\mu \frac{\partial^2 \theta(x, s; \mu)}{\partial x \partial s} \Big|_{s=x} = O(a^2). \quad (2.16)$$

В качестве функции $g_\varepsilon(t)$ возьмем функцию

$$g_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon^2} (\varepsilon - |t|), & |t| \leq \varepsilon, \\ 0, & |t| \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Вычислим ее cos-преобразование Фурье. Имеем:

$$\psi_{\varepsilon}(\mu - a) = \int_0^{\varepsilon} g_{\varepsilon}(t) \cos(\mu - a)t dt = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \frac{(\mu - a)\varepsilon}{2}}{\left[\frac{(\mu - a)\varepsilon}{2}\right]^2}.$$

Подставляя значение $\psi_{\varepsilon}(\mu - a)$ в (2.16), получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 v}{v^2} dv \frac{\partial^2 \theta(x, s; v + a)}{\partial x \partial s} \Big|_{s=x} = O(a^2).$$

Значит, тем более,

$$\int_0^1 \frac{\sin^2 v}{v^2} dv \frac{\partial^2 \theta(x, s; v + a)}{\partial x \partial s} \Big|_{s=x} = O(a^2). \quad (2.17)$$

Как известно, для $0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$ $\frac{\sin v}{v} \geq \frac{2}{\pi}$. Поэтому

$$\int_0^1 \frac{\sin^2 v}{v^2} dv \frac{\partial^2 \theta(x, s; v + a)}{\partial x \partial s} \Big|_{s=x} \geq \frac{4}{\pi^2} \left\{ \frac{\partial^2 \theta(x, s; a+1)}{\partial x \partial s} - \frac{\partial^2 \theta(x, s; a)}{\partial x \partial s} \right\}_{s=x}. \quad (2.18)$$

В силу монотонности функции $\theta(x, s; \mu)$ относительно μ , лемма следует из оценок (2.17) и (2.18).

Совершенно аналогично доказывается следующая

ЛЕММА 2.2. Если функция $q(x)$ в каждом конечном интервале имеет суммируемую $(2k-1)$ -ю производную, то при $a \rightarrow \infty$ имеет место оценка:

$$\bigvee_a^{a+1} \left\{ \frac{\partial^{2k} \theta(x, s; \mu)}{\partial x^k \partial s^k} \right\}_{s=x} = \int_a^{a+1} \{\varphi_x^{(k)}(x, \mu)\}^2 d\rho(\mu) = O(a^{2k}) \quad (k=1, 2, \dots). \quad (2.19)$$

Оценка (2.19) имеет место равномерно в каждом конечном интервале.

Из леммы 2.2 и неравенства Коши — Буняковского следует

ЛЕММА 2.3. Если функция $q(x)$ в каждом конечном интервале имеет суммируемую $(n-1)$ -ю производную, то при $a \rightarrow \infty$ имеет место оценка;

$$\begin{aligned} & \bigvee_a^{a+1} \left\{ \frac{\partial^n \theta(x, s; \mu)}{\partial x^k \partial s^j} \right\} = \\ & = \int_a^{a+1} |\varphi_x^{(k)}(x, \mu) \varphi_s^{(j)}(s, \mu)| d\rho(\mu) = O(a^n) \quad (k+j=n=1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Оценка (2.20) имеет место равномерно в каждом конечном интервале.

Из определения функции $\theta^*(x, s; \mu)$ (см. формулу (0.4) во введении) непосредственно следует

ЛЕММА 2.4. При $a \rightarrow \infty$ имеет место оценка:

$$\bigvee_a^{a+1} \left\{ \frac{\partial^n \theta^*(x, s; \mu)}{\partial x^k \partial s^j} \right\} = O(a^n) \quad (k+j=n=1, 2, \dots). \quad (2.21)$$

Оценка (2.21) имеет место равномерно на всей полупрямой $(0, \infty)$.

§ 3. Асимптотическое поведение производных спектральной функции

Формула (2.12) позволит нам исследовать асимптотическое поведение производных спектральной функции $\theta(x, s; \mu)$. Чтобы изучить асимптотическое поведение производных спектральной функции задачи (1.1) — (1.2), мы будем сравнивать их с производными спектральной функции более простой задачи, а именно, задачи

$$y'' + \lambda y = 0 \quad (\lambda > 0), \quad (3.1)$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \quad (3.2)$$

Заменяя в тождестве (2.12) $g_\varepsilon(t, a)$ на $g_\varepsilon(t)$, получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi'_x(x, \mu) \varphi(s, \mu) \psi_\varepsilon(\mu) d\mu = \begin{cases} \frac{\partial g_\varepsilon(s-x)}{\partial x} + \chi_\varepsilon(x, s), & |x-s| \leq \varepsilon, \\ 0, & |x-s| \geq \varepsilon. \end{cases} \quad (3.3)$$

С помощью спектральной функции $\theta(x, s; \mu)$ тождество (3.3) примет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu) d\mu \frac{\partial \theta(x, s; \mu)}{\partial x} = \begin{cases} \frac{\partial g_\varepsilon(s-x)}{\partial x} + \chi_\varepsilon(x, s), & |x-s| \leq \varepsilon, \\ 0, & |x-s| \geq \varepsilon. \end{cases} \quad (3.3')$$

Выписывая для функции $\theta^*(x, s; \mu)$, т. е. для спектральной функции задачи (3.1)—(3.2), формулу, аналогичную формуле (3.3'), вычитая ее из (3.3') и учитывая, что для задачи (3.1)—(3.2) $w(x, t, s) \equiv 0$, получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu) d\mu \left\{ \frac{\partial \theta(x, s; \mu)}{\partial x} - \frac{\partial \theta^*(x, s; \mu)}{\partial x} \right\} = \begin{cases} \chi_\varepsilon(x, s), & |x-s| \leq \varepsilon, \\ 0, & |x-s| \geq \varepsilon, \end{cases} \quad (3.4)$$

где

$$\chi_\varepsilon(x, s) = \int_{|x-s|}^{\varepsilon} g_\varepsilon(t) \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} dt. \quad (3.5)$$

Положим

$$\alpha(x, s; \mu) = \int_{|x-s|}^{\varepsilon} \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} \cos \mu t dt. \quad (3.6)$$

В силу равенства Парсеваля, из (2.3), (3.5) и (3.6) следует:

$$\begin{aligned} \int_{\bullet}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu) \alpha(x, s; \mu) d\mu &= \frac{\pi}{2} \int_{|x-s|}^{\varepsilon} g_\varepsilon(t) \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} dt = \\ &= \begin{cases} \frac{\pi}{2} \chi_\varepsilon(x, s), & |x-s| \leq \varepsilon, \\ 0, & |x-s| \geq \varepsilon. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Из четности функций $\psi_\varepsilon(\mu)$ и $\alpha(x, s; \mu)$ по μ и в силу (3.7) формула (3.4) примет вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu) d\mu \left\{ \frac{\partial \theta(x, s; \mu)}{\partial x} - \frac{\partial \theta^*(x, s; \mu)}{\partial x} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\mu} \alpha(x, s; \nu) d\nu \right\} = 0. \quad (3.8)$$

ТЕОРЕМА 3.1. Если функция $q(x)$ суммируема в каждом конечном интервале, то при каждом фиксированных x и s и при $\mu \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая оценка:

$$\left| \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{v^2}{\mu^2}\right) dv \left\{ \frac{\partial \theta(x, t; v)}{\partial x} - \frac{\partial \theta^*(x, s; v)}{\partial x} \right\} \right| < C,$$

где константа C зависит от интервала изменения x и s и не зависит от μ . *

Доказательство. В силу лемм 2.3 и 2.4 (при $n=1$ и $j=0$), применима тауберова теорема Б. М. Левитана [см. теорему 1.4.3 работы (8)], согласно которой из формулы (3.8) при $\mu \rightarrow \infty$ следует оценка:

$$\begin{aligned} \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{v^2}{\mu^2}\right) dv \left\{ \frac{\partial \theta(x, s; v)}{\partial x} - \frac{\partial \theta^*(x, s; v)}{\partial x} \right\} = \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{v^2}{\mu^2}\right) \alpha(x, s; v) dv + O(1). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Вычислим интеграл в правой части (3.9). В силу (3.6), имеем:

$$\int_0^{\mu} \left(1 - \frac{v^2}{\mu^2}\right) \alpha(x, s; v) dv = \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{v^2}{\mu^2}\right) \left\{ \int_{|x-s|}^1 \frac{\partial w(x, s, t)}{\partial x} \cos vt dt \right\} dv.$$

Меняя порядок интегрирования, найдем:

$$\begin{aligned} \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{v^2}{\mu^2}\right) \alpha(x, s; v) dv = \\ = \int_{|x-s|}^1 \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} \left\{ \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{v^2}{\mu^2}\right) \cos vt dv \right\} dt. \end{aligned} \quad (3.10)$$

* **Примечание при корректуре.** После того как настоящая статья была сдана в печать, мы ознакомились с работой В. А. Марчевко (13) и нам удалось, используя тауберову теорему 4.1 вышеупомянутой работы, уточнить асимптотическую формулу для производных спектральной функции [см. (14)], а именно доказать следующую теорему.

Теорема. Если функция $q(x)$ суммируема в каждом конечном интервале, то при каждом фиксированных x и s справедлива асимптотическая формула:

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{v^2}{\mu^2}\right) dv \left[\frac{\partial \theta(x, s; v)}{\partial x} - \frac{\partial \theta^*(x, s; v)}{\partial x} \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{V 2\pi} \mu \int_{|x-s|}^1 \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} \frac{I_3(\mu t)}{(\mu t)^{\frac{3}{2}}} dt \right\} = 0, \end{aligned}$$

где $I_p(x)$ — функция Бесселя первого рода порядка p . Эта формула имеет место равномерно в каждом конечном интервале изменения x и s .

Аналогичные формулы имеют место и для старших производных.

Как известно [см. (9), стр. 234],

$$\int_0^{\mu} \left(1 - \frac{v^2}{\mu^2}\right) \cos vt \, dv = \sqrt{2\pi} \mu \frac{I_3(\mu t)}{(\mu t)^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.11)$$

Тогда, в силу формул (3.10) и (3.11), получим:

$$\int_0^{\mu} \left(1 - \frac{v^2}{\mu^2}\right) \alpha(x, s; v) \, dv = \sqrt{2\pi} \mu \int \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} \cdot \frac{I_3(\mu t)}{(\mu t)^{\frac{3}{2}}} dt.$$

В силу суммируемости функции $q(x)$ в каждом конечном интервале и асимптотики функций Бесселя при больших значениях аргумента, легко убедиться в справедливости (при $\mu \rightarrow \infty$) оценки:

$$\mu \int_{|x-s|}^1 \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} \cdot \frac{I_3(\mu t)}{(\mu t)^{\frac{3}{2}}} dt = O(1),$$

что, в силу (3.9), и доказывает теорему.

Аналогично доказывается следующая

ТЕОРЕМА 3.2. Если функция $q(x)$ в каждом конечном интервале имеет суммируемую первую производную, то при каждом фиксированных x и s и при $\mu \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая оценка:

$$\left| \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{v^2}{\mu^2}\right)^2 dv \left\{ \frac{\partial^2 \theta(x, s; v)}{\partial x \partial s} - \frac{\partial^2 \theta^*(x, s; v)}{\partial x \partial s} \right\} \right| < C.$$

где константа C зависит от интервала изменения x и s и не зависит от μ .

Аналогичное утверждение справедливо и для старших производных спектральной функции $\theta(x, s; \mu)$.

§ 4. Некоторые вспомогательные леммы

Заменяя в равенстве (2.9) функцию $g_\varepsilon(t, a)$ на $g_\varepsilon(t)$, получим:

$$\varphi'_x(x, \mu) \psi_\varepsilon(\mu) = \frac{1}{2} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \varphi(s, \mu) \left\{ \frac{\partial g_\varepsilon(s-x)}{\partial x} + \chi_\varepsilon(x, s) \right\} ds. \quad (4.1)$$

Пусть $f(x) \in L_2(0, \infty)$. Обозначим через $F(\mu)$ преобразование Фурье функции $f(x)$ (по собственным функциям $\varphi(x, \mu)$), т. е. положим

$$F(\mu) = \lim_{A \rightarrow \infty} i \cdot m \int_0^A f(x) \varphi(x, \mu) dx. \quad (4.2)$$

Тогда, в силу равенства Парсеваля, из (4.1) и (4.2) следует:

$$\begin{aligned} & 2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu) \varphi'_x(x, \mu) F(\mu) d\mu = \\ & = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(s) \left\{ \frac{\partial g_\varepsilon(s-x)}{\partial x} + \chi_\varepsilon(x, s) \right\} ds. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Введем обозначения:

$$S(x, \mu) = \int_0^{\infty} f(s) \theta(x, s; \mu) ds = \int_0^{\mu} \varphi(x, \nu) F(\nu) d\rho(\nu),$$

$$S^*(x, \mu) = \int_0^{\infty} f(s) \theta^*(x, s; \mu) ds.$$

Тогда формула (4.3) примет вид:

$$2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\varepsilon}(\mu) d\mu \frac{\partial S(x, \mu)}{\partial x} = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(s) \left\{ \frac{\partial g_{\varepsilon}(s-x)}{\partial x} + \chi_{\varepsilon}(x, s) \right\} ds. \quad (4.4)$$

Выписывая для функции $S^*(x, \mu)$ формулу, аналогичную формуле (4.4), и вычитая ее из (4.4), найдем:

$$2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\varepsilon}(\mu) d\mu \left\{ \frac{\partial S(x, \mu)}{\partial x} - \frac{\partial S^*(x, \mu)}{\partial x} \right\} = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(s) \chi_{\varepsilon}(x, s) ds. \quad (4.5)$$

Формула (4.5) позволит нам суммировать первую производную разложения по собственным функциям оператора Штурма — Лиувилля. Предварительно необходимо оценить выражения:

$$\bigvee_a^{a+1} \left\{ \frac{\partial S(x, \mu)}{\partial x} \right\} = \int_a^{a+0} |\varphi'_x(x, \mu)| \cdot |F(\mu)| d\rho(\mu), \quad \bigvee_a^a \left\{ \frac{\partial S^*(x, \mu)}{\partial x} \right\}$$

при больших a .

ЛЕММА 4.1. Пусть $f(x) \in L_2(0, \infty)$. Если функция $q(x)$ имеет суммируемую первую производную в каждом конечном интервале, то при $a \rightarrow \infty$

$$\bigvee_a^{a+1} \left\{ \frac{\partial S(x, \mu)}{\partial x} \right\} = \int_a^{a+1} |\varphi'_x(x, \mu)| \cdot |F(\mu)| d\rho(\mu) = o(a). \quad (4.6)$$

Оценка (4.6) имеет место равномерно в каждом конечном интервале.

Доказательство. По определению, имеем:

$$\frac{\partial S(x, \mu)}{\partial x} = \int_0^{\mu} \varphi'_x(x, \mu) F(\mu) d\rho(\mu).$$

В силу неравенства Коши — Буняковского, отсюда следует:

$$\begin{aligned} \bigvee_a^{a+1} \left\{ \frac{\partial S(x, \mu)}{\partial x} \right\} &= \int_a^{a+1} |\varphi'_x(x, \mu)| \cdot |F(\mu)| d\rho(\mu) \leq \\ &\leq \left(\int_a^{a+1} [\varphi'_x(x, \mu)]^2 d\rho(\mu) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^{a+1} F^2(\mu) d\rho(\mu) \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

В силу леммы 2.1, имеем:

$$\int_a^{a+1} [\varphi'_x(x, \mu)]^2 d\rho(\mu) = O(a^2). \quad (4.7)$$

Далее, так как

$$\int_0^{\infty} F^2(\mu) d\rho(\mu) < \infty,$$

то, при $a \rightarrow \infty$, имеем:

$$\int_a^{a+1} F^2(\mu) d\rho(\mu) = o(1). \quad (4.8)$$

Из оценок (4.7) и (4.8) следует утверждение леммы. Аналогично доказывается

ЛЕММА 4.2. Пусть $f(x) \in L_2(0, \infty)$. Если функция $q(x)$ в каждом конечном интервале имеет суммируемую k -ю производную, то при $a \rightarrow \infty$

$$\bigvee_a^{a+1} \left\{ \frac{\partial^k S(x, \mu)}{\partial x^k} \right\} = \int_a^{a+1} |\varphi_x^{(k)}(x, \mu)| \cdot |F(\mu)| d\rho(\mu) = o(a^k) \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (4.9)$$

Оценка (4.9) имеет место равномерно в каждом конечном интервале.

Из определения функции $S^*(x, \mu)$ непосредственно следует

ЛЕММА 4.3. Пусть $f(x) \in L_2(0, \infty)$. При $a \rightarrow \infty$

$$\bigvee_a^{a+1} \left\{ \frac{\partial^k S^*(x, \mu)}{\partial x^k} \right\} = o(a^k) \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (4.10)$$

Оценка (4.10) имеет место равномерно на всей полупрямой $(0, \infty)$.

§ 5. Суммирование производных разложений по собственным функциям

В настоящем параграфе мы докажем теоремы о равной суммируемости производных разложения по собственным функциям оператора Штурма — Лиувилля и разложения в обычный интеграл Фурье по косинусам.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $f(x) \in L_2(0, \infty)$. Если функция $q(x)$ в каждом конечном интервале имеет суммируемую первую производную, то равномерно в каждом конечном интервале имеет место равенство

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right) d\nu \left\{ \frac{\partial S(x, \nu)}{\partial x} - \frac{\partial S^*(x, \nu)}{\partial x} \right\} = 0,$$

т. е. разность между средними по Рису первого порядка производных первого порядка разложения функции $f(x)$ по собственным функциям оператора Штурма — Лиувилля и разложения в обычный интеграл Фурье по косинусам стремится к нулю равномерно в каждом конечном интервале.

Доказательство. В предыдущем параграфе мы получили формулу [(4.5)]:

$$2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\varepsilon}(\mu) d\mu \left\{ \frac{\partial S(x, \mu)}{\partial x} - \frac{\partial S^*(x, \mu)}{\partial x} \right\} = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(s) \chi_{\varepsilon}(x, s) ds, \quad (5.1)$$

где

$$\chi_{\varepsilon}(x, s) = \int_{|x-s|}^{\varepsilon} \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} g_{\varepsilon}(t) dt.$$

Положим

$$h(x, t) = \int_{x-t}^{x+t} \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} f(s) ds, \quad (5.2)$$

$$\alpha(x, \mu) = \int_0^1 h(x, t) \cos \mu t dt, \quad (5.3)$$

$$\psi_\varepsilon(\mu) = \int_0^\varepsilon g_\varepsilon(t) \cos \mu t dt \quad (0 < \varepsilon \leq 1). \quad (5.4)$$

В силу равенства Парсеваля, из (5.3) и (5.4) следует:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu) \alpha(x, \mu) d\mu &= -\frac{\pi}{2} \int_0^\varepsilon g_\varepsilon(t) h(x, t) dt = \\ &= -\frac{\pi}{2} \int_0^\varepsilon g_\varepsilon(t) \left\{ \int_{x-t}^{x+t} \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} f(s) ds \right\} dt. \end{aligned}$$

Меняя порядок интегрирования в последнем интеграле, получим:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu) \alpha(x, \mu) d\mu &= -\frac{\pi}{2} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(s) \left\{ \int_{|x-s|}^\varepsilon \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} g_\varepsilon(t) dt \right\} ds = \\ &= -\frac{\pi}{2} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(s) \chi_\varepsilon(x, s) ds. \end{aligned} \quad (5.5)$$

В силу (5.5), формула (5.1) примет вид:

$$\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu) d\mu \left\{ \frac{\partial S(x, \mu)}{\partial x} - \frac{\partial S^*(x, \mu)}{\partial x} - \frac{1}{\pi} \int_0^\mu \alpha(x, \nu) d\nu \right\} \right\} = \quad (5.6)$$

При $a \rightarrow \infty$ очевидна справедливость следующей оценки:

$$\frac{a+1}{a} \int_0^\mu \alpha(x, \nu) d\nu = o(1). \quad (5.7)$$

Тогда, в силу лемм 4.1, 4.3 и оценки (5.7), применима тауберова теорема Б. М. Левитана [см. теорему 3.2.2. работы (8)], согласно которой из формулы (5.6) следует, что средние по Риссу первого порядка функции

$$\frac{\partial S(x, \mu)}{\partial x} - \frac{\partial S^*(x, \mu)}{\partial x} - \frac{1}{\pi} \int_0^\mu \alpha(x, \nu) d\nu$$

стремятся к нулю равномерно в каждом конечном интервале, т. е.

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_0^\mu \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right) d\nu \left\{ \frac{\partial S(x, \nu)}{\partial x} - \frac{\partial S^*(x, \nu)}{\partial x} - \frac{1}{\pi} \int_0^\nu \alpha(x, \sigma) d\sigma \right\} = 0,$$

или

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_0^\mu \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right) d\nu \left\{ \frac{\partial S(x, \nu)}{\partial x} - \frac{\partial S^*(x, \nu)}{\partial x} \right\} = \frac{1}{\pi} \lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_0^\mu \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right) \alpha(x, \nu) d\nu.$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что в каждом конечном интервале равномерно имеет место равенство:

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{v^2}{\mu^2}\right) \alpha(x, v) dv = 0. \quad (5.8)$$

В силу определения функции $\alpha(x, \mu)$, имеем:

$$\int_0^{\mu} \left(1 - \frac{v^2}{\mu^2}\right) \alpha(x, v) dv = \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{v^2}{\mu^2}\right) \left[\int_0^1 h(x, t) \cos vt dt \right] dv.$$

Меняя порядок интегрирования, получим:

$$\int_0^{\mu} \left(1 - \frac{v^2}{\mu^2}\right) \alpha(x, v) dv = \int_0^1 h(x, t) \left\{ \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{v^2}{\mu^2}\right) \cos vt dv \right\} dt. \quad (5.9)$$

Так как, по предположению, функция $q(x)$ в каждом конечном интервале имеет суммируемую первую производную, то она в каждом конечном интервале ограничена. Тогда из леммы 1.1 следует, что в каждом конечном интервале ограничена и функция $\frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x}$, так что из (5.2) находим:

$$|h(x, t)| < C \int_{-t}^{x+t} |f(s)| ds. \quad (5.10)$$

В силу неравенства Коши — Буняковского, из (5.10) получим:

$$|h(x, t)| C < \left(\int_{x-t}^{x+t} f^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{x-t}^{x+t} ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Так как функция $f(s)$ интегрируема с квадратом, то

$$|h(x, t)| < Ct^{\frac{1}{2}}. \quad (5.11)$$

Тогда из (5.9), (3.11) и (5.11) при $\mu \rightarrow \infty$ следует оценка:

$$\left| \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{v^2}{\mu^2}\right) \alpha(x, v) dv \right| < C \int_0^1 \frac{1}{\mu^{\frac{3}{2}}} \frac{|I_3(\mu t)|}{|(\mu t)^2|} dt = C \frac{1}{\mu^{\frac{1}{2}}} \int_0^{\mu} \frac{|I_3(z)|}{|z|} dz = O\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right),$$

что и доказывает равенство (5.8), а тем самым и теорему.

Совершенно аналогично доказывается следующая

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть $f(x) \in L_2(0, \infty)$. Если функция $q(x)$ в каждом конечном интервале имеет суммируемую вторую производную, то равномерно в каждом конечном интервале имеет место равенство

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{v^2}{\mu^2}\right)^2 dv \left\{ \frac{\partial^2 S(x, v)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 S^*(x, v)}{\partial x^2} \right\} = 0,$$

т. е. разность между средними по Риссу второго порядка производных второго порядка разложения функции $f(x)$ по собственным функциям оператора Штурма — Лиувилля и разложения в обычный интеграл Фурье по косинусам стремится к нулю равномерно в каждом конечном интервале.

Аналогичное утверждение справедливо и для старших производных разложения по собственным функциям оператора Штурма — Лиувилля.

Теоремы 5.1 и 5.2 показывают равную суммируемость производных разложений по собственным функциям оператора Штурма — Лиувилля и в обычный интеграл Фурье по косинусам функций с интегрируемым квадратом. Из этих теорем в работе ⁽¹¹⁾ мы получили теоремы о суммировании производных разложения по собственным функциям оператора Штурма — Лиувилля к соответствующим производным функции с интегрируемым квадратом. Для полноты приведем один из этих результатов.

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) функция $q(x)$ в каждом конечном интервале имеет суммируемую первую производную;
- 2) $f(x) \in L_2(0, \infty)$;
- 3) в некоторой окрестности точки x_0 $f'(x)$ существует и суммируема;
- 4) в точке x_0 $f'(x)$ непрерывна. Тогда

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{v^2}{\mu^2}\right) dv \frac{\partial S(x_0, v)}{\partial x} = f'(x_0),$$

т. е. первая производная разложения функции $f(x)$ по собственным функциям оператора Штурма — Лиувилля в точке x_0 суммируема по методу Рисса первого порядка к значению $f'(x_0)$.

Аналогичные теоремы имеют место и для старших производных разложения по собственным функциям оператора Штурма — Лиувилля.

Кроме теорем о суммировании производных разложения функции по собственным функциям оператора Штурма — Лиувилля имеет место и теорема о сходимости дважды дифференцированного разложения по собственным функциям, доказанная Б. М. Левитаном и автором в работе ⁽¹⁰⁾.

Как известно, всегда имеет место равенство Парсеваля, т. е. сходимость в среднем квадратичном интеграла Фурье, соответствующего задаче (1.1)—(1.2). Для того чтобы получить точечную сходимость интеграла Фурье, до недавнего времени на функцию накладывали довольно жесткие ограничения. В этом направлении известна теорема Г. Вейля [см., например, ⁽¹⁾, теорема 6.2.2].

Недавно Б. М. Левитан показал [см. ⁽²⁾], что точечная сходимость разложения функции с интегрируемым квадратом по собственным функциям оператора Штурма — Лиувилля имеет место при тех же предположениях, что и разложение функции в обычный интеграл Фурье по косинусам.

В работе ⁽¹⁰⁾ показано, что, по существу, при тех же условиях, что и в теореме Г. Вейля, имеет место не только сходимость самого разло-

жении к функции $f(x)$, но и сходимости второй производной разложения к $f''(x)$ (однако уже не абсолютно). Именно установлена

ТЕОРЕМА 5.4. Пусть выполнены следующие условия:

1) функция $q(x)$ в каждом конечном интервале имеет суммируемую первую производную;

$$2) f(x) \in L_2(0, \infty);$$

$$3) f''(x) \in L_2(0, \infty);$$

$$4) \{f''' - q(x)f\} \in L_2(0, \infty);$$

$$5) f'(0) = f'(\infty) = 0;$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) E'_\lambda(x) - f'(x) E_\lambda(x)\} = 0, \quad E_\lambda(x) = \int_0^\lambda \varphi(x, \mu) d\rho(\mu).$$

Положим

$$g(\lambda) = \int_0^\infty f(x) E_\lambda(x) dx.$$

Тогда интеграл

$$f''(x) = \int_{-\infty}^\infty \varphi''(x, \lambda) dg(\lambda)$$

равно сходится с разложением $f''(x)$ по косинусам в обычный интеграл Фурье.

Московский гос. университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
26. III. 1956.

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Левитан Б. М., Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка, Гостехиздат, М.—Л., 1950.
- ² Левитан Б. М., Об асимптотическом поведении спектральной функции и о разложении по собственным функциям самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 17 (1953), 331—364.
- ³ Левитан Б. М., Об асимптотическом поведении спектральной функции и о разложении по собственным функциям самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 19 (1955), 33—58.
- ⁴ Левитан Б. М., Об одной специальной тауберовой теореме, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 17 (1953), 269—284.
- ⁵ Горн, Дифференциальные уравнения в частных производных, Гостехиздат, М.—Л., 1938.
- ⁶ Левитан Б. М., Применение операторов обобщенного сдвига к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка, Успехи матем. наук, IV (1949), 3—112.
- ⁷ Курант Р. и Гильберт Д., Методы математической физики, Гостехиздат, М.—Л., 1950.
- ⁸ Левитан Б. М., О разложении по собственным функциям оператора Лапласа, Матем. сборн., 35 (77): 2 (1954), 267—316.
- ⁹ Титчмарш Е., Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, М.—Л., 1948.
- ¹⁰ Левитан Б. М. и Саргсян И. С., Теорема о сходимости дважды дифференцированного разложения по собственным функциям оператора Штурма — Лиувилля, Известия Ак. наук Арм. ССР, т. IX, № 3 (1956), 3—15.

- ¹¹ Саргсян И. С., Теоремы о суммировании производных разложений в обычный и обобщенный интеграл Фурье, Доклады Ак. наук Арм. ССР, т. XXIII, № 1 (1956), 3—8.
- ¹² Саргсян И. С., Суммирование производных разложения по собственным функциям оператора Штурма — Лиувилля, Доклады Ак. наук СССР, 104 (1955), 821—824.
- ¹³ Марченко В. А., Теоремы тауберова типа в спектральном анализе дифференциальных операторов, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 19 (1955), 381—422.
- ¹⁴ Саргсян И. С., Асимптотическое поведение производных спектральной функции оператора Штурма — Лиувилля, Известия Ак. наук Арм. ССР, X (1957).
-

А. В. ЕФИМОВ

ОЦЕНКА МОДУЛЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИЙ КЛАССА \tilde{H}_2^1

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым)

В работе устанавливается асимптотически точное равенство для верхней грани модулей непрерывности периодических квазигладких функций.

Обозначим через $\tilde{H}_2^1(M)$ класс непрерывных периода 2π функций $f(x)$, удовлетворяющих при любых x и $h > 0$ условию

$$|f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| \leq Mh. \quad (1)$$

Для этого класса при $M=1$ ставится задача: найти

$$\omega(h) = \sup_{f \in \tilde{H}_2^1(1)} \omega(h, f),$$

где $\omega(h, f)$ — модуль непрерывности функции $f(x)$.

А. Зигмунд ⁽¹⁾, используя методы теории приближения функций полиномами, установил, что

$$\omega(h) = O\left(h \ln \frac{1}{h}\right).$$

Затем Ф. И. Харшиладзе ⁽²⁾ получил этот результат, используя функции Стеклова.

А. Ф. Тиманом ⁽³⁾ исследовался класс $\Lambda(a, b)M$ непрерывных для $a \leq x \leq b$ функций $f(x)$, которые удовлетворяют условию (1) при любых $x \pm h \in [a, b]$ и нормировке $f(a) = f(b) = 0$. Им доказано, что если $f(x) \in \Lambda(a, b)1$, то

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x)| \leq \frac{1}{3}(b-a), \quad (2)$$

и

$$\omega^*(h) = \sup_{f \in \Lambda(a, b)1} \omega(h, f) = \frac{1}{2 \ln 2} h \ln \frac{1}{h} + O(h).$$

Из результатов А. Ф. Тимана ⁽³⁾ и А. Ф. Тимана и В. К. Дзядыка ⁽⁴⁾ вытекает, что

$$\frac{1}{6 \ln 2} h \ln \frac{1}{h} + O(h) \leq \omega(h) \leq \frac{1}{2 \ln 2} h \ln \frac{1}{h} + O(h).$$

Кроме того, А. Ф. Тиман [см. ⁽⁵⁾, стр. 88—91] показал, что

$$\omega(h) \leq \frac{2}{3 \ln 3} h \ln \frac{1}{h} + O(h).$$

В настоящей работе доказывается следующая

ТЕОРЕМА.

$$\omega(h) = \sup_{f \in \tilde{H}_2^1(1)} \omega(h, f) = \frac{1}{2 \ln(\sqrt{2} + 1)} h \ln \frac{1}{h} + O(h).$$

Найдем, прежде всего, к какому классу $\tilde{H}_2^1(M)$ принадлежит функция

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x = 0, \\ x \ln \frac{1}{x} & \text{при } 0 < x \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{\ln 2}{2} & \text{при } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{\ln 2}{\pi} x + \ln 2 & \text{при } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \\ -\varphi(-x) & \text{при } -\pi \leq x \leq 0, \\ \varphi(x + 2\pi) & \end{cases} \quad (3)$$

и при каком h в условии (1) будет иметь место знак равенства.

А. Ф. Тиманом [см. (3)] доказано, что

$$x \ln \frac{1}{x} \in \Lambda(0, 1) 2 \ln 2,$$

поэтому рассмотрим условие (1) для $h \geq x$; в силу условия $\varphi(x) = -\varphi(-x)$, неравенство (1) принимает вид:

$$|-\varphi(x+h) + 2\varphi(x) + \varphi(h-x)| \leq Mh.$$

Подставляя сюда нелинейную часть $\varphi(x)$, т. е. $x \ln \frac{1}{x}$, получим:

$$2x \ln \frac{1}{x} + (h-x) \ln \frac{1}{h-x} - (h+x) \ln \frac{1}{h+x} \leq Mh.$$

Положим $h = \alpha x$ ($\alpha > 1$); тогда

$$2x \ln \frac{1}{x} + x(\alpha-1) \ln \frac{1}{x(\alpha-1)} - x(1+\alpha) \ln \frac{1}{x(1+\alpha)} \leq M\alpha x,$$

т. е.

$$(\alpha-1) \ln \frac{1}{\alpha-1} - (\alpha+1) \ln \frac{1}{\alpha+1} \leq M\alpha.$$

Отсюда следует:

$$M \geq \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \ln(\alpha+1) - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \ln(\alpha-1),$$

и для наименьшего M , при котором выполняется условие (1), имеем:

$$M = \max_{\alpha} \left\{ \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \ln(\alpha+1) - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \ln(\alpha-1) \right\} = 2 \ln(\sqrt{2} + 1),$$

т. е.

$$M = 2 \ln(\sqrt{2} + 1).$$

Нетрудно проверить, что условие (1) при $M = 2 \ln(\sqrt{2} + 1)$ справедливо и для других x и h . Следовательно,

$$\varphi(x) \in \tilde{H}_2^1(2 \ln(\sqrt{2} + 1)),$$

причем точками, в которых в (1) достигается равенство, будут точки

$$h = x\sqrt{2} \quad \left(0 < x \leq \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right),$$

т. е. точки

$$(1 - \sqrt{2})x, \quad x, \quad (1 + \sqrt{2})x.$$

Отсюда заключаем, что функция

$$\varphi^*(x) = \frac{1}{2 \ln(\sqrt{2} + 1)} \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ определена формулой (3), принадлежит классу $\tilde{H}_2^1(1)$.

Для доказательства сформулированной выше теоремы докажем одну лемму.

ЛЕММА. Пусть Z — подкласс нечетных функций класса $\tilde{H}_2^1(1)$. Тогда

$$\varphi_1(x) = \sup_{f \in Z} |f(x)| = \frac{1}{2 \ln(\sqrt{2} + 1)} x \ln \frac{1}{x} + O(x).$$

Доказательство. Пусть $x > 0$. Так как при $h > x$ $f(x-h) = -f(h-x)$, то из условия (1) (при $M=1$) для $h = x\sqrt{2}$ имеем:

$$|-f((\sqrt{2}+1)x) + 2f(x) + f((\sqrt{2}-1)x)| \leq x\sqrt{2},$$

откуда при $x = (\sqrt{2}-1)^k \pi = \gamma^k \pi$, $\gamma = \sqrt{2}-1$, получим:

$$-f(\gamma^{k-1}\pi) + 2f(\gamma^k\pi) + f(\gamma^{k+1}\pi) \leq \pi\sqrt{2} \gamma^k \quad (k=1, 2, \dots). \quad (4)$$

Пусть C_k удовлетворяют условиям:

$$C_k + 2C_{k+1} - C_{k+2} = 0 \quad (k=1, 2, \dots),$$

$$C_1 = 1, \quad C_2 = 2;$$

отсюда следует, что

$$C_k = \frac{1}{2\sqrt{2}\gamma^k} [1 - (-1)^k \gamma^{2k}] > 0.$$

Умножая неравенства (4) на C_k , суммируя полученные неравенства по k от 1 до m и учитывая, что $f(\pi) = 0$, получим:

$$C_{m+1}f(\gamma^m\pi) + C_m f(\gamma^{m+1}\pi) \leq \pi\sqrt{2} \sum_{k=1}^m C_k \gamma^k,$$

т. е.

$$\begin{aligned} & \frac{1 - (-1)^{m+1}\gamma^{2m+2}}{2\sqrt{2}\gamma^{m+1}} f(\gamma^m\pi) + \frac{1 - (-1)^m\gamma^{2m}}{2\sqrt{2}\gamma^m} f(\gamma^{m+1}\pi) \leq \\ & \leq \frac{\pi\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \sum_{k=1}^m [1 - (-1)^k \gamma^{2k}]. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} & f(\gamma^m\pi) + \gamma \frac{1 - (-1)^m\gamma^{2m}}{1 - (-1)^{m+1}\gamma^{2m+2}} f(\gamma^{m+1}\pi) \leq \\ & \leq \frac{\pi\sqrt{2}\gamma^{m+1}}{1 - (-1)^{m+1}\gamma^{2m+2}} + \frac{\pi}{2} \gamma^{m+2} \frac{1 - (-1)^m\gamma^{2m}}{1 - (-1)^{m+1}\gamma^{2m+2}}, \end{aligned}$$

откуда следует:

$$f(\gamma^m \pi) + \gamma f(\gamma^{m+1} \pi) \leq \pi m \sqrt{2} \gamma^{m+1} + O(\gamma^m \pi). \quad (5)$$

Из условия (1) (при $M = 1$) для $h = x$ получаем:

$$|f(2x) - 2f(x)| \leq x.$$

Отсюда при $x = \gamma^{m+1} \pi$ находим, что

$$2f(\gamma^{m+1} \pi) \geq f(2\gamma^{m+1} \pi) - \gamma^{m+1} \pi. \quad (6)$$

Заметим, что на отрезках $I_m = [\gamma^{m+1} \pi, \gamma^m \pi]$ функция $f(x)$ отличается на $O(x)$ от линейной функции, совпадающей с $f(x)$ в точках $x = \gamma^m \pi$ $m = 1, 2, \dots$.

В самом деле, пусть $\psi(x)$ — такая линейная функция. Тогда

$$f(\gamma^m \pi) - \psi(\gamma^m \pi) = f(\gamma^{m+1} \pi) - \psi(\gamma^{m+1} \pi) = 0,$$

поэтому, применяя неравенство (2), имеем:

$$\max_{x \in I_m} |f(x) - \psi(x)| \leq \frac{1}{3} \gamma^m \pi (2 - \sqrt{2}) = O(x),$$

т. е.

$$f(x) = \psi(x) + O(x). \quad (7)$$

Так как $\gamma^{m+1} \pi < 2\gamma^{m+1} \pi < \gamma^m \pi$, то из линейности $\psi(x)$ на I_m следует:

$$\psi(2\gamma^{m+1} \pi) = \frac{\gamma \psi(\gamma^{m+1} \pi) + \psi(\gamma^m \pi)}{1 + \gamma},$$

и из (7) получим:

$$f(2\gamma^{m+1} \pi) = \frac{\gamma f(\gamma^{m+1} \pi) + f(\gamma^m \pi)}{1 + \gamma} + O(\gamma^m \pi).$$

Подставляя значение $f(2\gamma^{m+1} \pi)$ в (6), получаем:

$$f(\gamma^{m+1} \pi) \geq \frac{1}{2 + \gamma} f(\gamma^m \pi) + O(\gamma^m \pi).$$

Сопоставляя это неравенство с неравенством (5), имеем:

$$f(\gamma^m \pi) + \gamma^2 f(\gamma^m \pi) \leq \pi m \sqrt{2} \gamma^{m+1} + O(\gamma^m \pi),$$

откуда, после преобразований, находим:

$$f(\gamma^m \pi) \leq \frac{\pi}{2} m \gamma^m + O(\gamma^m \pi) \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Из этого неравенства и условия (7) заключаем, что функция $\psi^*(x)$ линейная на всех I_m и

$$\psi^*(\gamma^m \pi) = \frac{\pi}{2} m \gamma^m + O(\gamma^m \pi),$$

т. е. функция

$$\psi^*(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} x + O(x) & \text{при } x \in I_m \quad (m = 1, 2, \dots), \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

является мажорантой для класса Z .

Но если $\gamma^{m+1}\pi < x \leq \gamma^m\pi$, то

$$m \leq \frac{1}{\ln(V\sqrt{2}+1)} \ln \frac{1}{x} + O(1)$$

и, значит,

$$\psi^*(x) = \frac{1}{2 \ln(V\sqrt{2}+1)} x \ln \frac{1}{x} + O(x).$$

Мы получили, что для любой функции $f(x) \in Z$ при $x > 0$

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2 \ln(V\sqrt{2}+1)} x \ln \frac{1}{x} + O(x),$$

а следовательно, и

$$\varphi_1(x) = \sup_{f \in Z} |f(x)| \leq \frac{1}{2 \ln(V\sqrt{2}+1)} x \ln \frac{1}{x} + O(x). \quad (8)$$

Заметим, что функция

$$\frac{1}{2 \ln(V\sqrt{2}+1)} \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ определена формулой (3), принадлежит классу $\tilde{H}_2^1(1)$, а для такой функции в формуле (8) имеет место знак равенства. Таким образом,

$$\varphi_1(x) = \sup_{f \in Z} |f(x)| = \frac{1}{2 \ln(V\sqrt{2}+1)} x \ln \frac{1}{x} + O(x), \quad (9)$$

и лемма установлена.

Доказательство теоремы. Оценим

$$\sup_{f \in \tilde{H}_2^1(1)} |f(x_0 + h) - f(x_0)|.$$

Можно считать, что $f(x_0) = 0$, так как иначе можно было бы прибавить постоянную, и что $x_0 = 0$, так как иначе мы рассмотрели бы функцию $f_1(x) = f(x + x_0)$.

В силу того, что $f(0) = 0$, из условия (1) (при $M = 1$) для $x > 0$ имеем

$$|f(x) + f(-x)| \leq x,$$

т. е.

$$f(-x) = -f(x) + O(x). \quad (10)$$

Рассмотрим функцию

$$f_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \quad f_2(x) \in Z;$$

для нее, в силу (10), имеем:

$$f_2(x) = f(x) + O(x).$$

Таким образом, можно записать:

$$\sup_{f \in \tilde{H}_2^1(1)} |f(x_0 + h) - f(x_0)| = \sup_{f \in \tilde{H}_2^1(1)} |f(h)| = \sup_{f_2 \in Z} |f_2(h)| + O(h).$$

$f(0) = 0$

Но, по лемме,

$$\sup_{f \in \tilde{Z}} |f_2(h)| = \frac{1}{2 \ln(\sqrt{2} + 1)} h \ln \frac{1}{h} + O(h).$$

Следовательно, в силу монотонности главной части мажоранты, получаем, что

$$\begin{aligned} \omega(h) &= \sup_{f \in \tilde{H}_1^1(1)} \sup_{\delta \leq h} |f(x_0 + \delta) - f(x_0)| = \sup_{f \in \tilde{H}_1^1(1)} |f(x_0 + h) - f(x_0)| = \\ &= \sup_{f \in \tilde{Z}} |f_2(h)| + O(h), \end{aligned}$$

т. е.

$$\omega(h) = \sup_{f \in \tilde{H}_1^1(1)} \omega(h, f) = \frac{1}{2 \ln(\sqrt{2} + 1)} h \ln \frac{1}{h} + O(h).$$

Теорема доказана.

Отметим, что сведение задачи к нечетным функциям ранее проводилось А. Ф. Тиманом [см. (5)].

Выражаю глубокую благодарность С. Б. Стечкину за ценные советы и указания, данные им при выполнении настоящей работы.

Поступило
31. V. 1956

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Zygmund A., Smooth functions, Duke Mathem. J., 12 (1945), 47—76.
- ² Харшиладзе Ф. И., О модуле непрерывности некоторых классов функций, Ученые записки ЛГУ, сер. матем., 19 (1950), 155—159.
- ³ Тиман А. Ф., О квазигладких функциях, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 15 (1951), 243—254.
- ⁴ Тиман А. Ф. и Дзялык В. К., О наилучшем приближении квазигладких функций обыкновенными полиномами, Доклады Ак. наук СССР, 75 (1950), 499—501.
- ⁵ Тиман А. Ф., Исследования по теории приближений функций, Докторская диссертация, Харьков, 1951.

А. И. КОСТРИКИН

О СВЯЗИ МЕЖДУ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ГРУППАМИ
И КОЛЬЦАМИ ЛИ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым)

В работе рассматривается вопрос об эквивалентности ослабленной проблемы Бернсайда для показателя p и задачи о локальной нильпотентности кольца Ли характеристики p , удовлетворяющего $(p-1)$ -му условию Энгеля. Полученные результаты применяются к изучению структуры группы с двумя образующими и тождественным соотношением $x^p = 1$.

Введение

Приведенной свободной группе с q образующими $B_{q,p}$, получающейся наложением тождественного соотношения $x^p = 1$, где p — простое, соответствует некоторое фактор-кольцо $\bar{\mathfrak{L}}$ свободного целочисленного кольца Ли \mathfrak{L} , порожденного образующими x_1, \dots, x_q относительно операции $[uv] = uv - vu$; ядро A гомоморфизма \mathfrak{L} на $\bar{\mathfrak{L}}$ однозначно определяется группой $B_{q,p}$ [см. (1)]. \mathfrak{L} и A являются прямыми суммами модулей L_n и A_n однородных многочленов Ли степени n относительно x_1, \dots, x_q , принадлежащих кольцу \mathfrak{L} , соответственно идеалу A . Ранг L_n определяется по формуле Витта (2):

$$\psi_n(q) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) q^{\frac{n}{d}}. \quad (1)$$

Обозначим через B_i члены нижнего центрального ряда группы $B_{q,p}$:

$$B_1 = B_{q,p}, \quad B_i = [B_{i-1}, B_{q,p}]$$

и положим

$$B_\infty = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i, \quad \bar{B}_{q,p} = B_{q,p} / B_\infty.$$

Тогда $B_n / B_{n+1} \cong L_n - A_n$, а так как $p\mathfrak{L} \subset A$, то, в случае конечности, группа $\bar{B}_{q,p}$ будет иметь тот же порядок $\bar{h}_p(q)$, что и кольцо Ли $\bar{\mathfrak{L}}$. При этом $\bar{\mathfrak{L}}$ будет нильпотентным кольцом некоторого класса n_0 ($L_{n_0} = A_{n_0}$), $\bar{B}_{q,p}$ — нильпотентной группой класса $n_0 - 1$.

Пусть x и y — любые две из образующих x_1, \dots, x_q . Рациональную оболочку \mathfrak{L}_0 кольца \mathfrak{L} можно рассматривать как точное представление [см. (3)] свободной алгебры Ли в свободной ассоциативной алгебре \mathfrak{R} с единичным элементом 1 и образующими x_1, \dots, x_q над полем рациональных чисел. Если в \mathfrak{R} положить

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}; \quad e^y = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{y^i}{i!},$$

то, по формуле Бекера — Хаусдорфа [см. (4), (5)],

$$e^x e^y = e^{z(x, y)}, \quad (2)$$

$$z(x, y) = \sum_{n+m \geq 1} z_{n, m} = \sum_{i=0}^{\infty} z_{(i)} = \sum_{i=1}^{\infty} z_i,$$

где $z_{n, m}$ — компонента $z(x, y)$ степени n относительно x и m — относительно y ,

$$z_{(i)} = \sum_{k=0}^{\infty} z_{i, k}, \quad z_n = \sum_{i+k=n} z_{i, k};$$

$z_{(i)}$ вычисляется по рекуррентной формуле:

$$\left. \begin{aligned} z_{(i)} &= \frac{\omega_i(x, y)}{i!}, \\ \omega_i(x, y) &= \sum_{y \rightarrow \omega(x, y)} D \omega_{i-1}(x, y), \\ \omega_0 &= y, \quad \omega_1 \equiv \omega(x, y) = x + \frac{1}{2} [xy] + \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i [xy^{2i}], \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где $\pi_i = \frac{(-1)^{i-1} b_i}{(2i)!}$, b_i — числа Бернулли, D — оператор некоммутативного дифференцирования:

$$f(x, y + \alpha u) = f(x, y) + \alpha \sum_{y \rightarrow u} D f(x, y) + \alpha^2 \varphi(x, y).$$

В дальнейшем нам понадобится и понятие оператора обобщенного некоммутативного дифференцирования, некоторые свойства которого указаны в работе (6). Если $f(x_1, \dots, x_q)$ — произвольный многочлен Ли из \mathfrak{L} и

$$x'_i = \sum_{j=1}^{r_i} \alpha_{ij} u_{ij}, \quad i = 1, \dots, q,$$

где u_{ij} — любые элементы из \mathfrak{L} , α_{ij} — целые числа, то $\sum_{k_{ij} x_i \rightarrow u_{ij}} D f(x_1, \dots, x_q)$ — результат применения оператора D , или производная, — определяется из соотношения:

$$f(x'_1, \dots, x'_q) = \sum \alpha_{11}^{k_{11}} \dots \alpha_{1r_1}^{k_{1r_1}} \dots \alpha_{qr_q}^{k_{qr_q}} \sum_{\substack{k_{11} x_1 \rightarrow u_{11} \\ k_{1r_1} x_1 \rightarrow u_{1r_1} \\ k_{qr_q} x_q \rightarrow u_{qr_q}}} D f(x_1, \dots, x_q). \quad (4)$$

Пусть $w = \prod_{k=1}^r e^{x_i k}$ — произвольное слово относительно e^{x_1}, \dots, e^{x_q} ;

тогда, пользуясь (2), можно записать:

$$w = e^{l_n + l_{n+1} + \dots},$$

где $l_i(x_1, \dots, x_q)$ ($i = n, n+1, \dots$) — многочлены Ли степени i из \mathfrak{L}_0 , причем $l_n \in \mathfrak{L}$. По определению, $l_n \in A_n$ в том и только в том случае,

если

$$w = w_1^p w_2^p \dots w_s^p$$

при некотором наборе слов w_1, \dots, w_s . Это определение не инвариантно по отношению к выбору образующих кольца (группы) и не является чисто теоретико-кольцевым, так что утверждение о принадлежности любого ненулевого элемента $d \notin p\mathfrak{L}$ к идеалу A является далеко не тривиальным. Работами Ф. Холла (7), Цассенхауза (8), Санова (8), Магнуса (2) установлено, что

$$A \supseteq I = p\mathfrak{L} + I',$$

где I' — идеал в \mathfrak{L} , порожденный всеми элементами вида

$$[uv^{p-1}] = [\dots[[uv]v]\dots v], \quad u, v \in \mathfrak{L}.$$

Для положительного решения так называемой ослабленной проблемы Бернсайда, ставящей вопрос о конечности группы $\bar{B}_{q,p}$ (кольца $\bar{\mathfrak{L}} = \mathfrak{L}/A$), достаточно, следовательно, доказать нильпотентность кольца Ли $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}/I$ характеристики p , удовлетворяющего $(p-1)$ -му условию Энгеля:

$$[u_1 v_1^{p-1}] = 0 \quad \text{при любых } u_1, v_1 \in \mathfrak{L}_1.$$

Для решения вопроса об эквивалентности этих двух задач требуется полное выяснение связи между идеалами A и I . И. Н. Санов (8) доказал соотношение:

$$A_p + A_{p+1} + \dots + A_{2p-2} \subset I$$

и высказал гипотезу, что $A = I$. Из ее доказательства (для чего достаточно было бы показать, что $A \subseteq p\mathfrak{L} + I'$) вытекала бы возможность достаточно полного и точного изучения группы $B_{q,p}$ путем исследования кольца $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}/I$. Основной целью настоящей работы является доказательство включения

$$A \subset p\mathfrak{L} + I'_0 \cap \mathfrak{L},$$

где I'_0 — рациональная оболочка идеала I' .

Получено, кроме того, два новых равенства: $A_{2p-1} = I_{2p-1}$ и $A_{2p} = I_{2p}$. Прежде чем доказывать основные теоремы, целесообразно более детально рассмотреть однородные составляющие I_n идеала I . В § 1, где мы будем этим заниматься, \mathfrak{L} , A и I удобно считать кольцами Ли с областью операторов — полем вычетов по $\text{mod } p$, что вполне оправдано, поскольку $A \supset p\mathfrak{L}$ и $I \supset p\mathfrak{L}$. За образующие I_{p+n} можно тогда брать производные [см. (4)] $D[x y^{p-1}]$, для которых введем более компактное обозначение:

$$D[x y^{p-1}] = \langle u_0, k_1 u_1, \dots, k_r u_r \rangle,$$

$$\begin{array}{l} x \rightarrow u_0 \\ k_1 y \rightarrow u_1 \\ \vdots \\ k_r y \rightarrow u_r \end{array}$$

$$k_1 + \dots + k_r = p-1, \quad \text{ст } u_0 + k_1 \text{ст } u_1 + \dots + k_r \text{ст } u_r = p+n,$$

где u_0, u_1, \dots, u_r — базисные одночлены Ли кольца \mathfrak{L} . Значок $k_i y$ при $q=2$ ($x_1 = x, x_2 = y$) будем опускать. Например,

$$\langle u_0, u_1 \rangle = \sum_{i=0}^{p-2} [u_0 y^i u_1 y^{p-2-i}].$$

Ясно, что

$$\langle u_0, \underbrace{u_1, \dots, u_1}_{k_1}, \dots, \underbrace{u_1, \dots, u_1}_{k_r}, \dots \rangle = \frac{(k_1 + \dots + k_r)!}{k_1! \dots k_r!} \langle u_0, (k_1 + \dots + k_r) u_1, \dots \rangle.$$

Совокупность $\langle u_0, u_1, \dots, u_{p-1} \rangle$ с фиксированным первым элементом u_0 назовем аргументом производной, сами элементы u_i , $i = 0, \dots, p-1$, — компонентами аргумента (некоторые из них, естественно, могут совпадать друг с другом), число h компонент, степень которых > 1 , — высотой аргумента.

Пусть $\varphi_n(q)$ и $\delta_n(q)$ — ранги модулей I_n и A_n . Тогда B_n/B_{n+1} есть прямое произведение $k_n(q) = \psi_n(q) - \delta_n(q)$ циклических групп порядка p , а гипотеза о совпадении идеалов A и I эквивалентна равенству $\varphi_n(q) = \delta_n(q)$ для всех $n \geq p$.

§ 1. Оценки сверху для рангов модулей I_n

В определении производной $\langle u_0, u_1, \dots, u_{p-1} \rangle$ элемент u_0 , по сравнению с остальными u_i , занимает неравноправное положение. Покажем, что этого на самом деле нет.

ТЕОРЕМА 1. *Производная симметрична относительно всех компонент своего аргумента.*

Доказательство. Мы хотим доказать, что

$$\langle u_0, u_1, u_2, \dots, u_{p-1} \rangle = \langle u_1, u_0, \dots, u_{p-1} \rangle,$$

или

$$\langle u_0, (r_1 + 1) u_1, \dots, r_s u_s \rangle = \frac{1}{r_1 + 1} \langle u_1, u_0, r_1 u_1, \dots, r_s u_s \rangle.$$

В самом деле, пусть u — совершенно произвольный элемент из \mathfrak{L} . Тогда

$$\begin{aligned} \langle u_0, u_1, (p-2)u \rangle &= \sum_{i=0}^{p-2} [u_0 u^i u_1 u^{p-2-i}] = \\ &= - \sum_{i=0}^{p-2} [u_1 [u_0 u^i] u^{p-2-i}] = \sum_{i=0}^{p-2} \sum_{j=0}^i (-1)^{j+1} \binom{i}{j} [u_1 u^j u_0 u^{p-2-j}] = \\ &= \sum_{j=0}^{p-2} [u_1 u^j u_0 u^{p-2-j}] (-1)^{j+1} \sum_{i=j}^{p-2} \binom{i}{j} = \langle u_1, u_0, (p-2)u \rangle, \end{aligned}$$

так как

$$(-1)^{j+1} \sum_{i=j}^{p-2} \binom{i}{j} = (-1)^{j+1} \binom{p-1}{j+1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Положим $u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_s u_s$. Имеем:

$$\begin{aligned} \langle u_0, u_1, (p-2)(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_s u_s) \rangle - \langle u_1, u_0, (p-2)(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_s u_s) \rangle = \\ = \sum_{r_1 + \dots + r_s = p-2} \alpha_1^{r_1} \dots \alpha_s^{r_s} \{ \langle u_0, u_1, r_1 u_1, \dots, r_s u_s \rangle - \langle u_1, u_0, r_1 u_1, \dots, r_s u_s \rangle \} = 0. \end{aligned}$$

Обычный процесс линеаризации тождественного соотношения степени $\leq p$ относительно каждой из входящих в него переменных, возможный в ко-

нечном поле с числом элементов $\geq p$, приводит нас к нужному равенству:

$$\langle u_0, u_1, r_1 u_1, \dots, r_s u_s \rangle - \langle u_1, u_0, r_1 u_1, \dots, r_s u_s \rangle = 0.$$

Теорема доказана.

Установленное свойство производных можно, очевидно, выразить в записи:

$$\begin{aligned} (\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_s u_s)^p &= \sum_{i=1}^s \alpha_i u_i^p + \\ &+ \sum_{\substack{r_1 + \dots + r_s = p \\ r_j \geq 1, s \geq 2}} \alpha_1^{r_1} \dots \alpha_s^{r_s} \langle u_j, r_1 u_1, (r_j - 1) u_j, \dots, r_s u_s \rangle, \end{aligned} \quad (1.1)$$

что эквивалентно еще одному доказательству (и уточнению) тождества Джекобсона ⁽⁹⁾ — Артина ⁽⁸⁾.

Будем в дальнейшем предполагать $q=2$. Обозначим через $\varphi_{(m, p+n-m)}^*(\varphi_{p+n}^*)$ число производных веса $(m, p+n-m)$ (степени $p+n$), аргументы которых отличаются друг от друга хотя бы одной компонентой (перестановка последних, по доказанному, не меняет производной). Для рангов $\varphi_{p+n}^* = \varphi_{p+n}(2)$ модулей I_{p+n} имеем, очевидно, оценку сверху:

$$\varphi_{p+n}^* \leq \varphi_{p+n}^*. \quad (1.2)$$

Вычисление φ_{p+n}^* при небольших n не представляет никакого труда и является чисто комбинаторной задачей. Например,

$$\begin{aligned} \varphi_{p+4}^* &= \psi_5 \cdot p + \left\{ \psi_4 + \binom{\psi_3 + 1}{2} \right\} (p-1) + \psi_3 (p-2) + \\ &+ \psi_2 (p-3) = 15p - 13, \quad p \geq 5. \end{aligned}$$

Укажем ряд значений:

$\varphi_{p+n}^* \backslash p$	$p \geq 11$	$p = 7$	$p = 5$
$n = 0$	$p - 1$	$p - 1 = 6$	$p - 1 = 4$
$n = 1$	p	$p = 7$	$p = 5$
$n = 2$	$3p - 1$	$3p - 1 = 20$	$3p - 1 = 14$
$n = 3$	$6p - 4$	$6p - 4 = 38$	$6p - 4 = 26$
$n = 4$	$15p - 13$	$15p - 13 = 92$	$15p - 13 = 62$
$n = 5$	$30p - 34$	$30p - 34 = 176$	$30p - 34 = 116$
$n = 6$	$70p - 90$	$70p - 90 = 400$	
$n = 7$	$145p - 214$	$145p - 214 = 801$	
$n = 8$	$320p - 518$	$319p - 511 = 1722$	
$n = 9$	$672p - 1188$	$669p - 1166 = 3517$	
$n = 10$	$1447p - 2737$	$1438p - 2670 = 7396$	

Так как $\varphi_{7+10}^* < \varphi_{7+10}^* < \varphi_{17}^* = 7710$, то отсюда, между прочим, следует, что если $\Omega_1^{n_0} = 0$ при $p = 7$, то

$$n_0 > 17. \quad (1.3)$$

Совершенно очевидно, что $\varphi_{p+n}^* = \alpha_n p - \beta_n$, где α_n и β_n — неотрицательные целые числа, зависящие лишь от n ($n \leq p$). В работе ⁽¹¹⁾ Линдон

непосредственно изучает факторы B_n/B_{n+1} , основываясь на методе свободного дифференциального исчисления Фокса. Число определенных им главных одночленов степени $p+n$ обозначается через π_{p+n} . Легко видеть, что $\pi_{p+n} = \varphi_{p+n}^*$. Для α_n Линдон указывает производящую функцию:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n t^n = \prod_{s=1}^{\infty} (1 - t^s)^{-\psi_{s+1}} = 1 + t + 3t^2 + 6t^3 + 15t^4 + 30t^5 + 70t^6 + \dots$$

Если $n > p-2$, то оценку (1.2) можно уточнить.

ТЕОРЕМА 2.

$$\varphi_{2p-1} \leq \varphi_{2p-1}^* - (p-1)(p-2),$$

$$\varphi_{2p} \leq \varphi_{2p}^* - \frac{3p(p-3)+10}{2}.$$

Доказательство. Пусть $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — произвольные многочлены. Легко проверяется тождество:

$$\frac{D}{x \rightarrow [xv]} u(x, y) + \frac{D}{y \rightarrow [yv]} u(x, y) = [uv].$$

В частности,

$$\frac{D}{x \rightarrow [xy]} u(x, y) = [uy], \quad \frac{D}{y \rightarrow [xy]} u(x, y) = -[ux]. \quad (1.4)$$

Обозначим

$$\underbrace{\frac{D}{x \rightarrow v} \dots \frac{D}{x \rightarrow v}}_{n \text{ раз}} u = D^n u.$$

Используя эти замечания и свойство симметричности производных, доказанное в теореме 1, путем несложных комбинаторных рассуждений получаем соотношение:

$$\begin{aligned} \frac{D}{x \rightarrow \langle x, kx \rangle} [xy^n] &= \frac{D^n}{x \rightarrow [xy]} \langle x, kx \rangle = \\ &= \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_s = k+1 \\ i_1 k_1 + \dots + i_s k_s = n \\ i_1 > i_2 > \dots > i_s}} \frac{k+1}{k_1} \frac{n!}{(i_1!)^{k_1} \dots (i_s!)^{k_s}} \langle [xy^{i_1}], (k_1-1)[xy^{i_1}], \dots, k_s [xy^{i_s}] \rangle \\ &\quad (k = 1, \dots, p-2). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Если $p-1 \geq n \geq k+1$, то наибольшая высота аргумента у производных в правой части (1.5) равна, очевидно, $h = k+1$, причем соответствующие коэффициенты отличны от нуля.

Полагая $n = p-1$, получим:

$$\begin{aligned} [\langle x, kx \rangle y^{p-1}] &= \langle \langle x, kx \rangle \rangle = \\ &= \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_s = k+1 \\ i_1 k_1 + \dots + i_s k_s = p-1 \\ i_1 > i_2 > \dots > i_s}} \frac{k+1}{k_1} \frac{(p-1)!}{(i_1!)^{k_1} \dots (i_s!)^{k_s}} \langle [xy^{i_1}], (k_1-1)[xy^{i_1}], \dots, k_s [xy^{i_s}] \rangle, \\ &\quad (k = 1, 2, \dots, p-2). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Можно найти $m-1$ соотношений между производными веса $(m, 2p-1-m)$, $1 \leq m \leq p-1$, применяя оператор $\frac{D}{(m-1-k)y \rightarrow x}$ к соотношениям (1.6) при $k = 1, 2, \dots, m-1$. Получающиеся соотношения будут линейно независимыми, так как максимальные высоты аргументов входящих в них про-

изводных все различны. При $m > p - 1$ используем симметрию относительно x и y . Всего мы получим

$$\bar{\varphi}_{2p-1} = 2 \sum_{m=1}^{p-1} (m-1) = (p-1)(p-2)$$

независимых соотношений. Отсюда и следует оценка, указанная в формулировке теоремы.

Докажем теперь аналогичное утверждение о φ_{2p} . При $n = p$ в левой стороне соотношения (1.5) будет стоять:

$$\begin{aligned} D_{x \rightarrow \langle x, kx \rangle} [xy^p] &= \langle D_{x \rightarrow [xy]} \langle x, kx \rangle \rangle = \langle \langle [xy], kx \rangle \rangle + \langle \langle x, [xy], (k-1)x \rangle \rangle = \\ &= \langle \langle [xy], kx \rangle \rangle + \langle \langle [xy], x, (k-1)x \rangle \rangle = (k+1) \langle \langle [xy], kx \rangle \rangle, \end{aligned}$$

а справа:

$$(k+1) \frac{p!}{(p!)^1} \langle [xy^p], kx \rangle = (k+1) \langle \langle [xy] \rangle, kx \rangle$$

($k_1=1$, $k_2=k$, $i_1=p$, $i_s=0$, $s>1$; все остальные коэффициенты $\equiv 0 \pmod{p}$).

Так как $k+1 \leq p-1 \not\equiv 0 \pmod{p}$, то имеем:

$$\langle \langle [xy], kx \rangle \rangle = \langle \langle [xy] \rangle, kx \rangle. \quad (1.7)$$

Применим к полученному соотношению оператор $D_{(m-1-k)y \rightarrow x}$:

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{m-1-k} \binom{k+s}{k} \langle \langle [xy], (k+s)x \rangle, (m-1-k-s)x \rangle &= \\ = \sum_{s=0}^{m-1-k} \binom{m-1-s}{k} \langle \langle [xy], sx \rangle, (m-1-s)x \rangle. \end{aligned}$$

Удобно записать это так:

$$\sum_{s=0}^{m-1-k} \binom{m-1-s}{k} \Delta_m(s) = 0,$$

где $\Delta_m(s) = \langle \langle [xy], sx \rangle, (m-1-s)x \rangle - \langle \langle [xy], (m-1-s)x \rangle, sx \rangle$.

Придавая k значения $1, 2, \dots, m-1$ ($m \leq p-1$), получим систему линейных уравнений относительно $\Delta_m(s)$. При $k = m-1$ имеем $\Delta_m(0) = 0$, т. е. соотношение (1.7). Затем последовательно находим:

$$\Delta_m(1) = 0, \quad \Delta_m(2) = 0, \dots$$

То же самое верно и в случае $m = p$. В самом деле, при $k = p-2$ имеем:

$$\binom{p-1}{p-2} \Delta_p(0) + \binom{p-2}{p-2} \Delta_p(1) = 0, \text{ или } \Delta_p(1) = \Delta_p(0).$$

Если уже доказано, что $\Delta_p(k-1) = \Delta_p(0)$, то из

$$\sum_{s=0}^k \binom{p-1-s}{p-1-k} \Delta_p(s) = 0$$

следует:

$$\sum_{s=0}^{k-1} \binom{p-1-s}{p-1-k} \Delta_p(0) + \Delta_p(k) = 0, \text{ т. е. } \Delta_p(k) = \Delta_p(0),$$

так как

$$\sum_{s=0}^{k-1} \binom{p-1-s}{p-1-k} = \binom{p}{p-k} - \binom{p-k}{p-k} \equiv -1 \pmod{p}.$$

Итак, в случае $m = p$ все $\Delta_p(s) = \Delta_p(0)$. Но $\Delta_p(t) = -\Delta_p(p-1-t)$, так что $\Delta_p(0) = 0$. Окончательно получаем:

$$\Delta_m(s) = 0, \quad s = 0, 1, \dots, \left[\frac{m-2}{2} \right], \quad m = 2, 3, \dots, p. \quad (1.8)$$

При $s > \left[\frac{m-2}{2} \right]$ новых соотношений, очевидно, не будет. Число различных $\Delta_m(s)$ равно

$$\varphi'_{2p} = 2 \sum_{m=2}^{p-1} \left[\frac{m}{2} \right] + \left[\frac{p}{2} \right] = \frac{(p-1)^2}{2} + \frac{p-1}{2} = \frac{p^2-p}{2}.$$

Применяя, далее, к (1.6) оператор $\frac{D}{(m-2-k)y \rightarrow x} \frac{D}{y \rightarrow [xy]}$, получим $m-2$ независимых (так как высоты аргументов различны) соотношений при фиксированном $m = 3, 4, \dots, p-1$. Независимыми они будут, конечно, и от ранее полученных соотношений (1.8), которые содержат лишь производные с аргументами высоты $h = 1$.

В случае $m = p$ добавится еще очевидное соотношение

$$\langle [xy], (p-1)[xy] \rangle = 0.$$

Однако, исключив производную $\langle [xy], (p-1)[xy] \rangle$ из соотношения, получаемого обычным образом при $k = p-2$ (т. е. дифференцированием

$\frac{D}{y \rightarrow [xy]}$), мы должны уже специально доказывать независимость остальных $p-2$ соотношений между производными веса (p, p) , так как максимальные высоты аргументов теперь не все различны.

С этой целью вычислим коэффициенты при производных вида

$$\langle [xyx^{p-1-s}], s[xy] \rangle, \quad 1 \leq s \leq p-2.$$

Обозначая остальные производные точками, запишем результат применения к (1.6) оператора $\frac{D}{(p-2-k)y \rightarrow x} \frac{D}{y \rightarrow [xy]}$ при фиксированном k :

$$\begin{aligned} & \binom{p-2}{k} \langle [xyx^{p-2}], [xy] \rangle + \dots = \\ & = \frac{k+1}{1} \frac{(p-1)!}{(p-1-k)!} \left\{ \langle \frac{D}{(p-2-k)y \rightarrow x} \frac{D}{y \rightarrow [xy]} [xyx^{p-1-k}], k[xy] \rangle + \right. \\ & \quad \left. + (k+1) \langle \frac{D}{(p-2-k)y \rightarrow x} [xyx^{p-1-k}], (k+1)[xy] \rangle \right\} + \dots \end{aligned}$$

Так как

$$\binom{p-2}{k} \equiv (-1)^k (k+1) \pmod{p}$$

и

$$\frac{(p-1)!}{(p-1-k)!} \equiv (-1)^k k! \pmod{p},$$

то, умножая полученное соотношение на $\frac{(-1)^k}{k+1}$, будем иметь:

$$\langle [xyx^{p-2}], [xy] \rangle + k! \langle [xyx^{p-1-k}], k[xy] \rangle - \\ - (k+1)! \langle [xyx^{p-2-k}], (k+1)[xy] \rangle + \dots = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, p-2).$$

Определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & -2! & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2! & -3! & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & (p-3)! & -(p-2)! \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & (p-2)! \end{vmatrix},$$

очевидно, отличен от нуля, откуда и следует нужное нам доказательство. Выделенные нами производные имеют аргументы высоты ≥ 2 , так что необходимость рассмотрения зависимости новых соотношений от (1.8) отпадает. Таким образом, найдено еще

$$\bar{\varphi}_{2p}'' = 2 \sum_{m=3}^{p-1} (m-2) + (p-1) = p^2 - 4p + 5$$

независимых соотношений между производными. А всего их будет

$$\bar{\varphi}_{2p} = \bar{\varphi}_{2p}' + \bar{\varphi}_{2p}'' = \frac{3p(p-3) + 10}{2}.$$

Теорема доказана.

§ 2. О связи между идеалами A и I

ТЕОРЕМА 3. Пусть \mathfrak{L} — свободное целочисленное кольцо Ли с q образующими, $\bar{\mathfrak{L}} = \mathfrak{L}/A$ — кольцо Ли, сопоставимое группе $B_{q,p}$. Тогда имеет место включение

$$A \subset p\mathfrak{L} + I'_0 \cap \mathfrak{L},$$

где I'_0 — рациональная оболочка идеала I' , порожденного всеми элементами вида $[uv^{p-1}]$, $u, v \in \mathfrak{L}$.

Доказательство. Всюду в дальнейшем ζ_n будет обозначать однородный степени n многочлен Ли из \mathfrak{L}_0 с p -целыми коэффициентами, т. е.

$$\zeta_n = \frac{\zeta'_n}{r}, \quad (r, p) = 1, \quad \zeta'_n \in \mathfrak{L}.$$

Если относительно какого-нибудь однородного многочлена $P_n(x_1, \dots, x_q)$ известно, что $P_n \equiv \zeta_n \pmod{I'_0}$, то будем также говорить, что P_n имеет p -целую структуру по $\text{mod } I'_0$.

В доказательстве используются известные выражения (3) для $z(x, y)$ формулы Бекера—Хаусдорфа (2). Заметим еще, что из очевидного соотношения

$$z(x, y) = -z(-y, -x)$$

следуют равенства:

$$z_n(x, y) = (-1)^{n-1} z_n(y, x), \quad z_1(x, y) = x + y. \quad (2.1)$$

Как уже отмечалось ранее,

$$w = e^{x_{i_1}} \dots e^{x_{i_s}} = e^{l_n(x_1, \dots, x_q) + l_{n+1}(x_1, \dots, x_q) + \dots},$$

где $l_n \in \mathfrak{L}$, а все последующие $l_{n+i} \in \mathfrak{L}_0$. Так как $l_n(x_1, \dots, x_q) \in A$ в том и только в том случае, когда $w = w_1^p \dots w_k^p$, и $p\mathfrak{L} \subset A$, то, очевидно,

нам надлежит показать, что l_n/p имеет p -целую структуру по $\text{mod } I'_0$, т. е.

$$l_n = p\zeta'_n + d_n, \quad d_n \in I'_0.$$

Как легко видеть, тогда

$$l_n = p\zeta'_n + d'_n/p^k, \quad k \geq 0, \quad d'_n \in I', \quad \zeta'_n \in \mathfrak{L}.$$

Пусть мы каким-то образом уже доказали, что

$$z_i(x, y) \equiv \zeta_i(x, y) \pmod{I'_0}$$

для всех $i < n$. Тогда если

$$w_j = \prod_i e^{x_{kij}} = e^{P^{(j)}(x_1, \dots, x_q)} = e^{P_1^{(j)} + P_2^{(j)} + \dots}, \quad j = 1, 2,$$

— два произвольных слова относительно e^{x_i} , $i = 1, \dots, q$, такие, что

$$P_i^{(j)} \equiv \zeta_i^{(j)}(I'_0), \quad j = 1, 2, \quad 1 \leq i < n,$$

а

$$w = w_1 w_2 = e^{P_1 + P_2 + \dots},$$

то и

$$P_i(x_1, \dots, x_q) \equiv \zeta_i' \pmod{I'_0} \text{ для всех } i < n.$$

В самом деле,

$$P_1 + P_2 + \dots = z(P^{(1)}, P^{(2)}) = \sum_{i \geq 1} z_i(P^{(1)}, P^{(2)}).$$

Подстановка p -целого многочлена (т. е. многочлена с p -целыми коэффициентами) в p -целый многочлен даст, очевидно, снова p -целый многочлен. Так как многочлен P_i , $i < n$, может получиться лишь при подстановке $P_k^{(j)}$ в z_s , $k, s \leq i$, $j = 1, 2$, которые, по предположению, имеют p -целую структуру по $\text{mod } I'_0$, а идеал I'_0 инвариантен относительно всех некоммутативных дифференцирований, то утверждение верно. Из него, рассуждая по индукции относительно длины слова, выводим, что l_i , $i < n$, в произвольном слове $w = e^{l_1 + l_2 + \dots}$ имеют p -целую структуру. Если же

$$w = w_1^p \dots w_k^p = e^{l_s + l_{s+1} + \dots},$$

то все p -целые части войдут с множителем p , так что $l_s = p\zeta_s + d_s$, $d_s \in I'_0$, при $s < n$.

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно установить p -целую структуру по $\text{mod } I'_0$ всех $z_i(x, y)$. Предварительно заметим следующее. Если при тех же предположениях относительно $P_i^{(j)}(x_1, \dots, x_q)$, $j = 1, 2$, и z_i ($i < n$), которые были сделаны ранее, вычислить по $\text{mod } I'_0$ компоненту $P_n(x_1, \dots, x_q)$, то [см. (2.1)] получится:

$$P_n(x_1, \dots, x_q) \equiv P_n^{(1)} + P_n^{(2)} + z_n(P_1^{(1)}, P_1^{(2)}) + \zeta_n \pmod{I'_0}. \quad (2.2)$$

Доказательство теоремы будем вести по индукции относительно степени n компоненты $z_n(x, y)$.

Ввиду теоремы 3 работы Магнуса ⁽²⁾, индукция проходит, если n четно; кроме того, можно ограничиться рассмотрением компонент $z_{m_1 p, m_2 p}$, где

$$3p \leq (m_1 + m_2)p < 2p^2 - 7p + 7, \quad m_1 + m_2 - \text{нечетно}.$$

Рассмотрим произведение

$$w = e^{sy} e^{(s+t)x} e^{ty}, \quad s, t — \text{любые целые числа.}$$

С одной стороны,

$$w = (e^{sy} e^{sx}) (e^{tx} e^{ty}) = e^{z(sy, sx)} e^{z(tx, ty)} = e^{z(z(sy, sx), z(tx, ty))} = e^P(x, y)$$

и, ввиду (2.2),

$$P_n(x, y) \equiv z_n(sy, sx) + z_n(tx, ty) + z_n(z_1(sy, sx), z_1(tx, ty)) + \zeta'_n \pmod{I'_0}.$$

Так как n нечетно, то из (2.1) следует, что $z_n(sy, sx) = s^n z_n(x, y)$ и

$$z_n(z_1(sy, sx), z_1(tx, ty)) = z_n(s(x+y), t(x+y)) = 0$$

тождественно, т. е.

$$P_n(x, y) \equiv (s^n + t^n) z_n(x, y) + \zeta'_n \pmod{I'_0}.$$

С другой стороны,

$$w = e^{(s+t)y} (e^{-ty} e^{(s+t)x} e^{ty}).$$

По известной формуле,

$$e^{-ty} e^{xy} = e^{xe^{\overline{y}}},$$

где

$$xe^{\overline{y}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[xy^k]}{k!}.$$

Поэтому

$$w = e^{(s+t)y} e^{(s+t)x} e^{t\overline{y}},$$

откуда:

$$P_n(x, y) \equiv z_n((s+t)y, (s+t)x) + \zeta_n \pmod{I'_0}.$$

Здесь $P_n^{(1)} = 0$, а $P_n^{(2)} \equiv \zeta_n'' \pmod{I'_0}$, поскольку $[xy^k]/k! \equiv 0 \pmod{I'_0}$ при $k \geq p-1$. Итак,

$$P_n(x, y) \equiv (s+t)^n z_n(x, y) + \zeta_n'' \pmod{I'_0}.$$

Сравнивая полученные выражения для $P_n(x, y)$, $n = mp$, получим:

$$\{(s+t)^n - s^n - t^n\} z_n(x, y) \equiv \zeta_n(x, y) \pmod{I'_0}.$$

При $1 < m < p$ можно найти такие целые s и t , что

$$(s+t)^n - s^n - t^n \equiv (s+t)^m - s^m - t^m \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Следовательно, $z_n(x, y)$ имеет p -целую структуру по $\text{mod } I'_0$.

Так как рассматриваемые $n < 2p^2 - 7p + 7$, то подобные рассуждения приводят к цели и при $m > p$, если нам каким-либо образом удалось уже доказать сравнение

$$z_{p^2} \equiv \zeta_{p^2}(I'_0).$$

Итак, пусть $n = p^2$. Согласно результатам теоремы 3 работы (2),

$$z_{p^2} \equiv \sum_{i=1}^{p-1} z_{ip, p^2-ip} + \zeta_{p^2} \pmod{I'_0};$$

p -целую структуру z_{ip, p^2-ip} будем доказывать по индукции относительно i .

Имеем:

$$z_{p, p^2-p} = \frac{\omega_{p, p^2-p}}{p!}, \quad \omega_p(x, y) = \frac{D^p}{y \rightarrow \omega(x, y)} y.$$

Из формулы (3) следует, что

$$\omega(x, y) \equiv x + \frac{1}{2} [xy] + \sum_{i=1}^{\frac{p-3}{2}} \pi_i [xy^{2i}] \pmod{I'_0},$$

т. е. степень элемента $\omega(x, y)$, взятого по $\text{mod } I'_0$, равна $p-2$. Поэтому при каждом дифференцировании $\frac{D}{y \rightarrow \omega(x, y)} \omega_i(x, y)$ степень ω_i повышается

самое большее на $p-3$, и наибольшая степень компоненты в $\frac{\omega_p(x, y)}{p!}$, структура которой остается пока неясной, будет, очевидно,

$$(p-3)p + 1 < p^2.$$

Однако, по уже доказанному, структура всех компонент $z(x, y)$ степени $< p^2$ является p -целой. Таким образом, для z_{p, p^2-p} утверждение верно. Пусть оно уже доказано для всех z_{ip, p^2-ip} , $1 \leq i < m \leq p-1$. Рассмотрим произведение

$$w = e^{P(x, y)} = e^{(s+t)x} e^y,$$

где s, t — произвольные целые числа. Используя (2.2), вычислим P_{p^2} двумя способами:

- 1) $P_{p^2}(x, y) = z_{p^2}((s+t)x, y)$; $P_{mp, p^2-mp} = (s+t)^{mp} z_{mp, p^2-mp}(x, y)$.
- 2) $w = e^{sx} e^{tx} e^y$,

$$P_{p^2}(x, y) \equiv z_{p^2}(tx, y) + z_{p^2}(sx, tx+y) + \zeta'_{p^2} \pmod{I'_0}.$$

По определению оператора дифференцирования,

$$z_{p^2}(sx, tx+y) = \sum_{l \geq 0} t^l \frac{D}{ly \rightarrow x} z_{p^2}(sx, y).$$

Поэтому

$$P_{mp, p^2-mp}(x, y) \equiv t^{mp} z_{mp, p^2-mp}(x, y) + \sum_{l=0}^{mp-1} s^{mp-l} t^l \frac{D}{ly \rightarrow x} z_{mp-l, p^2-(mp-l)}(x, y) + \zeta'_{p^2} \pmod{I'_0}.$$

Но $z_{mp-l, p^2-(mp-l)} \equiv \zeta_{p^2}^{(l)} \pmod{I'_0}$ при $l > 0$ либо потому, что $l \not\equiv 0(p)$, либо по предположению индукции. Оператор же $\frac{D}{ly \rightarrow x}$ не может нарушить p -целой структуры многочлена, так как I'_0 инвариантен относительно дифференцирований. Следовательно, остается одно слагаемое, соответствующее $l=0$, т. е.

$$P_{mp, p^2-mp} \equiv (t^{mp} + s^{mp}) z_{mp, p^2-mp} + \zeta_{p^2} \pmod{I'_0}.$$

Из 1) и 2) получаем:

$$\{(s+t)^{mp} - s^{mp} - t^{mp}\} z_{mp, p^2-mp} \equiv \zeta_{p^2} \pmod{I'_0}.$$

Так как $1 < m < p$, то возможен выбор такой пары чисел s и t , чтобы

$$(s+t)^m - s^m - t^m \not\equiv 0(p).$$

p -целая структура по $\text{mod } I'_0$ всех $z_n(x, y)$ установлена. Теорема доказана.

Только что доказанная теорема дает некоторые сведения о «локальном» строении в любой простой точке p многочленов Ли, получающихся по формуле Бекера — Хаусдорфа, но решения гипотезы Санова она не содержит, поскольку не всякий целочисленный многочлен Ли, входящий в $I'_0 \cap \mathfrak{L}$, принадлежит к идеалу I . Если, например, $p = 5$, то

$$[xy^3xy] = \frac{\langle [xy], x \rangle - \langle x, [xy] \rangle}{5} \in I'_0 \cap \mathfrak{L}, \quad (2.3)$$

но $[xy^3xy] \notin 0(I, A)$, что следует из равенства $A_6 = I_6$, из вычислений в работе (13) и указанных выше оценок (1.2).

Ответить на вопрос о совпадении идеалов можно лишь при дальнейшем изучении многочленов из A , более конкретном, чем то, которое дается формальными рассуждениями, использованными при доказательстве теоремы 3.

Как уже упоминалось в вводной части, И. Н. Санов доказал равенства $A_n = I_n$ для $n = p, \dots, 2p-2$ (очень просто показывается, что $A_n = I_n = pL_n$ при $n \leq p-1$). Если иметь в виду указанные ниже соотношения (2.5) Магнуса, то результат Санова легко получается при помощи теоремы 3. Но при доказательстве совпадения модулей A_n и I_n , $n > 2p-2$, трудности значительно возрастают.

ТЕОРЕМА 4. $A_n = I_n$ для $n = 2p-1, 2p$.

Доказательство. Пусть

$$w = \sum_{i=1}^m e^{\alpha_i x} e^{\beta_i y} = e^{T(x, y)} = e^{T_s(x, y) + T_{s+1}(x, y) + \dots} \quad (2.4)$$

— произвольное слово относительно e^x и e^y .

Согласно лемме 3 работы (2),

$$\begin{aligned} pT_{s+i}(x, y) &\equiv 0(p), \quad i = 0, \dots, p-2, \\ p^2 T_{s+i}(x, y) &\equiv 0(p), \quad i = p-1, \dots, 2p-3, \quad s \geq 1. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Дополнив соответствующие рассуждения Магнуса, легко получим, что

$$p^3 T_{s+i}(x, y) \equiv 0(p), \quad i = 2p-2, 2p-1.$$

Иначе говоря, $T_n(x, y)$ можно записать в виде:

$$T_n(x, y) = \frac{T_n^{(0)}}{\lambda_n} + \frac{T_n^{(1)}}{p}, \quad T_n^{(1)} \equiv pT_n \pmod{p}, \quad (\lambda_n, p) = 1,$$

$$T_n^{(i)} \in \mathfrak{L}, \quad p \leq n \leq 2p-2,$$

$$T_n(x, y) = \frac{T_n^{(0)}}{\lambda_n} + \frac{T_n^{(1)}}{p} + \frac{T_n^{(2)}}{p^2}, \quad T_n^{(2)} \equiv p^2 T_n \pmod{p},$$

$$(\lambda_n, p) = 1, \quad T_n^{(i)} \in \mathfrak{L}, \quad n = 2p-1, 2p,$$

где, ввиду теоремы 3, для всех $T_n^{(i)}$, $i > 0$, имеют место сравнения

$$T_n^{(i)} \equiv 0(I').$$

В частности, такую же структуру имеют и $z_n(x, y)$ в формуле Бекера — Хаусдорфа (2), последовательным применением которой мы убеждаемся в том, что в интересующих нас произведениях

$$w = w_1^p \dots w_k^p = \prod_T e^{pT(x, y)} = e^l(x, y) = e^{l_1(x, y) + l_2(x, y) + \dots}$$

компоненты $l_n(x, y)$, $n = 2p - 1, 2p$, имеют вид:

$$l_n(x, y) = \frac{pl_n^{(0)}(x, y)}{\lambda_n} + l_n^{(1)}(x, y) + \frac{l_n^{(2)}(x, y)}{p},$$

$$(\lambda_n, p) = 1, \quad l_n^{(0)}(x, y) \in \mathfrak{L}, \quad l_n^{(1)}(x, y) \equiv l_n^{(2)}(x, y) \equiv 0(I'),$$

причем

$$l_n^{(2)}(x, y) = \sum_T T_n^{(2)}(x, y). \quad (2.6)$$

Если $l_n(x, y)$ — начальный член в $l(x, y)$, то его коэффициенты будут целыми рациональными, т. е. $\lambda_n = 1$ и $l_n^{(2)}(x, y)/p \in \mathfrak{L}$. Наша задача — доказать, что $l_n^{(2)}(x, y)/p \equiv 0(I')$.

Вычислим с этой целью $T_n^{(2)}(x, y)$, $n = 2p - 1, 2p$, в произведении (2.4), которое удобно записать в виде:

$$w = e^T(x, y) = e^{z(\bar{\alpha}_i x, \bar{\beta}_i y)} e^H(x, y),$$

где

$$e^H(x, y) = \prod_{i=1}^{m-1} k_{yx} \left(\frac{\bar{\beta}_i}{\bar{\alpha}_{i+1}} \right) k_{xy} \left(\frac{\bar{\alpha}_{i+1}}{\bar{\beta}_{i+1}} \right),$$

$$\bar{\alpha}_i = \sum_{s=i}^m \alpha_s, \quad \bar{\beta}_i = \sum_{s=i}^m \beta_s, \quad k_{xy} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) = e^{-\alpha x} e^{-\beta y} e^{\alpha x} e^{\beta y}.$$

С помощью (3) без труда находим:

$$z_p^{(1)}(x, y) \equiv p \sum_{s=0}^{p-2} \frac{1}{(s+1)!} \pi_{\frac{p-1}{2}} D^s [xy^{p-1}],$$

а так как $p\pi_{\frac{p-1}{2}} \equiv 1(p)$ и $D^s [xy^{p-1}] = s! \langle x, sx \rangle$, то

$$z_p^{(1)}(x, y) \equiv \sum_{s=0}^{p-2} \frac{1}{s+1} \langle x, sx \rangle. \quad (2.7)$$

По формуле Хаусдорфа [см. (5)]:

$$\sum_{k=1}^{\infty} kz_k(x, y) = \omega(x, z) + \omega(y, -z),$$

или

$$\sum_{k=1}^{\infty} kz_k(x, y) = x + y + \frac{1}{2} [zy] - \frac{1}{2} [zx] + \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i [z_1 z^{2i}],$$

которую нужно рассматривать как рекуррентную, имеем:

$$(2p-1)z_{2p-1}^{(2)} \equiv p^2 \pi_{\frac{p-1}{2}} \langle z_1, z_p, (p-2)z_1 \rangle \equiv -\langle z_p^{(1)}, (p-1)(x+y) \rangle,$$

$$z_{2p-1}^{(2)} \equiv \sum_{i=0}^{p-1} \langle z_p^{(1)}, ix \rangle.$$

Подставляя уже найденное выражение (2.7) для $z_p^{(1)}$, получаем:

$$z_{2p-1}^{(2)} \equiv \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{s=0}^{p-2} \frac{1}{s+1} \langle \langle x, sx \rangle, ix \rangle$$

и

$$z_{k, 2p-1-k}^{(2)} \equiv \sum_{s=0}^{k-1} \frac{1}{s+1} \langle \langle x, sx \rangle, (k-1-s)x \rangle, \quad 1 \leq k \leq p-1. \quad (2.8)$$

По формуле Бекера [см. (4)]:

$$z_{2k} = -\frac{1}{2} \left\{ [z_{2k-1} x] + \frac{1}{2!} [z_{2k-2} x^2] + \dots + \frac{1}{(2k-1)!} [z_1 x^{2k-1}] \right\},$$

имеем:

$$\begin{aligned} z_{2p}^{(2)} &\equiv -\frac{p^2}{2} \left\{ [z_{2p-1} x] + \frac{1}{p!} [z_p x^p] \right\} \equiv -\frac{1}{2} \{ [z_{2p-1}^{(2)} x] + [z_p^{(1)} x^p] \}, \\ z_{k, 2p-k}^{(2)} &\equiv -\frac{1}{2} [z_{k-1, 2p-k}^{(2)} x], \quad 2 \leq k \leq p. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Исследуем более подробно выражение $k_{xy} \left(\frac{1}{1} \right) = e^k(x, y)$. Удобно воспользоваться представлением

$$e^{-x} e^{-y} e^x = e^k(x, y) e^{-y},$$

т. е.

$$z(k(x, y), -y) = -ye^{\bar{x}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[yx^n] 1}{n!}. \quad (2.10)$$

Очевидно, $k_n^{(1)}(x, y) = 0$, если $n \leq p$; $k_n^{(2)}(x, y) = 0$ для $n \leq 2p-1$;

$k_2 = [xy]$. Далее, с помощью (2.10), получаем:

$$\begin{aligned} pk_{p+1}(x, y) + p\pi_{\frac{p-1}{2}} [k_2 y^{p-1}] &\equiv -\frac{p}{p!} [yx^p], \\ p^2 \{ k_{2p}(x, y) + \pi_{\frac{p-1}{2}} [k_{p+1} y^{p-1}] + \pi_{p-1} [k_2 y^{2p-2}] \} &\equiv 0, \end{aligned}$$

откуда последовательно находим ($p^2 \pi_{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$):

$$\begin{aligned} k_{p+1}^{(1)}(x, y) &\equiv [yx^p] - [xy^p], \\ k_{2p}^{(2)}(x, y) &\equiv -[yx^p y^{p-1}]. \end{aligned}$$

Замечая, что $k(y, x) = -k(x, y)$, и принимая во внимание сделанные замечания о структуре $z(x, y)$, легко получаем:

$$\left. \begin{aligned} H_2(x, y) &\equiv n(\alpha, \beta) [xy], \\ H_{p+1}^{(1)}(x, y) &\equiv n(\alpha, \beta) ([yx^p] - [xy^p]), \\ H_{2p}^{(2)}(x, y) &\equiv -n(\alpha, \beta) [yx^p y^{p-1}], \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

где

$$n(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{m-1} (\bar{\alpha}_{i+} \bar{\beta}_{i+1} - \bar{a}_{i+1} \bar{\beta}_i).$$

Теперь мы уже в состоянии найти интересующие нас выражения

$T_{2p-1}^{(2)}$ и $T_{2p}^{(2)}(x, y)$. При перемножении $e^{z(\bar{\alpha}_1 x, \bar{\beta}_1 y)}$ и $e^{H(x, y)}$ по формуле Бекера — Хаусдорфа получим: $T(x, y) = z(z(\bar{\alpha}_1 x, \bar{\beta}_1 y), H(x, y))$, и простые соображения показывают, что

$$T_{2p-1}^{(2)}(x, y) \equiv z_{2p-1}^{(2)}(\bar{\alpha}_1 x, \bar{\beta}_1 y),$$

а это вместе с (2.8) дает:

$$T_{k, 2p-1-k}^{(2)}(x, y) \equiv \bar{\alpha}_1^k \bar{\beta}_1^{1-k} \sum_{s=0}^{k-1} \frac{1}{s+1} \langle \langle x, sx \rangle, (k-1-s)x \rangle, \quad 1 \leq k \leq p-1.$$

$T_{2p}^{(2)}(x, y)$ уже не получается простым сложением ранее вычисленных компонент $z_{2p}^{(2)}(x, y)$ и $H_{2p}^{(2)}(x, y)$. Структура $z(x, y)$ такова, что

$$\begin{aligned} T_{2p}^{(2)}(x, y) &\equiv z_{2p}^{(2)}(\bar{\alpha}_1 x, \bar{\beta}_1 y) + H_{2p}^{(2)}(x, y) + \\ &+ p^2 \pi_{p-1} \frac{1}{2} \{P_{2p}(x, y) + Q_{2p}(x, y)\} + p^2 \pi_{p-1} R_{2p}(x, y), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} pP_{2p}(x, y) &\equiv \langle H_{p+1}^{(1)}(x, y), (p-1)(\bar{\alpha}_1 x + \bar{\beta}_1 y) \rangle, \\ pQ_{2p}(x, y) &\equiv \langle H_2(x, y), z_p^{(1)}(\bar{\alpha}_1 x, \bar{\beta}_1 y), (p-2)(\bar{\alpha}_1 x + \bar{\beta}_1 y) \rangle, \\ R_{2p}(x, y) &\equiv [H_2(x, y)(\bar{\alpha}_1 x + \bar{\beta}_1 y)^{2p-2}] \equiv \sum_{i, j=0}^{p-1} \bar{\alpha}_1^{i+j} \bar{\beta}_1^{-i-j} \langle \langle H_2, ix \rangle, jy \rangle. \end{aligned}$$

Используя (2.7) и (2.11), получим:

$$\begin{aligned} pP_{k, 2p-k}(x, y) &\equiv -n(\alpha, \beta) \bar{\alpha}_1^{k-1} \bar{\beta}_1^{-(k-1)} \langle [xy^p], (k-1)x \rangle, \quad k < p, \\ pP_{p, p}(x, y) &\equiv n(\alpha, \beta) \{[xy^p y^{p-1}] - [xy^p x^{p-1}]\}, \\ pQ_{k, 2p-k}(x, y) &\equiv n(\alpha, \beta) \bar{\alpha}_1^{k-1} \bar{\beta}_1^{-(k-1)} \sum_{s=0}^{k-2} \frac{1}{s+1} \langle \langle x, sx \rangle, [xy], (k-2-s)x \rangle, \\ &k \leq p, \\ R_{k, 2p-k}(x, y) &\equiv n(\alpha, \beta) \bar{\alpha}_1^{k-1} \bar{\beta}_1^{-(k-1)} \sum_{s=0}^{k-1} \langle \langle [xy], sx \rangle, (k-1-s)x \rangle, \quad k \leq p. \end{aligned}$$

Очевидно,

$$H_{k, 2p-k}^{(2)}(x, y) + pP_{k, 2p-k}(x, y) \equiv -n(\alpha, \beta) \bar{\alpha}_1^{k-1} \bar{\beta}_1^{-(k-1)} \langle [xy^p], (k-1)x \rangle$$

для всех $k \leq p$.

Далее, из (1.4), (2.8) и (2.9) следует:

$$\begin{aligned} -[z_{k-1, 2p-k}^{(2)} x] &\equiv D_{\nu + [xy]} \sum_{s=0}^{k-2} \frac{1}{s+1} \langle \langle x, sx \rangle, (k-2-s)x \rangle \equiv \\ &\equiv \sum_{s=0}^{k-2} \frac{1}{s+1} \langle \langle x, sx \rangle, [xy], (k-2-s)x \rangle + \\ &+ \sum_{s=1}^{k-1} \langle \langle [xy], sx \rangle, (k-1-s)x \rangle, \end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned} pQ_{k, 2p-k}(x, y) + R_{k, 2p-k}(x, y) &\equiv \\ &\equiv 2n(\alpha, \beta) \bar{\alpha}_1^{k-1} \bar{\beta}_1^{-(k-1)} \{z_{k, 2p-k}^{(2)}(x, y) + \langle [xy^p], (k-1)x \rangle\}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} T_{k, 2p-k}^{(2)}(x, y) &\equiv \bar{\alpha}_1^k \bar{\beta}_1^{2-k} z_{k, 2p-k}^{(2)}(x, y) + \{H_{k, 2p-k}^{(2)}(x, y) + pP_{k, 2p-k}(x, y)\} + \\ &\quad + \{pQ_{k, 2p-k}(x, y) + R_{k, 2p-k}(x, y)\} \equiv \\ &\equiv \bar{\alpha}_1^{k-1} \bar{\beta}_1^{(k-1)} \{\bar{\alpha}_1 \bar{\beta}_1 + 2n(\alpha, \beta)\} z_{k, 2p-k}^{(2)}(x, y). \end{aligned}$$

Для $l_{k, n-k}^{(2)}(x, y)$ из (2.6) мы получаем явное выражение:

$$l_{k, 2p-1-k}^{(2)}(x, y) \equiv \varepsilon_k z_{k, 2p-1-k}^{(2)}(x, y), \quad (2.12)$$

$$l_{k, 2p-k}^{(2)}(x, y) \equiv \delta_k [z_{k-1, 2p-k}^{(2)} x], \quad (2.13)$$

где

$$\varepsilon_k = \sum \bar{\alpha}_1^k \bar{\beta}_1^{1-k}, \quad \delta_k = \frac{p-1}{2} \sum \bar{\alpha}_1^{k-1} \bar{\beta}_1^{1-k} (\bar{\alpha}_1 \bar{\beta}_1 + 2n(\alpha, \beta)),$$

с суммированием по всем α_i и β_i , входящим в слова w_1, \dots, w_k .

По поводу преобразований, сделанных при получении выражения для $T_{k, 2p-k}^{(2)}(x, y)$, заметим следующее. Согласно теореме 1,

$$\langle u_0, r_1 u_1, \dots, r_s u_s \rangle = \frac{1}{r_1} \langle u_1, u_0, (r_1 - 1) u_1, \dots, r_s u_s \rangle + pf(u_0, \dots, u_s),$$

где $f(u_0, \dots, u_s)$, вообще говоря, не является элементом идеала I' , так что, действуя над полем вычетов по $\text{mod } p$ и используя симметрию производных относительно компонент своих аргументов, мы могли бы исключить из рассмотрения элементы вида pu , $u \notin 0(I')$, и прийти к неверному результату. Однако одна из компонент аргументов преобразованных нами производных всегда принадлежала идеалу I' , вследствие чего

$$f(u_0, \dots, u_s) \equiv 0(I')$$

и ошибки получиться не могло.

Для завершения доказательства теоремы нам необходимо выяснить, что произойдет при делении $l_{k, n-k}^{(2)}(x, y)$ на p . Так как предполагается, что $l_{k, n-k}^{(2)}(x, y)/p \in \mathfrak{L}$, то имеются две возможности:

1) либо $z_{k, n-k}^{(2)}(x, y) \equiv 0(p)$, т. е. $z_{k, n-k}^{(2)}/p \in \mathfrak{L}$ (как это было, например, в (2.3)), и тогда предстоит кропотливая проверка для окончательного решения вопроса о принадлежности $z_{k, n-k}^{(2)}(x, y)/p$ к идеалу I' ;

2) либо $z_{k, n-k}^{(2)}(x, y) \not\equiv 0(p)$, тогда в (2.12) и (2.13) необходимо должно быть $\varepsilon_k \equiv 0(p)$ и $\delta_k \equiv 0(p)$, что, очевидно, сразу же приводит к доказательству нашего утверждения.

Покажем, что имеет место более простой случай 2). Действительно, запишем $z_{k, 2p-1-k}^{(2)}(x, y)$ в виде линейной комбинации независимых ассоциативных произведений из алгебры \mathfrak{A} , в которой представлено кольцо Ли \mathfrak{L} . Если хотя бы один из коэффициентов в этом разложении не будет делиться на p , то это и означает, что

$$z_{k, 2p-1-k}^{(2)}(x, y) \not\equiv 0(p).$$

Наиболее просто вычисляется коэффициент γ при $x^k y^{2p-1-k}$:

$$z_{k, 2p-1-k}^{(2)}(x, y) = \gamma x^k y^{2p-1-k}.$$

Если

$$\begin{aligned} u &= [xy^{s_1} x^{k_1} \dots y^{s_r} x^{k_r}], \quad 1 + k_1 + \dots + k_r = k, \\ s_1 + \dots + s_r &= 2p - 1 - k, \end{aligned}$$

— произвольный одночлен $\mathbb{L}\mathbb{I}$, то

$$u = (-1)^{k-1} x^k y^{2p-1-k}.$$

Совершенно очевидно поэтому, что

$$\gamma = (-1)^{k-1} \sum_{s=0}^{k-1} \frac{1}{s+1} \binom{p-2}{s} \binom{p-1}{k-1-s},$$

а так как

$$\binom{p-2}{s} \equiv (-1)^s (s+1) \pmod{p}$$

и

$$\binom{p-1}{k-1-s} \equiv (-1)^{k-1-s} \pmod{p},$$

то $\gamma \equiv k \pmod{p}$, т. е. $\gamma \not\equiv 0 \pmod{p}$, поскольку $k \leq p-1$. Формула (2.13) показывает, что имеет место аналогичное утверждение и относительно $l_{k, 2p-k}^{(2)}(x, y)$.

Теорема доказана.

§ 3. Применение полученных результатов

Так же как и в § 1, \mathbb{Q} , A и I будем считать кольцами $\mathbb{L}\mathbb{I}$ с областью операторов — полем вычетов по $\text{mod } p$, число образующих $q = 2$. Обозначим через $P_{k, n-k}$ базисные одночлены $\mathbb{L}\mathbb{I}$ модуля $L_{k, n-k}$ однородных многочленов $\mathbb{L}\mathbb{I}$ веса $(k, n-k)$. Ранг $L_{k, n-k}$ определяется по формуле Витта [см. (3)]:

$$\psi_{k, n-k} = \frac{1}{n} \sum_{d|(n, k)} \mu(d) \binom{n/d}{k/d}.$$

В частности,

$$\psi_{2, n-2} = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, \quad (3.1)$$

$$\psi_{3, n-3} = \frac{n^2 - 3n + \varepsilon}{6} \quad \begin{pmatrix} \varepsilon = 0, \text{ если } n \equiv 0(3), \\ \varepsilon = 2, \text{ если } n \not\equiv 0(3) \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Подсчитаем значения величин $\varphi_{2, p+n-2}^*$ и $\varphi_{3, p+n-3}^*$, определенных в § 1. Базис модуля $I_{2, p+n-2}$ (быть может, и зависимый) составляют производные $\langle P_{2, n-1} \rangle$ и $\langle [xy^{n-i}], [xy^i] \rangle$, $0 \leq 2i \leq n$. Поэтому, принимая во внимание (3.1), получим:

$$\varphi_{2, p+n-2}^* = \psi_{2, n-1} + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 = 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1. \quad (3.3)$$

Различными производными веса $(3, p+n-3)$ являются:

$$\begin{aligned} &\langle P_{3, n-2} \rangle, \langle P_{2, n-1-i}, [xy^i] \rangle, \quad 0 \leq i \leq n-2, \\ &\langle [xy^{n-i-j}], [xy^j], [xy^i] \rangle, \quad 0 \leq i \leq j \leq n-i-j, \end{aligned}$$

так что

$$\varphi_{3, p+n-3}^* = \psi_{3, n-2} + \sum_{i=0}^{n-2} \psi_{2, n-1-i} + \sum_{i=0}^{[n/3]} \left(\left\lfloor \frac{n-i}{2} \right\rfloor - i + 1 \right).$$

Замечая, что

$$\sum_{i=0}^{n-2} \varphi_{2, n-1-i} = \sum_{i=0}^n \left[\frac{i}{2} \right] = \left[\frac{n^2}{4} \right],$$

без труда находим:

$$\varphi_{3, p+n-3}^* = \psi_{3, n-2} + 2 \left[\frac{n^2}{4} \right] - \left[\frac{(n-1 - \left[\frac{n}{3} \right])^2}{4} \right] - \frac{(\left[\frac{n}{3} \right] + 1)(\left[\frac{n}{3} \right] - 2)}{2}.$$

Если последовательно брать n из различных классов вычетов по mod 6, то с помощью (3.2) можно также записать:

$$\varphi_{3, p+n-3}^* = \frac{3n^2 + 2n + a}{6}, \quad a \equiv n \pmod{6}, \quad a = 1, 2, 3, 4, -1, 6. \quad (3.4)$$

Формулы (3.3) и (3.4) дают для $\varphi_{2, p+n-2}^*$ и $\varphi_{3, p+n-3}^*$ такие же выражения, какие нашел Мейер-Вундерли ⁽¹²⁾ для $\delta_{2, p+n-2}$ и $\delta_{3, p+n-3}$, $n \leq p-2$, действуя чисто групповым методом. Следовательно,

$$\varphi_{i, p+n-i}^* = \varphi_{i, p+n-i} = \delta_{i, p+n-i}, \quad i = 2, 3, \quad 0 \leq n \leq p-2. \quad (3.5)$$

Есть основания предполагать, что это верно для всех остальных i , т. е.

$$\varphi_{p+n}^* = \varphi_{p+n} = \delta_{p+n}, \quad 0 \leq n \leq p-2. \quad (3.6)$$

В таком случае вопрос об определении рангов фактор-групп B_i/B_{i+1} , $i \leq 2p-2$, группы $B_{2,p}$ можно было бы считать решенным, так как вычисление φ_{p+n}^* не представляет большого труда. Границу для n в (3.6) нельзя увеличить, как это показывают оценки теоремы 2. В работе ⁽¹³⁾ было указано на совпадение φ_{p+n}^* и φ_{p+n} для $n \leq 3$. Те же результаты следуют из работ Линдона ⁽¹⁰⁾ и ⁽¹¹⁾, соответствующие рассуждения которого являются довольно сложными. Сейчас будет дано совершенно элементарное доказательство более сильного утверждения.

ТЕОРЕМА 5.

$$\varphi_{p+n}^* = \varphi_{p+n} = \delta_{p+n}, \quad 0 \leq n \leq 4, \quad p \geq 7.$$

Доказательство. Ясно, что достаточно доказать утверждение теоремы для $n=4$, так как всякое линейное соотношение, связывающее производные степени $< p+4$, влекло бы за собой зависимость между производными степени $\geq p+4$. Базис I_{p+4} составляют элементы:

$$\begin{aligned} d_{1,s} &= \langle [xy^4], (s-1)x \rangle, & 1 \leq s \leq p, \\ d_{2,s} &= \langle [xy^3x], (s-2)x \rangle, & 2 \leq s \leq p+1, \\ d_{3,s} &= \langle [xyxy^2], (s-2)x \rangle, & 2 \leq s \leq p+1, \\ d_{4,s} &= \langle [xyx^2y], (s-3)x \rangle, & 3 \leq s \leq p+2, \\ d_{5,s} &= \langle [xy^2x^2], (s-3)x \rangle, & 3 \leq s \leq p+2, \\ d_{6,s} &= \langle [xyx^3], (s-4)x \rangle, & 4 \leq s \leq p+3, \\ d_{7,s} &= \langle [xy^3], [xy], (s-2)x \rangle, & 2 \leq s \leq p, \\ d_{8,s} &= \langle [xy^2x], [xy], (s-3)x \rangle, & 3 \leq s \leq p+1, \\ d_{9,s} &= \langle [xyx^2], [xy], (s-4)x \rangle, & 4 \leq s \leq p+2, \\ d_{10,s} &= \langle [xy^2], [xy^2], (s-2)x \rangle, & 2 \leq s \leq p, \\ d_{11,s} &= \langle [xy^2], [xyx], (s-3)x \rangle, & 3 \leq s \leq p+1, \\ d_{12,s} &= \langle [xyx], [xyx], (s-4)x \rangle, & 4 \leq s \leq p+2, \\ d_{13,s} &= \langle [xy^2], 2[xy], (s-3)x \rangle, & 3 \leq s \leq p, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d_{14,s} &= \langle [xyx], 2[xy], (s-4)x \rangle, & 4 \leq s \leq p+1, \\d_{15,s} &= \langle [xy], 3[xy], (s-4)x \rangle, & 4 \leq s \leq p.\end{aligned}$$

Число их

$$\varphi_{p+4}^* = 15p - 13.$$

Линейную независимость элементов $d_{i,s}$, имеющих одинаковый вес $(s, p+4-s)$, будем доказывать индукцией по s . Предположим, что имеет место соотношение

$$\sum_{i=1}^{15} \alpha_i d_{i,s} = 0.$$

Тогда и

$$D \sum_{x \rightarrow y} \alpha_i d_{i,s} = \sum_{i=1}^{15} \alpha_i D d_{i,s} = \sum_{i=1}^{15} \beta_i d_{i,s-1} = 0.$$

Если считать доказанной независимость $d_{i,j}$ для $j < s$, то получим, что $\beta_i = 0$. Коэффициенты β_i являются линейными комбинациями α_i и для их вычисления нужно выразить все $D d_{i,s}$ через $d_{i,s-1}$. Например,

$$\begin{aligned}D d_{1,s} &= \langle [xy^4], (s-2)x, y, (p-s)y \rangle = \\&= \binom{p-s+1}{1} \langle [xy^4], (s-2)x \rangle = (1-s) d_{1,s-1}, \quad s \geq 2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D d_{2,s} &= \langle [xy^4], (s-2)x \rangle + (p+2-s) \langle [xy^3x], (s-3)x \rangle = \\&= d_{1,s-1} + (2-s) d_{2,s-1}.\end{aligned}$$

Нетрудно продолжить эти простые выкладки и прийти к следующим тождествам (часть из них необходимо опустить или видоизменить, если $s \leq 4$):

$$\begin{aligned}\beta_1 &= (1-s)\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, & \beta_2 &= (2-s)\alpha_2 + \alpha_5 = 0, & \beta_3 &= (2-s)\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 = 0, \\ \beta_4 &= (3-s)\alpha_4 + \alpha_6 = 0, & \beta_5 &= (3-s)\alpha_5 + 2\alpha_6 = 0, & \beta_6 &= (4-s)\alpha_6 = 0, \\ \beta_7 &= (1-s)\alpha_7 + \alpha_8 = 0, & \beta_8 &= (2-s)\alpha_8 + 2\alpha_9 = 0, & \beta_9 &= (3-s)\alpha_9 = 0, \\ \beta_{10} &= (1-s)\alpha_{10} + \alpha_{11} = 0, & \beta_{11} &= (2-s)\alpha_{11} + 2\alpha_{12} = 0, & \beta_{12} &= (3-s)\alpha_{12} = 0, \\ \beta_{13} &= (1-s)\alpha_{13} + \alpha_{14} = 0, & \beta_{14} &= (2-s)\alpha_{14} = 0, & \beta_{15} &= (1-s)\alpha_{15} = 0.\end{aligned}\tag{3.7}$$

Очевидно, все $\alpha_i = 0$, если $s \geq 5$. Следовательно, достаточно доказать независимость $d_{i,s}$ при $s = 2, 3, 4$. Но, по условию, $p \geq 7$ и для $s = 2$ и 3 такое утверждение содержится в (3.5), так что остается лишь установить отсутствие линейной зависимости между $d_{i,4}$. Полагая в (3.7) $s = 4$ (тождеств $\beta_6 = 0, \beta_9 = 0, \beta_{12} = 0, \beta_{14} = 0$ и $\beta_{15} = 0$ при этом не будет), найдем условия, связывающие α_i :

$$\begin{aligned}2\alpha_1 &= 2\alpha_2 = \alpha_3 = 2\alpha_4 = \alpha_5 = 2\alpha_6, \\ 3\alpha_7 &= \alpha_8 = \alpha_9, & 3\alpha_{10} &= \alpha_{11} = \alpha_{12}, & 3\alpha_{13} &= \alpha_{14}.\end{aligned}\tag{3.8}$$

Рассмотрим, далее, ассоциативное представление производных $d_{i,4}$, т. е. запишем их в свободной ассоциативной алгебре \mathfrak{K} с образующими x и y :

$$d_{i,4} = \omega_{i,1}u_1 + \omega_{i,2}u_2 + \omega_{i,3}u_3 + \omega_{i,4}u_4 + \dots,$$

где

$$u_1 = yx^4y^{p-1}, \quad u_2 = y^2x^4y^{p-2}, \quad u_3 = xy^px^3, \quad u_4 = xyxy^{p-1}x^2,$$

точками обозначены ассоциативные элементы, отличные от u_i . Вычисление коэффициентов $\omega_{i,j}$ сильно упрощается, если воспользоваться тем определением производной, которое дается тождеством (1.1). Например, $d_{12,4} = [xyx][xyx]y^{p-2} + y[xyx][xyx]y^{p-3} + [xyx]y^{p-2}[xyx] + \dots = u_1 + u_2 - 2u_4 + \dots$.

В силу предполагаемой зависимости $d_{i,4}$, получим:

$$\sum_{i=1}^{15} \alpha_i \omega_{i,j} = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

или

$$\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 - 2\alpha_6 - \alpha_7 + \alpha_8 - 2\alpha_9 - \alpha_{11} + \alpha_{12} = 0 \quad (j=1),$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5 - 2\alpha_6 - \alpha_7 + 2\alpha_8 - 2\alpha_9 + \alpha_{10} - 2\alpha_{11} + \alpha_{12} = 0 \quad (j=2),$$

$$2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 - \alpha_6 - 2\alpha_7 + \alpha_8 - \alpha_9 + \alpha_{10} - \alpha_{11} = 0 \quad (j=3),$$

$$\sum_{i=1}^{12} \omega_{i,4} \alpha_i - \alpha_{14} = 0 \quad (j=4).$$

Принимая во внимание условия (3.8), находим, что $\alpha_i = 0$ для $i \leq 14$. Но так как, очевидно, $d_{15,4} \neq 0$, то и $\alpha_{15} = 0$. Теорема доказана.

Проверим теперь точность полученных в § 1 оценок для φ_{p+n} в случае $p = 5$. Пусть $\rho_n = \psi_n - \varphi_n$, где ψ_n вычисляется по формуле (1), и $\rho_n = \psi_n$, если $n \leq 4$. Далее, $\varphi_{5+i} = \varphi_{5+i}^*$ для $i \leq 3$, поэтому

$$\rho_5 = 6 - 4 = 2, \quad \rho_6 = 9 - 5 = 4, \quad \rho_7 = 18 - 14 = 4, \quad \rho_8 = 30 - 26 = 4.$$

По теореме 2,

$$\rho_9 \geq 56 - \{62 - 4 \cdot 3\} = 6,$$

$$\rho_{10} \geq 99 - \left\{ 116 - \frac{3 \cdot 5(5-3) + 10}{2} \right\} = 3.$$

Учитывая оценки для ρ_n из работы⁽¹³⁾ и равенства $\varphi_n = \delta_n$, $n \leq 10$, приходим к следующему выводу.

ТЕОРЕМА 6. *Группа $\bar{B}_{2,5}$ имеет конечный порядок $\bar{h}_5(2)$. Факторы B_n/B_{n+1} ее нижнего центрального ряда имеют порядок 5^{k_n} , где*

$$k_1 = 2, \quad k_2 = 1, \quad k_3 = 2, \quad k_4 = 3, \quad k_5 = 2, \quad k_6 = 4, \quad k_7 = 4,$$

$$k_8 = 4, \quad k_9 = 6, \quad k_{10} = 3, \quad k_{11} \leq 2, \quad k_{12} \leq 1, \quad k_{13} = 0.$$

$$5^{31} \leq \bar{h}_5(2) \leq 5^{34}.$$

(В работе⁽¹¹⁾ Линдон ошибочно утверждает, что $k_9 = 4$.)

Отсюда, из (1.3) и из теоремы 4 следует, в частности, что класс нильпотентности m групп $B_{2,5}$ и $B_{2,7}$ не меньше, чем $2p$. Оказывается, аналогичная оценка имеет место и в случае любого p .

Действительно, согласно (3.2) и (3.4),

$$\begin{aligned} \psi_{3,2p-3} - \delta_{3,2p-3} &= \psi_{3,2p-3} - \varphi_{3,2p-3} > \psi_{3,2p-3} - \varphi_{3,2p-3}^* = \\ &= \frac{4p^2 - 6p + 2}{6} - \frac{3p^2 + 2p + a}{6} > 0, \end{aligned}$$

если $p \geq 11$. Таким образом, получено улучшение соответствующих результатов Грина ⁽¹⁴⁾ ($m \geq 2p - 2$) и Мейера-Вундерли ⁽¹³⁾ ($m \geq 2p - 1$):

ТЕОРЕМА 7. *Существует конечная группа с тождественным соотношением $x^p = 1$, порожденная двумя образующими и имеющая класс нильпотентности $m = 2p$ ($p \geq 5$).*

Поступило
14. VI. 1956

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Magnus W., Über Gruppen und zugeordnete Liesche Ringe, J. reine und angew. Math., 182 (1940), 142—149.
- ² Magnus W., A connection between the Baker — Hausdorff formula and a problem of Burnside, Ann. of Math., 52, No 1 (1950), 111 — 126.
- ³ Witt E., Treue Darstellung Liescher Ringe, J. reine und angew. Math., 177 (1937), 152—160.
- ⁴ Baker H. E., Alternants and continuous groups, Proc. London Math. Soc., 3 (1905), 24—47.
- ⁵ Hausdorff E., Die symbolische Exponentialformel in der Gruppentheorie, Bericht. d. König Sächs. Ges. d. Wiss. Math. phys. Klasse, 58 (1906), 19—48.
- ⁶ Санов И. Н., Установление связи между периодическими группами с периодом простым числом и кольцами Ли, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 16 (1952), 23—58.
- ⁷ Hall Ph., A contribution to the theory of groups of primepower order, Proc. London Math. Soc., 36 (1934), 29—95.
- ⁸ Zassenhaus H., Liesche Ringe mit Primzahlcharakteristik, Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg, 13 (1939), 1—100.
- ⁹ Jacobson N., Abstract derivations and Lie algebras, Trans. Amer. Math. Soc., 42 (1937), 206—224.
- ¹⁰ Lyndon R. C., On Burnside's problem, Trans. Amer. Math. Soc., 77, No 2 (1954), 202—215.
- ¹¹ Lyndon R. C., On Burnside's problem, Trans. Amer. Math. Soc. 78 No 2 (1955), 329—332.
- ¹² Meier-Wunderli H., Über die Struktur der Burnsidegruppen mit zwei Erzeugenden und vom Primzahlexponenten $p > 3$, Comment. Math. Helv., 30 (1956), 144—174.
- ¹³ Кострикин А. И., Решение ослабленной проблемы Бернсайда для показателя 5, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 19 (1955), 233—244.
- ¹⁴ Green J. A., On groups with odd prime-power exponent, J. London Math. Soc., 27 (1952), 476—485.

Я. В. ХИОН

КОЛЬЦА, НОРМИРОВАННЫЕ ПРИ ПОМОЩИ ПОЛУГРУПП

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым)

В работе определяются кольца, нормированные при помощи полугрупп. Их теория строится на основе теории упорядоченных полугрупп.

Исходным пунктом настоящей работы служили упорядоченные кольца. Упорядоченные кольца несомненно заслуживают изучения, но пока для них были получены довольно разрозненные результаты. Автором был получен ряд результатов об упорядоченных кольцах [см. (8)], которые позже удалось обобщить на нормированные кольца.

Уже сравнительно давно установлена связь между упорядоченными и нормированными полями [см. (3), (2)], а именно, всякое упорядоченное поле можно естественным образом нормировать при помощи упорядоченной группы его архимедовских классов. В работе (1) дается весьма общее определение нормированных абелевых групп и на последние переносится ряд результатов об упорядоченных группах. В настоящей работе показывается, что такую же связь можно установить между упорядоченными и нормированными кольцами, если надлежащим образом определить последнее понятие. При этом результаты автора об упорядоченных кольцах получаются теперь как следствия теорем о нормированных кольцах.

Для теории нормированных колец очень большое значение имеет изучение упорядоченных полугрупп. По существу все основные теоремы о нормированных кольцах получаются приложением соответствующих теорем об упорядоченных полугруппах. Настоящая работа будет поэтому существенно опираться на работу автора (7), знакомство с которой будет у читателя предполагаться.

Значение теории нормированных полей далеко не исчерпывается их связью с упорядоченными полями; теория нормированных полей является одним из важных и содержательных разделов теории полей. Понятие нормы уже успешно применяется и в теории колец. И. М. Гельфандом было дано одно из возможных определений нормы для алгебр и на этой основе была создана глубокая теория нормированных алгебр. Эта теория охватывает широкие классы алгебр потому, что в ней используется аксиома нормы

$$\|ab\| \leq \|a\| \|b\|,$$

тогда как в теории нормированных полей в соответствующей аксиоме требуется равенство. В литературе [см. (4), (5)] появилось также понятие псевдонормы для колец, которое, по существу, является обобщением на любые кольца нормы в смысле Гельфанда.

Можно попытаться перенести понятие нормы с полей на кольца так, чтобы сохранилась аксиома

$$\|ab\| = \|a\|\|b\|$$

(нормирующая группа записана мультипликативно). Если мы хотим, однако, нормировать достаточно широкие классы колец (например, кольца с делителями нуля), то придется допустить нормирование при помощи упорядоченных полугрупп, а не только при помощи полугрупп. В настоящей работе обобщение идет именно в таком направлении.

§ 1. Определение нормированного кольца. Связь между кольцом и нормирующей полугруппой

Ассоциативное кольцо R называется *нормированным при помощи упорядоченной полугруппы P* , если всякому элементу a из R поставлен в соответствие элемент $w(a)$ из P , причем удовлетворяются условия:

1. $w(a - b) \leq \max(w(a), w(b))$.
2. $w(ab) = w(a)w(b)$.
3. Для всякого α из P существует такое a из R , что $w(a) = \alpha$.
4. Если $w(a) = 0$, то $a = 0$.

Здесь и дальше под упорядоченной полугруппой мы будем понимать множество, удовлетворяющее аксиомам работы (?). В дальнейшем мы будем называть кольца, нормированные при помощи упорядоченных полугрупп, просто нормированными кольцами.

Понятие нормированного кольца является обобщением понятия нормированного тела. Возникает вопрос, в какой мере теорию нормированных полей и тел можно перенести на нормированные кольца, предполагая, если нужно, коммутативность последних. В этом направлении пока далеко продвинуться не удалось, так как переносятся только сравнительно элементарные теоремы.

Так как понятие нормированного кольца является обобщением понятия нормированного тела, возникает вопрос, дает ли новое определение нормы возможность нормировать более широкие классы тел или получить для нормируемых тел новые нормы. Аксиомы нормы 1—4 для нормированных колец совпадают в точности с соответствующими аксиомами для тел. Аксиомы упорядоченной полугруппы требуют, однако, меньшего, чем аксиомы упорядоченной группы с присоединенным нулем (в наших обозначениях), при помощи которых нормируются тела. Пусть, однако, некоторое тело нормировано при помощи упорядоченной полугруппы. Тогда отображение $a \rightarrow w(a)$ мультипликативной группы тела на множество ненулевых элементов полугруппы является гомоморфным отображением группы на множество с одной операцией (в силу формулы $w(ab) = w(a)w(b)$) и поэтому множество ненулевых элементов полугруппы

является группой. Таким образом, в случае тел наше понятие нормированного кольца совпадает с обычным понятием нормированного тела.

При изучении нормированных колец большую роль будут играть понятия выпуклой подгруппы аддитивной группы, выпуклого подкольца и выпуклого идеала. Подгруппа G аддитивной группы кольца R , нормированного при помощи полугруппы P , называется *выпуклой*, если из $a \in G, w(a) \geq w(b)$ следует $b \in G$. Подкольцо (а также правый, левый, двусторонний идеал кольца R) называется *выпуклым*, если выпуклой является его аддитивная группа.

Поставим всякой выпуклой подгруппе G аддитивной группы кольца R в соответствие совокупность Γ таких α из P , для которых существует $g \in G$ с $w(g) = \alpha$. Очевидно, что Γ будет выпуклым подмножеством в P и что $0 \in \Gamma$. Всякому выпуклому подкольцу ставится при этом в соответствие выпуклая подполугруппа, содержащая 0, всякому выпуклому правому идеалу кольца R — выпуклый правый идеал полугруппы P , и аналогично для левых и двусторонних идеалов. Все последние утверждения следуют из аксиомы

$$w(ab) = w(a)w(b).$$

Поставим всякому выпуклому подмножеству Γ полугруппы P , содержащему 0, в соответствие совокупность G таких g из R , что $w(g) \in \Gamma$. Легко видеть, что G является выпуклой подгруппой аддитивной группы кольца R и что подгруппе G соответствует снова Γ . Если Γ является, кроме того, подполугруппой, то G будет выпуклым подкольцом; если Γ — выпуклый правый идеал в P , то G будет выпуклым правым идеалом в R , и так же для левых и двусторонних идеалов. Теперь ясно, что построенное нами соответствие между выпуклыми подгруппами в R и выпуклыми подмножествами с нулем в P является взаимно однозначным. При этом выпуклым подкольцам в R соответствуют выпуклые подполугруппы с нулем и обратно, выпуклым правым идеалам в R — выпуклые правые идеалы в P , и обратно, и т. д. Если мы в дальнейшем будем говорить, что выпуклой подгруппе G аддитивной группы кольца соответствует выпуклое подмножество упорядоченной полугруппы P или обратно, то соответствие понимается именно в указанном смысле.

Пусть задана некоторая система подгрупп аддитивной группы какого-нибудь кольца R , линейно упорядоченная по включению и содержащая 0 и все R . Такая упорядоченная система подгрупп называется *полной*, если она содержит также объединение и пересечение любого множества своих подгрупп.

Если задана некоторая определенная полная система подгрупп и элемент a кольца R , то обозначим через G_a минимальную подгруппу этой системы, содержащую элемент a (она обязательно существует).

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы ассоциативное кольцо R можно было нормировать при помощи какой-нибудь упорядоченной полугруппы, необходимо и достаточно, чтобы в R существовала полная система подгрупп аддитивной группы, удовлетворяющая условиям:*

- 1) из $b \in G_a$ следует $bc \in G_{ac}$ и $cb \in G_{ca}$ для всех c из R ;

2) из $b \notin G_a$, $c \in R$, $bc \in G_{ac}$ следует $bc = ac = 0$, из $b \notin G_a$, $c \in R$ и $cb \in G_{ca}$ следует $cb = ca = 0$.

Пусть кольцо R нормировано при помощи упорядоченной полугруппы P . Система выпуклых подгрупп кольца R будет полной: объединение и пересечение любого множества выпуклых подгрупп являются выпуклыми подгруппами. Подгруппа G_a для этой системы состоит из тех и только тех b из R , для которых

$$w(b) \leq w(a).$$

Пусть $b \in G_a$. Тогда

$$w(b) \leq w(a).$$

и

$$w(bc) = w(b)w(c) \leq w(a)w(c) = w(ac),$$

т. е. $bc \in G_{ac}$. Если же $b \notin G_a$, то

$$w(b) > w(a)$$

и

$$w(bc) \geq w(ac).$$

Из $bc \in G_{ac}$ следует

$$w(bc) \leq w(ac),$$

а поэтому

$$w(b)w(c) = w(a)w(c).$$

Теперь из аксиомы 5 для полугрупп вытекает:

$$w(bc) = w(ac) = 0$$

и, следовательно,

$$bc = ac = 0.$$

Необходимость условий доказана.

Предположим, что в R задана полная система подгрупп, удовлетворяющая условиям 1 и 2. Рассмотрим подгруппы этой системы, имеющие непосредственно предшествующие (в смысле включения). Легко видеть, что это будут подгруппы вида G_a и только они. Далее, $G_b \subset G_a$ тогда и только тогда, когда $b \in G_a$, и $G_b = G_a$ тогда и только тогда, когда $b \in G_a$ и $a \in G_b$.

Определим на множестве подгрупп вида G_a умножение формулой

$$G_a G_b = G_{ab}.$$

Тогда из условия 1 следует, что умножение определено однозначно и сохраняет порядок (отношение включения). Ассоциативность умножения подгрупп следует из ассоциативности кольца. Роль нуля играет нулевая подгруппа G_0 , содержащаяся во всех других. Выполнение аксиомы 5 определения упорядоченной полугруппы следует из условия 2. Если $G_b \not\subset G_a$, то, например, $b \notin G_a$. Из $G_b G_c = G_a G_c$ следует $bc \in G_{ac}$, а тогда, по условию 2,

$$bc = ac = 0.$$

Таким же образом проверяется выполнение другого требования.

Этим доказано, что подгруппы G_a составляют упорядоченную полугруппу, которую мы обозначим через P .

Покажем, что кольцо R можно нормировать при помощи полугруппы P . Для этого всякому элементу a кольца R поставим в соответствие подгруппу G_a . Если $G_a \supset G_b$, то

$$a - b \in G_a \text{ и } G_{a-b} \subset G_a,$$

т. е. выполняется аксиома 1 нормы. Выполнение аксиом 2 и 3 очевидно. Аксиома 4 следует из того, что G_0 является нулевой подгруппой.

ТЕОРЕМА 2. *Для любой упорядоченной полугруппы P существует кольцо R , нормированное при помощи этой полугруппы.*

Пусть задана упорядоченная полугруппа P . Возьмем какое-нибудь ассоциативное кольцо \mathcal{S} без делителей нуля. Образует полугрупповое кольцо $\mathcal{S}(P, \mathcal{S})$ полугруппы P над кольцом \mathcal{S} . Всякий элемент этого кольца имеет вид $a = \sum a_i \alpha_i$, где $a_i \in \mathcal{S}$, $\alpha_i \in P$ и лишь конечное число коэффициентов a_i отлично от нуля. Умножение определяется формулой

$$(a\alpha)(b\beta) = (ab)(\alpha\beta);$$

на элементы общего вида это определение умножения распространяется так, чтобы выполнялся закон дистрибутивности.

Элементы вида $a0$ составляют в $\mathcal{S}(P, \mathcal{S})$ двусторонний идеал $\mathcal{S}(0, \mathcal{S})$. Рассмотрим фактор-кольцо

$$R = \mathcal{S}(P, \mathcal{S}) / \mathcal{S}(0, \mathcal{S}).$$

Нормируем кольцо R при помощи полугруппы P следующим образом. Выберем в смежном классе $\bar{a}\mathcal{S}(P, \mathcal{S})$ по $\mathcal{S}(0, \mathcal{S})$ представителя a . Нормой этого класса будем считать наибольшее α_i , входящее в запись $a = \sum_i a_i \alpha_i$ с коэффициентом a_i , отличным от нуля. Очевидно, что норма класса не зависит от выбора представителя. Проверим выполнение аксиом нормы 1—4. Пусть

$$a = \sum a_i \alpha_i, \quad b = \sum b_j \beta_j,$$

причем наибольшим среди α_i является α_1 , а наибольшим среди β_j является β_1 . При $\alpha_1 > \beta_1$ в записи

$$a - b = \sum c_k \gamma_k$$

наибольшим среди γ_k будет α_1 . При $\alpha_1 = \beta_1$ наибольшее γ_k не превосходит α_1 . Этим показано, что выполняется аксиома 1. Аксиома 2 следует из того, что в записи

$$ab = \sum d_l \delta_l$$

наибольшим δ_l будет $\alpha_1 \beta_1$. Аксиомы 3 и 4 очевидны. Теорема 2 доказана.

Пусть заданы кольцо R , нормированное при помощи полугруппы P , и кольцо \bar{R} , нормированное при помощи полугруппы \bar{P} . Мы говорим,

что нормированное кольцо R гомоморфно отображается на нормированное кольцо \bar{R} , если существует такое гомоморфное отображение $a \rightarrow \bar{a}$ кольца R на кольцо \bar{R} , при котором из

$$w(a) \geq w(b)$$

следует

$$\bar{w}(\bar{a}) \geq \bar{w}(\bar{b})$$

и из

$$\bar{w}(\bar{a}) = \bar{w}(\bar{b}) \neq \bar{0}$$

следует

$$w(a) = w(b).$$

Мы говорим, что нормированное кольцо R изоморфно отображается на нормированное кольцо \bar{R} , если существует такое изоморфное отображение $a \leftrightarrow \bar{a}$ кольца R на кольцо \bar{R} , при котором соответствие $w(a) \leftrightarrow \bar{w}(\bar{a})$ является изоморфным отображением полугруппы P на полугруппу \bar{P} , сохраняющим упорядоченность.

Покажем, что если в кольце R , нормированном при помощи упорядоченной полугруппы P , задан выпуклый двусторонний идеал J , то фактор-кольцо R/J можно естественным образом нормировать. Возьмем в P выпуклый двусторонний идеал I , соответствующий идеалу J . Областью значений нормы для R/J будет фактор-полугруппа P/I . Чтобы получить норму какого-нибудь ненулевого смежного класса R по J , возьмем представителя этого класса, найдем его норму в P и возьмем соответствующий этому элементу из P элемент фактор-полугруппы P/I . Покажем, что норма не зависит от выбора представителя a в смежном классе \bar{a} . Любой другой элемент этого смежного класса можно представить в виде $a - b$, где $b \in J$. Тогда

$$w(a - b) \leq \max(w(a), w(b) = w(a)),$$

так как, в силу выпуклости J , будет

$$w(a) > w(b).$$

С другой стороны,

$$a = (a - b) - (-b),$$

где $-b \in J$. Используя это представление, мы получим

$$w(a) \leq w(a - b),$$

т. е.

$$w(a) = w(a - b).$$

Нормой нулевого смежного класса будем считать нуль фактор-полугруппы P/I . Проверим выполнение аксиом нормы.

Обозначим через $\bar{w}(\bar{a})$ норму смежного класса \bar{a} в P/I , а через $\bar{w}(\bar{a})$ — элемент в P/I , соответствующий элементу $w(a)$ в P . Тогда

$$\bar{w}(\bar{a}) = \bar{w}(\bar{a}).$$

Из 1-й аксиомы нормы для кольца R следует:

$$w(a - b) \leq \max(w(a), w(b)).$$

Отсюда выводим, что

$$\overline{w(a-b)} \leq \max(\overline{w(a)}, \overline{w(b)}).$$

Но

$$\overline{w(a-b)} = \overline{w}(\overline{a-b}), \quad \overline{w(a)} = \overline{w(a)}, \quad \overline{w(b)} = \overline{w(b)},$$

т. е.

$$\overline{w}(\overline{a-b}) \leq \max(\overline{w}(\overline{a}), \overline{w}(\overline{b})).$$

По 2-й аксиоме нормы для R , имеем:

$$w(ab) = w(a)w(b).$$

Следовательно,

$$\overline{w(ab)} = \overline{w(a)w(b)} = \overline{w(a)}\overline{w(b)}.$$

Так как

$$\overline{w(ab)} = \overline{w}(\overline{ab}) = \overline{w}(\overline{a}\overline{b}),$$

то

$$\overline{w}(\overline{a}\overline{b}) = \overline{w}(\overline{a})\overline{w}(\overline{b}).$$

3-я и 4-я аксиомы нормы для R/J очевидны. Этим норма для R/J построена. Если мы в дальнейшем будем рассматривать фактор-кольцо нормированного кольца R по выпуклому идеалу J , то будем всегда предполагать его нормированным указанным способом.

ТЕОРЕМА 3. *Каждый гомоморфный образ \overline{R} нормированного кольца R изоморфен некоторому фактор-кольцу R/J . При этом J есть выпуклый двусторонний идеал, составленный из тех элементов, образом которых в \overline{R} служит нуль. Обратно, каждое фактор-кольцо R/J является гомоморфным образом кольца R .*

Допустим, что кольцо R , нормированное при помощи полугруппы P , гомоморфно отображается на кольцо \overline{R} , нормированное при помощи полугруппы \overline{P} . По теореме о гомоморфизмах для колец, ядро J этого гомоморфизма является двусторонним идеалом в R и \overline{R} изоморфно с R/J . Покажем, что идеал J будет выпуклым. Действительно, если $\overline{a} = \overline{0}$ и $w(a) \geq w(b)$, то

$$\overline{0} = \overline{w}(\overline{a}) \geq \overline{w}(\overline{b}),$$

т. е.

$$\overline{w}(\overline{b}) = \overline{0} \text{ и } \overline{b} = \overline{0}.$$

Множество I всех элементов из P , которые отображаются в $\overline{0}$ полугруппы \overline{P} при соответствии $w(a) \rightarrow \overline{w}(\overline{a})$, совпадает с выпуклым двусторонним идеалом, соответствующим идеалу J в полугруппе P . Рассмотрим фактор-полугруппу P/I . Обозначим опять через $\overline{w}(\overline{a})$ элемент, соответствующий в P/I элементу $w(a) \in P$ (для $w(a) \in I$ будет $\overline{w}(\overline{a}) = \overline{0}$). Всякому элементу $w(a)$ из P/I поставим в соответствие элемент $\overline{w}(\overline{a})$ из \overline{P} . Нетрудно

видеть, что это соответствие будет взаимно однозначным. Далее,

$$\overline{w(a)} \overline{w(b)} = \overline{w(a)w(b)} = \overline{w(ab)} \rightarrow \overline{w(ab)} = \overline{w}(\overline{ab}) = \overline{w}(\overline{a}\overline{b}) = \overline{w}(\overline{a})\overline{w}(\overline{b}).$$

Из $\overline{w(a)} \geq \overline{w(b)}$ следует $w(a) \geq w(b)$, а отсюда $\overline{w}(\overline{a}) \geq \overline{w}(\overline{b})$. Этим установлено, что упорядоченные полугруппы P/I и \overline{P} изоморфны. Теперь мы можем сказать, что естественный изоморфизм между R/J и \overline{R} является изоморфизмом нормированных колец (нормой смежного класса в R/J является как раз $\overline{w(a)}$, где a — некоторый представитель этого класса).

Пусть, с другой стороны, мы имеем кольцо R , нормированное при помощи полугруппы P , и его фактор-кольцо R/J по выпуклому идеалу J . Покажем, что нормированное кольцо R можно гомоморфно отобразить на нормированное кольцо R/J . Действительно, естественный гомоморфизм кольца R на кольцо R/J удовлетворяет требуемым условиям. Именно, из $w(a) \geq w(b)$ в P следует $\overline{w(a)} \geq \overline{w(b)}$ в P/I , из $\overline{w(a)} = \overline{w(b)} \neq \overline{0}$ в P/I получаем $w(a) = w(b)$ в P , по определению P/I . Теорема 3 полностью доказана.

§ 2. Простейшие свойства нормированного кольца. Радикал

Назовем элемент a нормированного кольца R *целым*, если его норма является целым элементом в полугруппе P . Совокупность всех целых элементов нормированного кольца R обозначим через \mathcal{H} . Через \mathcal{M} обозначим множество, состоящее из нуля и всех таких a из R , что $w^2(a) < w(a)$. Элементы множества $\mathcal{H} \setminus \mathcal{M}$ назовем *единицами* нормированного кольца.

ТЕОРЕМА 4. *Множество \mathcal{H} является во всяком нормированном кольце R выпуклым подкольцом.*

Очевидно, что множеству \mathcal{H} соответствует в P подмножество K . По теореме 1 работы (?), K является в P выпуклой подполугруппой. Отсюда следует утверждение теоремы.

ТЕОРЕМА 5. *Всякая выпуклая подгруппа аддитивной группы подкольца \mathcal{H} является в нем двусторонним идеалом.*

Пусть G — выпуклая подгруппа аддитивной группы кольца \mathcal{H} . Тогда ему соответствует в P выпуклое подмножество Γ , содержащее 0. По теореме 2 работы (?), Γ является двусторонним идеалом в K . Следовательно, G является двусторонним идеалом в \mathcal{H} .

Мы говорим, что кольцо R без делителя нуля нормировано тривиально, если оно нормировано при помощи полугруппы, состоящей из 0 и ε , где $\varepsilon^2 = \varepsilon$.

ТЕОРЕМА 6. *Если $\mathcal{M} \neq \mathcal{H}$, то \mathcal{M} является максимальным выпуклым двусторонним идеалом в \mathcal{H} , идеал \mathcal{M} будет простым в \mathcal{H} и фактор-кольцо \mathcal{H}/\mathcal{M} тривиально нормировано.*

Множеству \mathcal{M} соответствует в P подмножество M . По теореме 3 работы (?), M является максимальным выпуклым идеалом в K . Так как соответствие между выпуклыми идеалами упорядоченной полугруппы P и выпуклыми идеалами нормированного кольца R взаимно однозначно и

сохраняет включение, то выпуклый двусторонний идеал \mathcal{M} является максимальным в \mathcal{K} . Простота идеала \mathcal{M} в \mathcal{K} следует из простоты M в K . По теореме 3 работы (?), фактор-полугруппа K/M является требуемой полугруппой. \mathcal{K}/M тривиально нормировано, так как, по определению, оно нормируется фактор-полугруппой K/M .

Фактор-кольцо \mathcal{K}/M мы будем называть кольцом классов вычетов данного нормированного кольца R .

Теорему 2 можно уточнить следующим образом. Для любой упорядоченной полугруппы P с единицей и любого ассоциативного кольца \mathcal{S} без делителей нуля существует кольцо R , нормированное при помощи полугруппы P и имеющее кольцо \mathcal{S} в качестве кольца классов вычетов.

ТЕОРЕМА 7. Если J является выпуклым правым идеалом в R и $J \neq R$, то $J \subset \mathcal{M}$.

Идеалу J соответствует в P правый идеал I , причем $I \neq P$. По теореме 4 работы (?), $I \subset M$, а поэтому $J \subset \mathcal{M}$.

ТЕОРЕМА 8. Если нормированное кольцо R ($R^2 \neq 0$) разлагается в прямую сумму двух колец $R = A \dot{+} B$, то одно из колец будет кольцом с нулевым умножением.

Так как $R^2 \neq 0$, то, например, A не является кольцом с нулевым умножением. Существуют, следовательно, такие элементы a_1 и a_2 из A , что $a_1 a_2 \neq 0$. Допустим, что существует такое $b \in B$, что $w(b) \geq w(a_1)$. Отсюда следовало бы, что

$$0 = w(ba_2) \geq w(a_1 a_2) > 0,$$

что невозможно. Таким образом, для всех b_1 из B выполняется

$$w(b_1) < w(a_1).$$

С другой стороны,

$$w(b_1 b_2) \leq w(a_1 b_2) = 0$$

при любом b_2 из B . Мы получили, что $B^2 = 0$.

ТЕОРЕМА 9. В нормированном кольце R совокупность \mathcal{N} всех нильпотентных элементов является выпуклым двусторонним идеалом в R . Радикалы Бэра, Левицкого и Кётэ кольца R совпадают с \mathcal{N} . Фактор-кольцо R/\mathcal{N} не имеет делителей нуля.

Очевидно, что все нильпотентные элементы кольца и только они имеют нильпотентную норму. Радикалу N полугруппы P кольца R соответствует в R как раз множество \mathcal{N} . Поэтому, по теореме 5 работы (?), \mathcal{N} будет выпуклым двусторонним идеалом в R . Из того, что \mathcal{N} является объединением нильпотентных правых идеалов в полугруппе P , следует, что \mathcal{N} является объединением нильпотентных правых идеалов в кольце R . Поэтому \mathcal{N} содержится в радикале Бэра кольца R . С другой стороны, \mathcal{N} содержит радикал Кётэ кольца R , так как в \mathcal{N} содержатся все нильпотентные элементы кольца R . Из доказанных включений и того, что радикал Бэра содержится в радикале Кётэ, следует, что оба эти радикала совпадают с \mathcal{N} . А тогда совпадает с \mathcal{N} и радикал Левицкого, всегда расположенный между радикалами Бэра и Кётэ.

Из теоремы 9 следует, что если в нормированном кольце R существуют делители нуля, то радикал \mathcal{N} кольца R отличен от нуля.

Покажем, что радикалы Джекобсона и Брауна — Маккоя в нормированном кольце не всегда будут выпуклыми.

Рассмотрим кольцо R степенных рядов $f(x, y)$ от двух неизвестных без свободного члена над кольцом целых чисел. Это кольцо является радикальным в смысле Джекобсона. Именно, элемент

$$-(f + f^2 + \dots + f^n + \dots),$$

запись которого имеет смысл, так как каждый член $x^m y^n$ встречается в ней только конечное число раз, будет присоединенно-обратным к элементу $f(x, y)$, так как

$$f \circ [-(f + f^2 + \dots + f^n + \dots)] = f - (f + f^2 + \dots + f^n + \dots) + f(f + f^2 + \dots) = 0.$$

Это равенство означает, что коэффициент при каждом члене $x^m y^n$ в левой части равен нулю, в чем можно убедиться, используя выражение присоединенно-обратного элемента.

Рассмотрим теперь в кольце R подкольцо \mathcal{S} таких рядов, в которых число членов, не содержащих y , конечно. Элементами этого кольца являются ряды вида:

$$a(x) + b(x, y)y + cy,$$

где $a(x)$ — полином без свободного члена, $b(x, y) \in R$ и c — целое число.

Нормируем кольцо \mathcal{S} при помощи упорядоченной полугруппы Σ , являющейся ординальным прямым произведением двух упорядоченных полугрупп T , введенных в теореме 10 работы (7), к которому присоединен нуль и удалена единица. Элементами Σ будут произведения $\alpha^m \beta^n$ и 0. Σ упорядочивается так:

$$\alpha^m \beta^n \geq \alpha^p \beta^q,$$

если $m < p$ или если $m = p$ и $n \leq q$. Нормой ряда, состоящего только из одного члена $\alpha x^m y^n$, $\alpha \neq 0$, будем считать элемент $\alpha^m \beta^n$. Нормой ряда общего вида будем считать наибольшую из норм его членов (она всегда существует). Можно проверить, что все аксиомы упорядоченной полугруппы и аксиомы нормы действительно выполняются.

Множество J всех элементов из \mathcal{S} , все члены которых содержат y , является идеалом в \mathcal{S} . Идеал J будет радикальным: если $f(x, y) \in J$, то при любом n $f^n \in J$ и

$$f + f^2 + \dots + f^n + \dots \in J.$$

Покажем, что J является радикалом \mathcal{N} кольца \mathcal{S} в смысле Джекобсона. J , как радикальный идеал, содержится в этом радикале \mathcal{N} . Допустим, что в \mathcal{N} существует такой элемент

$$a(x) + b(x, y)y + cy,$$

что $a(x) \neq 0$. Тогда также $a(x) \in \mathcal{N}$. Элемент, присоединенно-обратный

к $a(x)$, имеет вид:

$$-a(x) - a^2(x) - \dots - a^n(x) - \dots = b(x).$$

Ясно, что $b(x) \neq 0$. Элемент $b(x)$ не может оказаться полиномом от x , так как тогда было бы

$$a(x) \circ b(x) = 0,$$

т. е.

$$a(x) + b(x) = a(x)b(x),$$

но степень произведения полиномов без свободного члена всегда строго больше степеней обоих сомножителей, а тогда и строго больше степеней суммы. Этим доказано, что $a(x)$ не имеет присоединенно-обратного элемента в \mathcal{S} в противоречие с предложением.

Но \mathcal{M} не является выпуклым идеалом в \mathcal{S} . Именно,

$$w(y) > w(x), \quad y \in \mathcal{M}, \text{ но } x \notin \mathcal{M}.$$

Так как в кольце \mathcal{S} , в силу его коммутативности, радикал Джекобсона совпадает с радикалом Брауна — Маккоя, то этим установлено, что в нормированном кольце ни тот, ни другой радикал не обязан быть выпуклым.

§ 3. Максимальный выпуклый идеал. Простые нормированные кольца

Назовем нормированное кольцо R *простым*, если оно не содержит отличных от 0 и p выпуклых двусторонних идеалов.

ТЕОРЕМА 10. Если $R \neq \mathcal{M}$, то в R существует максимальный выпуклый двусторонний идеал L . Фактор-кольцо R/L является простым нормированным кольцом.

Если в нормированном кольце R $\mathcal{M} \neq R$, то в его полугруппе P будет $M \neq P$. Тогда можно применить теорему 6 работы (?), в силу которой в P существует максимальный выпуклый двусторонний идеал Λ . Идеал L в R , соответствующий Λ в P , будет максимальным выпуклым двусторонним идеалом в R . Нормированное кольцо R/L будет простым, так как упорядоченная полугруппа P/Λ является простой.

ТЕОРЕМА 11. Простое нормированное кольцо не содержит и нетривиальных односторонних выпуклых идеалов.

Если нормированное кольцо R — простое, то упорядоченная полугруппа P , при помощи которой оно нормировано, является также простой. По теореме 7 работы (?), P не имеет нетривиальных односторонних выпуклых идеалов. Отсюда следует утверждение теоремы.

Из леммы 3 работы (?) следует, что простое нормированное кольцо является либо кольцом с нулевым умножением, либо не имеет делителей нуля.

Пусть мы имеем простое кольцо R с минимальным левым идеалом (в обычном смысле). Если R нормируемо, то оно является либо кольцом с нулевым умножением, либо не имеет делителей нуля. Но кольцо без делителей нуля и с минимальным левым идеалом является телом. По-

этому если R нормируемо, то оно является либо кольцом с нулевым умножением, либо телом. Пусть заданы кольцо A , нормированное при помощи упорядоченной полугруппы A , кольцо B , нормированное при помощи упорядоченной полугруппы B , и какое-то расширение P упорядоченной полугруппы A при помощи упорядоченной полугруппы B . Естественно считать, что задачей теории расширений нормированных колец является обозрение всех таких колец R , нормированных при помощи упорядоченной полугруппы P , в которых идеал, соответствующий идеалу A в P , изоморфен нормированному кольцу A , а фактор-кольцо по этому идеалу изоморфно нормированному кольцу B .

§ 4. Целые нормированные кольца

Назовем нормированное кольцо R *целым*, если оно нормируется при помощи целой упорядоченной полугруппы. На основе теорем 9 и 10 мы можем сказать, что *общая теория нормированных колец сводится к теории нормированных ниль-колец, целых нормированных колец, простых нормированных колец и к теории расширений для нормированных колец*. Заметим, что последняя еще не построена.

Нормированное кольцо R называется *мультипликативно архимедовским*, если оно нормировано при помощи архимедовской упорядоченной полугруппы P .

ТЕОРЕМА 12. *Для того чтобы целое нормированное кольцо R было мультипликативно архимедовским, необходимо и достаточно, чтобы оно не содержало отличных от 0 и R выпуклых простых двусторонних идеалов.*

Эта теорема является следствием теоремы 11 работы (?), если учесть, что выпуклым простым идеалам полугруппы соответствуют выпуклые простые идеалы кольца, и наоборот.

ТЕОРЕМА 13. *В целом нормированном кольце R существует полная система выпуклых двусторонних идеалов, в которой фактор-кольцо всякого идеала по непосредственно предшествующему (если он существует) является целым мультипликативно архимедовским нормированным кольцом.*

Возьмем систему, состоящую из всех выпуклых простых двусторонних идеалов кольца R . Эта система линейно упорядочена по включению, содержит 0 и R . Возьмем пересечение $\bigcap_{\alpha} J_{\alpha}$ некоторого множества простых идеалов. Пусть элементы a и b не принадлежат этому пересечению. Тогда существуют такие α и β , что $a \notin J_{\alpha}$ и $b \notin J_{\beta}$. Пусть $J_{\alpha} \subset J_{\beta}$ (в противном случае $J_{\beta} \subset J_{\alpha}$). Элементы a и b не принадлежат J_{α} , значит $ab \notin J_{\alpha}$ и $ab \notin \bigcap_{\alpha} J_{\alpha}$. Таким образом, пересечение выпуклых простых идеалов является выпуклым простым идеалом. Докажем, что объединение $\bigcup_{\alpha} J_{\alpha}$ некоторого множества выпуклых простых идеалов является также выпуклым простым идеалом. Если элементы a и b не лежат в $\bigcup_{\alpha} J_{\alpha}$, то они не лежат ни в одном из J_{α} . Следовательно, ab не лежит ни в одном из J_{α} , т. е. не лежит в $\bigcup_{\alpha} J_{\alpha}$.

Пусть J_α и J_β — выпуклые простые двусторонние идеалы в R , причем J_α непосредственно предшествует J_β . Тогда соответствующие идеалы I_α и I_β в P будут простыми в P и I_α непосредственно предшествует I_β . По теореме 11 работы (?), как I_α , так и I_β состоят из выпуклого множества архимедовских классов полугруппы P . При этом I_β должен содержать ровно один архимедовский класс, не содержащийся в I_α (иначе между I_α и I_β существовали бы выпуклые простые идеалы). Следовательно, фактор-полугруппа I_β/I_α является архимедовской, а поэтому нормированное кольцо J_β/J_α будет мультипликативно архимедовским.

Пусть задано кольцо R , нормированное при помощи упорядоченной полугруппы P . Допустим, что в P задано отношение конгруэнтности, относительно которого 0 составляет отдельный класс, и такое, что фактор-полугруппа Σ по этому отношению конгруэнтности является упорядоченной полугруппой. Обозначим через $\bar{\alpha}$ класс элемента α из P . Легко видеть, что формулой $\bar{w}(a) = \overline{w(a)}$ можно определить норму для кольца R в полугруппе Σ (здесь $w(a) \in P$, $\bar{w}(a) \in \Sigma$). Можно проверить, что все аксиомы нормы действительно выполняются. Естественно назвать такое нормирование при помощи полугруппы Σ более слабым, чем нормирование при помощи полугруппы P .

ТЕОРЕМА 14. *Для всякого целого архимедовского нормирования кольца R существует более слабое нетривиальное нормирование при помощи подполугруппы мультипликативной полугруппы неотрицательных действительных чисел.*

Пусть кольцо R нормировано при помощи целой архимедовской упорядоченной полугруппы P . По теореме 12 работы (?), в P существует отношение конгруэнтности, фактор-полугруппа Σ по которому изоморфна подполугруппе мультипликативной полугруппы неотрицательных действительных чисел в ее упорядоченности. Эта подполугруппа является, конечно, упорядоченной полугруппой. Σ состоит более чем из двух элементов. Именно, все ненулевые элементы в P не могут оказаться близкими. Если элементы α и β близки, то α и α^2 уже не являются близкими. 0 составляет относительно этого отношения конгруэнтности действительно отдельный класс.

Если теперь нормировать R способом, указанным в определении более слабой нормы, то получим требуемую норму.

ТЕОРЕМА 15. *Если в нормированном кольце R выполнено условие убывающих цепей для выпуклых левых идеалов, то любой левый идеал кольца R , содержащийся в \mathcal{M} , нильпотентен.*

Возьмем левый идеал I кольца R , причем $I \subset \mathcal{M}$. Тогда его выпуклое замыкание \bar{I} является выпуклым левым идеалом и содержится также в \mathcal{M} . Пусть \bar{I} и \mathcal{M} соответствуют в P подмножества I и M . Из условия убывающих цепей выпуклых левых идеалов для R вытекает соответствующее условие для P . Применяя теорему 13 работы (?), мы получим, что идеал I является нильпотентным. Отсюда вытекает нильпотентность идеалов \bar{I} и I .

Покажем, как результаты о нормированных кольцах можно приложить к упорядоченным кольцам. Одновременно мы дадим доказательства теорем работы (?), которые там не были даны.

§ 5. Упорядоченные кольца

Кольцо R (не обязательно ассоциативное) называется *упорядоченным*, если:

- 1) R есть линейно упорядоченное множество относительно отношения \geq ;
- 2) для любых a и b из R из $a \geq b$ следует $a + c \geq b + c$ при любом c из R ;
- 3) из $a \geq 0$ и $b \geq 0$ следует $ab \geq 0$.

Определим в упорядоченном кольце *архимедовские классы* следующим образом. Неотрицательные элементы a и b , где $a \geq b$, отнесем к одному классу, если существует такое натуральное число n , что $nb \geq a$. Это определение аналогично тому, которое мы ввели для упорядоченных полугрупп. Нуль составляет, очевидно, отдельный класс. Легко проверить, что отношение принадлежности к одному классу рефлексивно, симметрично и транзитивно и, следовательно, действительно определяет разбиение множества всех неотрицательных элементов кольца на непересекающиеся классы.

В дальнейшем мы будем под упорядоченными кольцами понимать только ассоциативные упорядоченные кольца.

ТЕОРЕМА 16. *Архимедовские классы любого упорядоченного кольца R составляют упорядоченную полугруппу P . Кольцо R можно нормировать при помощи полугруппы P .*

Обозначим архимедовский класс элемента a из R через \bar{a} и определим умножение классов формулой $\bar{a}\bar{b} = \overline{ab}$. Покажем, что умножение классов определено однозначно: если $\bar{a} = \bar{c}$, то $\bar{a}\bar{b} = \bar{c}\bar{b}$, и если $\bar{b} = \bar{c}$, то $\bar{a}\bar{b} = \bar{a}\bar{c}$.

Пусть $a \geq c$. Тогда существует такое n , что

$$nc \geq a \geq c.$$

Отсюда

$$(nc)b = n(cb) \geq ab \geq cb.$$

Это и означает, что $\bar{a}\bar{b} = \bar{c}\bar{b}$. Второе утверждение доказывается аналогично. Отметим, что если одним из множителей служит нулевой класс, то произведение равно нулевому классу. Ассоциативность умножения классов следует из ассоциативности кольца R .

Множество архимедовских классов кольца R можно линейно упорядочить, считая, что один класс больше другого, если всякий положительный элемент первого класса больше всех элементов второго класса.

Докажем выполнение аксиомы 3 из определения упорядоченной полугруппы. Пусть $\bar{a} \geq \bar{b}$ и \bar{c} — любой архимедовский класс кольца R . Тогда существует такое натуральное n , что $na \geq b$. Отсюда мы получим, что $n(ac) \geq bc$, а это значит, что $\bar{a}\bar{c} \geq \bar{b}\bar{c}$. Аналогично проверяется выполнение другого требования аксиомы 3.

Мы уже убедились выше, что аксиома 4 выполняется. Проверим выполнение аксиомы 5. Пусть мы имеем $\bar{a} > \bar{b}$, но $\bar{a}\bar{c} = \bar{b}\bar{c}$. Покажем, что тогда

$$\bar{a} \bar{c} = \bar{b} \bar{c} = \bar{0}.$$

Из $\bar{a} > \bar{b}$ следует, что выполняется $a > nb$ при любом натуральном n . Отсюда следует, что

$$ac \geq n(bc).$$

Но в силу $\bar{ac} = \bar{bc}$ должно существовать такое натуральное m , что

$$m(bc) \geq ac.$$

Мы получим, что

$$m(bc) = ac.$$

Отсюда

$$m(bc) \geq n(bc)$$

для всех натуральных n , что возможно лишь при $bc = 0$, а поэтому и $ac = 0$. В силу того, что классы \bar{ac} и \bar{bc} содержат 0, мы получаем, что они оба равны нулевому классу. Выполнение второго требования аксиомы 5 проверяется аналогично. Этим доказано, что множество P является упорядоченной полугруппой.

Назовем абсолютной величиной $|a|$ элемента a упорядоченного кольца R неотрицательный из элементов $a, -a$. Точно так же, как для действительных чисел, можно показать, что

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Отсюда мы получим, что

$$|a + b| \leq 2 \max(|a|, |b|).$$

Будем считать нормой элемента a кольца R и обозначать через $w(a)$ архимедовский класс, содержащий его абсолютную величину, $w(a) = \overline{|a|}$. Нам следует показать, что выполняются аксиомы 1—4 определения нормированного кольца.

Из неравенства

$$|a - b| \leq 2 \max(|a|, |b|)$$

следует, что

$$\overline{|a - b|} \leq \max(\overline{|a|}, \overline{|b|}).$$

Это есть другая запись неравенства

$$w(a - b) \leq \max(w(a), w(b)).$$

Аксиома 2 следует из равенства $\overline{ab} = \overline{a} \overline{b}$. Аксиомы 3 и 4 очевидны. Теорема 16 доказана.

Нормирование упорядоченного кольца R , определенное способом, указанным в теореме 16, назовем естественным нормированием кольца R . Ввиду теоремы 16, для упорядоченных колец имеют смысл все понятия, введенные нами для нормированных колец.

В частности, имеют смысл понятия выпуклой подгруппы аддитивной группы, выпуклого подкольца и т. д. Но в упорядоченном кольце можно определить выпуклые подмножества, исходя, как в работе ⁽⁸⁾, из упорядоченности самого кольца. Однако легко показать, что для подгрупп аддитивной группы упорядоченного кольца оба понятия выпуклости совпадают.

Покажем, что фактор-кольцо упорядоченного кольца R по выпуклому двустороннему идеалу J можно естественным образом упорядочить. Мы скажем, что $A \geq B$ для смежных классов A и B кольца R по J , если существуют такие $b \in B$ и $a \in A$, что $a \geq b$. Из выпуклости идеала следует, что все смежные классы по нему являются выпуклыми подмножествами в смысле упорядоченности кольца R . Нетрудно проверить, что множество смежных классов будет относительно отношения \geq упорядоченным множеством. Если теперь $A \geq B$ и C — любой смежный класс кольца R по J , то выберем такие $a \in A$ и $b \in B$, что $a \geq b$, и возьмем какое-нибудь c из C . Из упорядоченности кольца следует, что

$$a + c \geq b + c.$$

Но

$$a + c \in A + C, \quad b + c \in B + C,$$

а поэтому

$$A + C \geq B + C.$$

Смежные классы A и B будут неотрицательными тогда и только тогда, когда они содержат неотрицательные элементы (например, соответственно a и b). Тогда класс AB будет содержать $ab \geq 0$ и, следовательно, будет неотрицательным. Этим в R/J введена естественная упорядоченность.

Мы знаем также, что упорядоченное кольцо R и его фактор-кольцо R/J по выпуклому двустороннему идеалу J можно нормировать. Можно показать, что естественная норма упорядоченного кольца R/J совпадает с нормой фактор-кольца R/J , получающейся в том случае, если рассматривать R только как нормированное (при помощи естественной нормы) кольцо. Это будет следовать из того, что ненулевые смежные классы относятся к одному архимедовскому классу в R/J тогда и только тогда, когда все их представители относятся к одному архимедовскому классу в R .

Отображение $a \rightarrow a'$ упорядоченного кольца R на упорядоченное кольцо R' называется гомоморфизмом упорядоченных колец, если оно является гомоморфизмом колец в обычном смысле и удовлетворяет условию: из $a \geq b$ следует $a' \geq b'$. Аналогично определяется изоморфизм упорядоченных колец.

ТЕОРЕМА 17. *Каждый гомоморфный образ R' упорядоченного кольца R изоморфен некоторому упорядоченному фактор-кольцу R/J . При этом J есть выпуклый двусторонний идеал, составленный из тех элементов, образом которых в R' служит нуль. Обратно, каждое фактор-кольцо R/J является гомоморфным образом упорядоченного кольца R .*

Доказательство этой теоремы проводится по образцу доказательства теоремы 3 и не представляет трудностей. Мы его опускаем.

Упорядоченное кольцо R называется архимедовски упорядоченным, если оно имеет только один ненулевой архимедовский класс.

ТЕОРЕМА 18. *Для любой упорядоченной полугруппы P существует упорядоченное кольцо R , для которого P является полугруппой архимедовских классов.*

Возьмем какое-нибудь архимедовски упорядоченное кольцо \mathcal{S} без делителей нуля. Построим, как и в теореме 2, кольцо $R = \mathcal{S}(P, \mathcal{S}) / \mathcal{S}(0, \mathcal{S})$. Пусть даны два смежных класса \bar{a} и \bar{b} этого фактор-кольца. Выберем в

их по представителю $a = \sum a_i \alpha_i$ и $b = \sum b_j \beta_j$. Мы считаем, что $\bar{a} > \bar{b}$, если коэффициент при наибольшем γ_k , входящем в запись

$$a - b = \sum c_k \gamma_k,$$

является положительным. Можно проверить, что относительно так определенной упорядоченности кольцо R является упорядоченным кольцом. Благодаря архимедовости кольца \mathcal{S} к одному архимедовскому классу в R относятся те и только те смежные классы, для которых совпадает наибольший элемент полугруппы, входящий в запись (любого) их представителя. Отсюда следует, что P является полугруппой архимедовских классов для упорядоченного кольца R . Теорема 18 доказана.

Во всяком упорядоченном кольце R можно определить при помощи его естественной нормы подмножество \mathcal{K} и \mathcal{M} . Они совпадают с подмножествами \mathcal{K} и \mathcal{M} , определенными в работе (8). Теоремы 4 и 6 применимы к упорядоченным кольцам, как к частному случаю. Этим получены доказательства теорем 1 и 2 работы (8).

Теорему 18 можно уточнить. Для любой упорядоченной полугруппы P с единицей и любого архимедовски упорядоченного кольца \mathcal{S} без делителей нуля существует упорядоченное кольцо R , для которого полугруппой архимедовских классов будет P и кольцом классов вычетов — кольцо \mathcal{S} .

Ясно, что для упорядоченных колец верны теоремы 8 и 9. При этом в теореме 9 фактор-кольцо R/\mathcal{N} упорядоченного кольца по его радикалу можно упорядочить (\mathcal{N} — выпуклый идеал). Мы получили доказательства теорем 6, 8 и 9 работы (8).

Радикалы Джекобсона и Брауна — Маккоя даже в упорядоченном кольце, как утверждалось уже в работе (8), не обязаны быть выпуклыми. Чтобы доказать это, рассмотрим то же кольцо R степенных рядов, при помощи которого строился соответствующий пример для нормированных колец. В R возьмем опять подкольцо \mathcal{S} . Пусть $f(x, y)$ и $g(x, y)$ являются элементами из \mathcal{S} . Считаем $f(x, y) > g(x, y)$, если в $f(x, y) - g(x, y)$ коэффициент при члене с наибольшей нормой является положительным. Относительно так определенной упорядоченности \mathcal{S} будет упорядоченным кольцом. Норма, определенная нами ранее, является естественной нормой упорядоченного таким образом кольца \mathcal{S} . Радикал \mathcal{N} кольца \mathcal{S} не был выпуклым относительно нормы и не является выпуклым относительно упорядоченности.

Имеет смысл понятие *простого* упорядоченного кольца (определяется при помощи естественной нормы кольца), причем оно совпадает с соответствующим понятием в работе (8). Для упорядоченных колец верна теорема 10 и ее доказательство служит доказательством теоремы 10 работы (8). Таким же образом определяются *целые* упорядоченные кольца.

Теоремами 9 и 10 общая теория упорядоченных колец сводится к теории упорядоченных ниль-колец, целых упорядоченных колец, простых упорядоченных колец и к теории расширений упорядоченных колец.

Для упорядоченных колец имеют также место теоремы 11, 12, 13 и 15. В теореме 12 фактор-кольцо каждого выпуклого двустороннего идеала из системы по непосредственно предшествующему (если он существует) будет мультипликативно архимедовским упорядоченным кольцом.

Поступило
23.XII.1955

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Conrad P., Embedding theorems for Abelian groups with valuations, Am. J. Math., 75 (1953), 1—29.
 - ² Conrad P., On ordered division rings, Proc. Am. Math. Soc., 5 : 2 (1954), 323—328.
 - ³ Krull W., Allgemeine Bewertungstheorie, J. reine und angew. Math., 167 (1932), 160—196.
 - ⁴ Mahler K., Über Pseudobewertungen, Acta Math., 66 (1936), 79—119.
 - ⁵ Rees D., Valuations associated with a local ring, Proc. Lond. Math. Soc., 5 : 17 (1955), 107—128.
 - ⁶ Schilling O. F. G., The theory of valuations, Am. Math. Soc., 1950.
 - ⁷ Хион Я. В., Упорядоченные полугруппы, Известия Акад. наук СССР, серия математ., 21 (1957), 209—222.
 - ⁸ Хион Я. В., Ассоциативные упорядоченные кольца, Доклады Акад. наук СССР, 101, № 6 (1955), 1005—1007.
-

И. Д. СТУПИНА

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ Г-ОПЕРАЦИИ

(Представлено академиком П. С. Александровым)

В работе показано, что общая теорема о накрытии множеств имеет место для Г-операции над CA_2 -множествами и, в духе непротиворечивости в системе аксиом теории множеств Σ К. Гёделя, над CA_n -множествами в случае точек p -значности, конечнозначности, счетнозначности и точек, определяемых множеством цепей жесткой приведенной базы Г-операции, имеющим компактное замыкание.

Введение

Пусть E есть плоское множество некоторого класса множеств Ξ ($\Xi \subset I_{x_0}$ или J_{x_0}) * и все множества $E \cdot P_{x_0}$ (P_{x_0} есть множество точек, лежащих на прямой $x = x_0$) имеют некоторое свойство K . Спрашивается, существует ли множество H класса $B\Xi$ такое, что $E \subset H$ и все множества $H \cdot P_{x_0}$ имеют свойство K ? Задачи такого рода часто называются задачами о *накрытии* множеств.

Первый результат в этом направлении был получен В. И. Гливенко [см. (1), (2), стр. 235, (3), стр. 75]: равномерное A -множество всегда покрывается таким же B -множеством. В дальнейшем ряд вопросов такого же характера был рассмотрен Н. Н. Лузиным [см. (2), стр. 241], П. С. Новиковым (4), А. А. Ляпуновым (5), З. И. Козловой [см. (6), (7)].

Для класса R -множеств, открытого А. Н. Колмогоровым и изученного Л. В. Канторовичем, Е. М. Ливенсоном и А. А. Ляпуновым [см. (8), (9), (10), (11), (12)], как показал в ряде работ А. А. Ляпунов [см. (12), (13)], выполняется теорема, аналогичная теореме В. И. Гливенко, а именно:

Если N — жесткая база ** δs -операции такая, что операции с базами N^{nm} имеют типы, не более сильные, чем R_N^α -тип, и $\{E_n\}$ — последовательность

* I с индексами обозначает евклидово пространство, J с индексами — множество точек, все координаты которых иррациональны (бэровское пространство).

** Пусть N — база некоторой δs -операции; цепь $\eta \in N$ называется жесткой цепью базы N , если она не содержит в себе никакой другой цепи базы N . База N , состоящая из одних только жестких цепей, называется жесткой базой [см. (14)].

$R_N^\alpha(\Xi)$ -множеств такая, что каждая точка множества $\Phi_N(\{E_n\})$ является точкой N -однозначности последовательности множеств $\{E_n\}$, то существует последовательность $BR_N^\alpha(\Xi)$ -множеств $\{H_n\}$ такая, что $H_n \supset E_n$, и каждая точка множества $\Phi_N(\{H_n\})$ является точкой N -однозначности последовательности множеств $\{H_n\}$.

Аналогичные теоремы для R -множеств установлены в случае p -значности, где p — некоторое натуральное число, и в случае конечнзначности З. И. Козловой [см. (15)]. В работе (16) ею дано обобщение теорем о накрытии подобного рода:

Если N — жесткая база δs -операции Φ_N , λ — класс вполне регулярных * трансфинитных индексов по отношению к классу множеств Ξ , находящемуся во вполне правильном отношении ** с базой N и инвариантному относительно операции Φ_N , Φ_M — δs -операция, отбирающая точки, определяемые δs -операцией Φ_N , обладающие некоторым свойством U и такие, что $\Phi_M(\Xi) \subset \Phi_N(\Xi)$ и $\Phi_{M^n}(\Xi) \subset \Phi_N(\Xi)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, то для всякой последовательности множеств $\{E_n\}$ класса Ξ таких, что ни одна из точек множества $\Phi_N(\{E_n\})$ не обладает свойством U , найдется такая последовательность множеств $\{H_n\}$ класса $B\Xi$, что $H_n \supset E_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, и ни одна из точек множества $\Phi_N(\{H_n\})$ не обладает свойством U .

В той же работе доказано, что эта теорема имеет место в случае, когда N есть жесткая база A -операции, класс Ξ есть класс A -множеств, CA_2 -множеств и, в смысле непротиворечивости в системе аксиом теории множеств \sum Гёделя [см. (17), (18)], для класса CA_n -множеств, а свойство U состоит в том, чтобы быть точкой N -несчетнзначности, определяться множеством цепей базы N , имеющим некомпактное замыкание, определяться множеством цепей базы N , не являющимся рассеянным множеством индекса $\leq \alpha$ или не являющимся рассеянным семейством множеств, замыкание которых компактно, индекса $\leq \alpha$.

В настоящей работе доказывается, что общая теорема о накрытии множеств имеет место в случае, когда N есть жесткая база Γ -операции, класс Ξ есть класс CA_2 -множеств, в смысле непротиворечивости в системе аксиом теории множеств \sum Гёделя, для CA_n -множеств, а свойство U состоит в том, чтобы быть точкой не менее, чем $N - (p + 1)$ -значности, где p — некоторое натуральное число, точкой N -счетнзначности, точкой

* Класс трансфинитных индексов $\{\beta(x)\} = \Lambda$ называется *вполне регулярным* по отношению к классу множеств Ξ , если:

- 1) для всех $\beta(x) \in \Lambda$ $\beta(x) \leq \Omega$ и $[\beta(x) = \Omega] \in \Xi$;
- 2) для всякого $E \in \Xi$ существует $\beta(x) \in \Lambda$ такое, что $E = [\beta(x) = \Omega]$;
- 3) для всяких двух $\beta_1(x)$ и $\beta_2(x) \in \Lambda$ множество $[\beta_1(x) \geq \beta_2(x)] \in \Xi$;
- 4) для всяких двух E_1 и $E_2 \in \Xi$ существуют такие $\beta_1(x)$ и $\beta_2(x) \in \Lambda$, что $[\beta_1(x) = \beta_2(x)] = E_1 \cdot E_2$ и $E_1 = [\beta_1(x) = \Omega]$, $E_2 = [\beta_2(x) = \Omega]$.

** Пусть N — некоторая база δs -операции. Через N^n обозначается множество всех цепей базы N , которые содержат натуральное число n . На совокупности баз N и $\{N^n\}$ построим d -систему K , содержащую все конечные пересечения баз этой системы.

Класс множеств Ξ и база N находятся во вполне правильном отношении [см. (15), стр. 126], если:

- 1) класс множеств $\Phi_N(\Xi)$ инвариантен относительно счетных сумм и пересечений;
- 2) при любой базе $M \in K$ имеет место соотношение: $\Phi_M(\Xi) \subset \Phi_N(\Xi)$.

N -несчетнозначности, определяться множеством цепей жесткой приведенной базы $*\check{N}$, имеющим некомпактное замыкание.

§ 1. A -операцией [см. (19)] над системой множеств $\{E_{n_1 \dots n_k}\}$ называют операцию вида

$$A(\{E_{n_1 \dots n_k}\}) = \sum_{n_1 n_2 \dots n_k \dots} \prod_{k=1} E_{n_1 \dots n_k},$$

где суммирование распространено на совокупность N всех последовательностей натуральных чисел, т. е. на совокупность всех точек баровского пространства J . Если все кортежи $(n_1 \dots n_k)$ занумеровать и обозначить через $v(n_1 \dots n_k)$ натуральное число, соответствующее $(n_1 \dots n_k)$, и для точки

$$\xi = (n_1, n_2, \dots, n_k, \dots) \in N$$

положить

$$\varphi(\xi) = (v(n_1), v(n_1 n_2), \dots, v(n_1 \dots n_k), \dots),$$

то получим $\varphi(N) = N'$. Тогда A -операцию над системой множеств $\{E_{n_1 \dots n_k}\}$ можно будет записать в виде δs -операции:

$$A(\{E_{n_1 \dots n_k}\}) = \Phi_N(\{E_{v(n_1 \dots n_k)}\}),$$

где N' — жесткая база этой операции.

Операцией, дополнительной к A -операции, является Γ -операция, введенная в 1922 г. П. С. Александровым [см. (20)], определяемая следующим образом:

$$\begin{aligned} \Gamma(\{E_{n_1 \dots n_k}\}) &= CA(\{CE_{n_1 \dots n_k}\}) = \\ &= \prod_{n_1 \dots n_k \dots} \sum_{k=1}^{\infty} E_{n_1 \dots n_k} = C\Phi_{N'}(\{CE_{v(n_1 \dots n_k)}\}) = \\ &= \Phi_{N'_c}(\{E_{v(n_1 \dots n_k)}\}), \end{aligned}$$

где N'_c есть жесткая база δs -операции $\Phi_{N'_c}$, которая, как показал П. С. Александров [см. (20)], состоит из всех таких цепей

$$\eta = (v_1, v_2, \dots, v_i, \dots), \quad v_i = v(n_1^i \dots n_{k_i}^i), \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

для которых сумма всех интервалов Бэра $\{\delta_{n_1^i \dots n_{k_i}^i}\}$ покрывает все пространство J , т. е.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \delta_{n_1^i \dots n_{k_i}^i} = J$$

и

$$\delta_{n_1^i \dots n_{k_i}^i} \cdot \delta_{n_1^{i'} \dots n_{k_{i'}}^{i'}} = 0, \text{ если } i \neq i'.$$

ЛЕММА 1. Жесткая база δs -операции является нигде не плотным множеством в баровском пространстве.

* Пусть N — жесткая база некоторой δs -операции. Если каждую цепь этой базы упорядочить в порядке возрастания элементов цепи, то полученную совокупность цепей будем называть жесткой приведенной базой и обозначать через \check{N} .

Доказательство. Пусть N — жесткая база δs -операции и пусть цепь $\eta \in \delta_{n_1 \dots n_k}$, где $\eta \in N$. В силу того, что любая цепь $\eta' \in N$ не содержит одинаковых элементов, интервал $\delta_{n_1 \dots n_k n_{k+1}}$, $n_k = n_{k+1}$, не содержит ни одной цепи базы N . Лемма доказана.

Обозначим через \check{J} множество возрастающих последовательностей натуральных чисел. Это множество замкнуто в бэровском пространстве.

Действительно, пусть

$$\{\xi_i\} = \{(n_1^i, n_2^i, \dots, n_k^i, \dots)\}$$

— множество таких возрастающих последовательностей натуральных чисел что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \xi_i = \xi^* = (n_1^*, n_2^*, \dots, n_k^*, \dots).$$

Тогда для всякого k найдется номер r_k такой, что для всех $i \geq r_k$

$$n_l^i = n_l^*, \quad l = 1, 2, \dots, k.$$

Так как

$$\xi_i \in \check{J}, \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

то

$$n_1^i < n_2^i < \dots < n_k^i.$$

В силу этого, при любом k

$$n_1^* < n_2^* < \dots < n_k^*,$$

т. е.

$$\xi^* \in \check{J}.$$

ЛЕММА 2. Приведенная жесткая база Γ -операции N'_c является нигде не плотным множеством в пространстве \check{J} .

Доказательство. Пусть интервал Бэра

$$\delta_{n_1 \dots n_i} \supset \eta = (v_1, v_2, \dots, v_i, \dots),$$

где $\eta \in \check{N}'_c$. Тогда

$$n_j < n_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, i-1,$$

$$n_l = v(n_1^l \dots n_{i_l}^l), \quad l = 1, 2, \dots, i,$$

и

$$\delta_{n_1^j \dots n_{i_j}^j} \cdot \delta_{n_1^{j'} \dots n_{i_{j'}}^{j'}} = 0, \text{ если } j \neq j'.$$

Пусть $\delta_{n_1^* \dots n_r^*}$ — интервал Бэра такой, что его пересечение хотя бы с одним из интервалов

$$\{\delta_{n_1^s \dots n_{i_s}^s}\}, \quad s = 1, 2, \dots, i,$$

не пусто и $v(n_1^* \dots n_r^*) > n_i$. Рассмотрим интервал $\delta_{n_1 \dots n_i n_{i+1}}$, где

$$n_{i+1} = v(n_1^* \dots n_r^*).$$

Интервал $\delta_{n_1 \dots n_i n_{i+1}}$ не содержит ни одной цепи базы \check{N}'_c .

Действительно, допустим, что существует цепь

$$\eta^* = (v_1^*, v_2^*, \dots, v_i^*, \dots) \in \check{N}'_c$$

такая, что $\eta^* \in \delta_{n_1 \dots n_i n_{i+1}}$. Тогда

$$\nu_l^* = n_l, \quad l = 1, 2, \dots, i+1,$$

т. е.

$$\nu_l^* = \nu(n_1^l \dots n_{k_l}^l), \quad l = 1, 2, \dots, i,$$

и

$$\nu_{i+1}^* = \nu(n_1^* \dots n_r^*).$$

Но интервалы

$$\delta_{n_1 \dots n_{k_1}}^1, \delta_{n_1 \dots n_{k_2}}^2, \dots, \delta_{n_1 \dots n_{k_i}}^i, \delta_{n_1 \dots n_r}^*$$

не являются попарно не пересекающимися. Следовательно, цепь η^* не является жесткой. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Жесткая база Г-операции находится во вполне правильном отношении с любым классом множеств Ξ .

Действительно, $\Phi_{N'_c}(\Xi)$ инвариантно относительно счетных сумм и пересечений [см. (21), стр. 97, (22), теорема III].

Пусть $N'_c \nu_1 \dots \nu_k$ есть множество всех цепей базы N'_c , которые содержат натуральные числа ν_1, \dots, ν_k . Для существования вполне правильного отношения между N'_c и Ξ остается показать, что

$$\Phi_{N'_c \nu_1 \dots \nu_k}(\Xi) \subset \Phi_{N'_c}(\Xi).$$

Покажем, что

$$\Phi_{N'_c \nu(n_1^* \dots n_k^*)}(\Xi) \subset \Phi_{N'_c}(\Xi).$$

Занумеруем все множества системы $\{E_{\nu(n_1 \dots n_i)}\}$, за исключением множеств

$$E_{\nu(n_1^*)}, E_{\nu(n_1^* n_2^*)}, \dots, \\ \dots, E_{\nu(n_1^* \dots n_k^*)}, E_{\nu(n_1^* \dots n_k^* n_{k+1})}, \dots, E_{\nu(n_1^* \dots n_k^* n_{k+1} \dots n_{k+r})}, \dots,$$

в одну последовательность.

Через $E_{\nu(n_1^*)}$, где n_1 пробегает все натуральные числа, занумеруем множества $E_{\nu(n_1')}$, где $n_1' \neq n_1^*$, множества $E_{\nu(n_1^* n_2')}$, где $n_2' \neq n_2^*$, множества $E_{\nu(n_1^* \dots n_{k-1}' n_k^*)}$, где $n_k' \neq n_k^*$.

Пусть

$$E_{\nu(n_1 \dots n_{i-1})}^* = E_{\nu(n_1' \dots n_{i-1}')}.$$

Тогда через $E_{\nu(n_1 \dots n_{i-1} k)}^*$, где $k = 1, 2, 3, \dots$, занумеруем множества вида $E_{\nu(n_1' \dots n_{i-1}' n_k')}$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Мы получим новую систему множеств $\{E_{\nu(n_1 \dots n_i)}^*\}$. Очевидно,

$$\Phi_{\nu N'_c \nu(n_1^* \dots n_k^*)}(\{E_{\nu(n_1 \dots n_i)}^*\}) = \\ = E_{\nu(n_1^* \dots n_k^*)} \cdot \Phi_{\nu N'_c}(\{E_{\nu(n_1 \dots n_i)}^*\}).$$

Следовательно,

$$\Phi_{N'_c \nu(n_1^* \dots n_k^*)}(\Xi) \subset \Phi_{N'_c}(\Xi).$$

Легко видеть, что

$$\Phi_{N'_c(v(n_1^1 \dots n_{k_1}^1) \dots v(n_1^i \dots n_{k_i}^i))}(\{E_v\}) = \prod_{r=1}^i \Phi_{N'_c(n_1^r \dots n_{k_r}^r)}(\{E_v\}).$$

Таким образом,

$$\Phi_{N'_c(v_1 \dots v_i)}(\Xi) \subset \Phi_{N'_c}(\Xi),$$

что и требовалось доказать.

Пусть N — жесткая база некоторой δs -операции.

Точка x называется точкой N — p -значности последовательности множеств $\{E_n\}$, если существует p и только p различных цепей базы N , в ядра которых входит точка x .

Через N^* обозначается множество всех цепей, каждая из которых содержит по крайней мере две различные цепи базы N .

Через Φ_{N^*} обозначается δs -операция, которая отбирает точки, входящие не менее чем в два различных ядра, определяемых цепями базы N .

Через $\Phi_{[Np]^*}$ обозначается δs -операция, которая отбирает точки, входящие не менее чем в $(p+1)$ различных ядер, определяемых цепями базы N .

Точки x называются точками N -конечнозначности последовательности множеств $\{E_n\}$, если они являются точками N — p -значности последовательности множеств при некотором натуральном числе $p(x)$, зависящем от x .

Через $\Phi_{N^{**}}$ обозначается δs -операция, которая отбирает точки, входящие не менее чем в счетное число ядер δs -операции Φ_N .

На основании теорем 3. И. Козловой [см. (15), теоремы 1, 2, 4] и леммы 3, справедливо следующее утверждение:

Следствие 1. Для любого класса множеств Ξ имеют место следующие соотношения:

$$\Phi_{[N'_c p]^*}(\Xi) \subset \Phi_{N'_c}(\Xi), \quad \Phi_{[N'_c p]^* n}(\Xi) \subset \Phi_{N'_c}(\Xi),$$

$$\Phi_{N'^{**}}(\Xi) \subset \Phi_{N'_c}(\Xi), \quad \Phi_{N'^{**} n}(\Xi) \subset \Phi_{N'_c}(\Xi).$$

Следствие 2. Если Ξ — проективный класс множеств не ниже второго или класс CA -множеств, то

$$\Phi_{[N'_c p]^*}(\Xi) \subset \Xi, \quad \Phi_{[N'_c p]^* n}(\Xi) \subset \Xi,$$

$$\Phi_{N'^{**}}(\Xi) \subset \Xi, \quad \Phi_{N'^{**} n}(\Xi) \subset \Xi.$$

В силу того, что класс CA_2 -множеств Ξ инвариантен относительно G -операции, т. е.

$$\Phi_{N'_c}(\Xi) = \Xi,$$

и обладает классом вполне регулярных трансфинитных индексов $\{\beta(x)\}$

[см. ⁽²³⁾], класс минимальных индексов], то, на основании общей теоремы о накрытии множеств, изложенной в работе З. И. Козловой [см. ⁽¹⁶⁾], теорема 1], и следствия 2 леммы 3, получим следующее утверждение:

Следствие 3. Для всякой последовательности SA_2 -множеств $\{E_n\}$ таких, что каждая точка множества $\Phi_{N'_c}(\{E_n\})$ является точкой не более чем N'_c — r -значности (N'_c -конечнозначности) последовательности $\{E_n\}$, найдется такая последовательность B_2 -множеств $\{H_n\}$, что $H_n \supset E_n$ при любом n и каждая точка множества $\Phi_{N'_c}(\{H_n\})$ является точкой не более чем N'_c — r -значности (N'_c -конечнозначности) последовательности множеств $\{H_n\}$.

В силу того, что в системе аксиом теории множеств Σ Гёделя [см. ⁽¹⁷⁾] П. С. Новиковым установлена непротиворечивость утверждения, что, начиная с некоторого n , законы отделимости для проективных множеств n -го класса совпадают с законами отделимости для проективных множеств второго класса [см. ⁽¹⁸⁾], в этой системе аксиом будет непротиворечиво следующее утверждение:

Следствие 4. Начиная с некоторого n , для всякой последовательности SA_n -множеств $\{E_n\}$ таких, что каждая точка множества $\Phi_{N'_c}(\{E_n\})$ является точкой не более чем N'_c — r -значности (N'_c -конечнозначности) последовательности множеств $\{E_n\}$, найдется такая последовательность B_n -множеств $\{H_n\}$, что $H_n \supset E_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) и каждая точка множества $\Phi_{N'_c}(\{H_n\})$ является точкой не более чем N'_c — r -значности (N'_c -конечнозначности) последовательности множеств $\{H_n\}$.

§ 2. Пусть N — жесткая база некоторой δs -операции.

Точка x называется точкой N -несчетнозначности последовательности множеств $\{E_n\}$, если существует несчетное число цепей базы N , в ядра которых входит точка x .

Через $\Phi_{N^{***}}$ обозначается δs -операция, которая отбирает точки, входящие в несчетное число ядер δs -операции Φ_N , т. е. точки, получаемые Φ_N -операцией и являющиеся точками N -несчетнозначности.

Пусть $x \in \Phi_{N'_c}(\{E_v\})$. Тогда для x существует набор η_x интервалов Бэра $\{\delta_{n_1 \dots n_{k_i}}^i\}$, дающих покрытие пространства Бэра J , такой, что $x \in E_{v(n_1 \dots n_{k_i})^i}$ при любом i .

ЛЕММА 4. Для того чтобы $x \in \Phi_{N^{***}}(\{E_v\})$, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая счетная система интервалов $\{\delta_{n_1 \dots n_{k_i}}^i\}$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) из набора интервалов η_x , что:

- 1) для нее имеется номер r такой, что $n_r^i \neq n_r^{i'}$, если $i \neq i'$;
- 2) для каждого из интервалов $\{\delta_{n_1 \dots n_{k_i}}^i\}$ существует хотя бы одно

жесткое покрытие пространства J интервалами из набора η_x , в котором участвует этот интервал;

3) для каждого из интервалов $\{\delta_{n_1^i \dots n_{k_i}^i}\}$ существует хотя бы одно покрытие интервалами высшего ранга, принадлежащими набору η_x .

Доказательство достаточности. Пусть существует такая счетная система интервалов $\{\delta_{n_1^i \dots n_{k_i}^i}\}$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) из набора интервалов η_x , что:

1) для нее имеется номер r такой, что $n_r^i \neq n_r^{i'}$, если $i \neq i'$;

2) для каждого из интервалов $\{\delta_{n_1^i \dots n_{k_i}^i}\}$ существует хотя бы одно жесткое покрытие пространства J интервалами из набора η_x , в котором участвует этот интервал, и

3) для каждого из интервалов $\{\delta_{n_1^i \dots n_{k_i}^i}\}$ существует хотя бы одно покрытие интервалами высшего ранга, принадлежащими набору η_x .

Рассмотрим совокупность всевозможных жестких покрытий пространства J интервалами Бэра из набора интервалов η_x таких, что в каждом покрытии участвует при всех значениях i либо сам интервал рассматриваемой системы интервалов, либо его покрытие интервалами более высоких рангов из набора интервалов η_x .

Каждому числу i поставим в соответствие два индекса: 0 и 1. Пусть i_0 означает, что в покрытии участвует сам интервал $\delta_{n_1^i \dots n_{k_i}^i}$, а i^1 означает, что в покрытии участвует некоторое покрытие интервала $\delta_{n_1^i \dots n_{k_i}^i}$ интервалами высшего ранга из набора η_x . Тогда всякой последовательности $\{\alpha_i\}$, образованной из чисел 0 и 1, можно поставить в соответствие жесткое покрытие пространства J интервалами из набора η_x , в котором участвуют покрытия интервалов данной системы $\{\delta_{n_1^i \dots n_{k_i}^i}\}$, отвечающие последовательности $\{i^{\alpha_i}\}$. При этом, если последовательность $\{\alpha'_i\}$, составленная из чисел 0 и 1, отлична от последовательности $\{\alpha_i\}$, то этой последовательности соответствует покрытие пространства J интервалами из набора η_x , отличное от покрытия пространства J , соответствующего последовательности $\{\alpha_i\}$. Действительно, пусть $\alpha_k = \alpha'_k$ для $k < m$, $\alpha_m \neq \alpha'_m$, например, $\alpha_m = 0$, $\alpha'_m = 1$.

Тогда в покрытии пространства J , соответствующем последовательности $\{\alpha_i\}$, участвует сам интервал $\delta_{n_1^m \dots n_{k_m}^m}$, что соответствует индексу m^0 , а в покрытии пространства J , соответствующем последовательности $\{\alpha'_i\}$, участвует покрытие интервала $\delta_{n_1^m \dots n_{k_m}^m}$ интервалами более высокого ранга, что соответствует индексу m^1 . Следовательно, жесткие покрытия пространства J , отвечающие последовательностям $\{\alpha_i\}$ и $\{\alpha'_i\}$, различны. В силу того, что различных последовательностей $\{\alpha_i\}$, составленных из чисел 0 и 1, существует несчетное множество, то отсюда следует, что точке x отвечает несчетное число различных жестких покрытий пространства J из набора интервалов η_x , т. е.

$$x \in \Phi_{N_c^{***}}(\{E_v\}).$$

Таким образом, указанное в лемме условие достаточно.

Доказательство необходимости. Пусть $x \in \Phi_{N_c^{***}}(\{E_v\})$. Тогда из интервалов набора γ_x можно составить несчетное число различных жестких покрытий пространства J .

Скажем, что последовательность интервалов $\{\delta_{n_1^i \dots n_{k_i}^i}\}$ удовлетворяет условию (A), если:

- а) $\delta_{n_1^i \dots n_{k_i}^i} \cdot \delta_{n_1^{i'} \dots n_{k_{i'}}^{i'}} = 0$ при $i \neq i'$;
- б) $\lim_{i \rightarrow \infty} k_i = \infty$;
- в) найдется точка $\xi = (n_1^*, n_2^*, \dots, n_s^*, \dots)$ такая, что, каково бы ни было s , существует такой номер $j(s)$, зависящий от s , что $\delta_{n_1^i \dots n_{k_i}^i} \subset \delta_{n_1^* \dots n_s^*}$ при $i \geq j(s)$.

Допустим, что не существует счетной системы интервалов $\{\delta_{n_1^i \dots n_{k_i}^i}\}$ из набора γ_x такой, что

- 1) для нее найдется номер r , при котором $n_r^i \neq n_r^{i'}$, если $i \neq i'$;
- 2) для каждого из интервалов $\{\delta_{n_1^i \dots n_{k_i}^i}\}$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) существует хотя бы одно жесткое покрытие пространства J интервалами из набора γ_x , в котором он принимает участие;
- 3) для каждого из интервалов $\{\delta_{n_1^i \dots n_{k_i}^i}\}$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) существует хотя бы одно жесткое покрытие интервалами высшего ранга, принадлежащими набору γ_x .

Так как $x \in \Phi_{N_c^{***}}(\{E_v\})$, то среди интервалов набора γ_x найдутся интервалы, удовлетворяющие условиям 2) и 3).

Выделим систему попарно не пересекающихся интервалов наименьших рангов, удовлетворяющих условиям 2), 3), и таких, что вне интервалов этой системы не найдется ни одного интервала, удовлетворяющего условиям 2), 3). Эта система интервалов конечна. Действительно, допустим, что она бесконечна. Обозначим ее через $\{\sigma_i\}$.

В силу первоначального допущения, система $\{\sigma_i\}$ не может содержать в себе подсистемы, удовлетворяющей условию 1). Поэтому существует натуральное число n_1 такое, что счетное число интервалов из системы $\{\sigma_i\}$ будет вложено в интервал $\delta_{n_1^*}$.

Если нами определен интервал $\delta_{n_1^* \dots n_{k-1}^*}$, содержащий в себе счетное число интервалов из системы $\{\sigma_i\}$, то в силу того, что система интервалов $\{\sigma_i\}$ не содержит в себе подсистемы, удовлетворяющей условию 1), найдется такое натуральное число n_k , что интервал $\delta_{n_1^* \dots n_{k-1}^* n_k^*}$ будет содержать в себе счетное число интервалов из системы $\{\sigma_i\}$. Так как система $\{\sigma_i\}$ состоит из попарно не пересекающихся интервалов, то система интервалов

$$\delta_{n_1^*} \supset \delta_{n_1^* n_2^*} \supset \dots \supset \delta_{n_1^* \dots n_k^*} \supset \dots$$

определил единственную точку $\xi = (n_1^*, n_2^*, \dots, n_k^*, \dots) \in J$ такую, что

а) $\xi \notin \sigma_i$ ($i = 1, 2, 3, \dots$),

б) существует подсистема (σ_{i_k}) , удовлетворяющая условию (А) по отношению к точке ξ .

В силу того, что интервалы набора γ_{ix} должны целиком покрывать пространство J , найдется интервал Бэра $\delta_{n_1 \dots n_k}$ такой, что $\delta_{n_1 \dots n_k} \in \gamma_{ix}$, $\xi \in \delta_{n_1 \dots n_k}$ и $\delta_{n_1 \dots n_k}$ удовлетворяет условию 2). На тогда интервал $\delta_{n_1 \dots n_k}$ будет удовлетворять условиям 2), 3), так как он содержит некоторые интервалы подсистемы $\{\sigma_{i_k}\}$, где каждый из интервалов $\{\sigma_{i_k}\}$ удовлетворяет условию 2).

Так как ранг интервала $\delta_{n_1 \dots n_k}$ меньше, чем ранг вложенных в него интервалов подсистемы $\{\sigma_{i_k}\}$, то система интервалов $\{\sigma_i\}$ не может быть минимальной по рангу, что противоречит нашему допущению. Следовательно, остается предположить, что система попарно не пересекающихся интервалов наименьших рангов, удовлетворяющих условиям 2), 3), и таких, что вне интервалов этой системы не находится интервалов, удовлетворяющих условиям 2), 3), конечна. Пусть это будут интервалы $\{\sigma_{i_1}\}$, $i_1 = 1, 2, \dots, r_1$. Назовем эту систему интервалов системой первого порядка.

Пусть нами построена конечная система попарно не пересекающихся интервалов n -го порядка $\{\sigma_{i_1 \dots i_n}\}$, $i_k = 1, 2, \dots, r_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, удовлетворяющих условиям 2), 3), содержащихся внутри интервалов $(n-1)$ -го порядка и таких, что вне их в интервалах $(n-1)$ -го порядка не содержится других интервалов, удовлетворяющих условиям 2), 3). Пусть интервал $\sigma_{i_1 \dots i_n}$ — один из интервалов системы n -го порядка. В силу предшествующих рассуждений, среди интервалов, вложенных в интервал $\sigma_{i_1 \dots i_n}$, найдется не более конечного числа непесекающихся интервалов наименьших рангов, удовлетворяющих условиям 2), 3), и таких, что вне этих интервалов интервал $\sigma_{i_1 \dots i_n}$ не содержит ни одного интервала, удовлетворяющего условиям 2), 3). Пусть это будут интервалы

$$\{\sigma_{i_1 \dots i_n i_{n+1}}\}, \quad i_{n+1} = 1, 2, \dots, r_{n+1},$$

которые мы назовем интервалами $(n+1)$ -го порядка. Этот процесс может быть продолжен неограниченно, так как в противном случае из интервалов набора γ_{ix} можно составить лишь конечное число жестких покрытий пространства J , что противоречит тому, что $x \in \Phi_{N_c}^{****}(\{E_j\})$.

Пусть E_n — сумма всех интервалов системы n -го порядка. Положим

$$E = \prod_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Множество E замкнуто. Покажем, что оно компактно.

Допустим противное. Тогда существует наименьший номер r такой, что найдется счетная система попарно не пересекающихся интервалов ранга r $\{\sigma_i^*\}$ такая, что каждый интервал этой системы содержит хотя бы одну точку множества E . Пусть $\{\sigma_{i_i}\}$ — счетная подсистема системы $\{\sigma_i^*\}$ такая, что все интервалы $(\sigma_{i_i}^*)$ входят в один и тот же интервал $(r-1)$ -го

ранга. Очевидно, если $r = 1$, то системы $\{\sigma_{i_1}^*\}$ и $\{\sigma_i^*\}$ совпадают. В силу того, что каждый интервал $\sigma_{i_1}^*$ ($i = 1, 2, \dots$) содержит хотя бы одну точку $\eta_i \in E$, для каждого номера $i = 1, 2, 3, \dots$ найдется интервал $\delta_{n_1^i \dots n_{k_i}^i} \in \sigma_{i_1}^*$ такой, что $\delta_{n_1^i \dots n_{k_i}^i}$ участвует хотя бы в одном жестком покрытии пространства J интервалами из набора η_x и допускает собственное покрытие интервалами высшего ранга из набора η_x , т. е. удовлетворяет условиям 2), 3). При этом интервалы $\{\delta_{n_1^i \dots n_{k_i}^i}\}$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) таковы, что $n_r^i \neq n_r^{i'}$, если $i \neq i'$. Это противоречит допущению, что не существует счетной системы бэровских интервалов, удовлетворяющих условиям 1), 2), 3). Отсюда следует, что множество E компактно. В силу того, что множество E компактно, оно может быть покрыто всякий раз лишь конечным числом непересекающихся бэровских интервалов.

Каково бы ни было покрытие множества E , вне интервалов этого покрытия может находиться не более конечного числа интервалов, каждый из которых удовлетворяет условию 2) и допускает хотя бы одно, но конечное число различных собственных покрытий интервалами высшего ранга из набора η_x .

Действительно, допустим противное. Тогда существует такое покрытие множества E , что вне интервалов этого покрытия находится:

- а) либо счетная система непересекающихся интервалов, удовлетворяющих условиям 2), 3);
- б) либо счетная система вложенных друг в друга интервалов, удовлетворяющих условиям 2), 3);
- в) либо хотя бы один интервал, допускающий бесконечное число собственных покрытий интервалами высшего ранга из набора η_x .

Легко видеть, что третий случай сводится к одному из первых двух.

Пусть $\{\sigma_i\}$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) — такая система интервалов, что $\sigma_i \cdot \sigma_{i'} = 0$, если $i \neq i'$, каждый из интервалов удовлетворяет условиям 2), 3) и не пересекается ни с одним из интервалов данного покрытия множества E . Так как система $\{\sigma_i\}$ не удовлетворяет условию 1), то существуют точка ξ и подсистема $\{\sigma_{i_k}\}$ такие, что $\{\sigma_{i_k}\}$ удовлетворяет условию (A) по отношению к точке ξ .

В силу того, что интервалы $\{\sigma_i\}$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) не пересекаются ни с одним из интервалов данного покрытия множества E , точка

$$\xi \in E. \quad (1)$$

С другой стороны, так как, по предположению, каждый из интервалов $\{\sigma_{i_k}\}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) удовлетворяет условию 2), то найдется счетная система вложенных друг в друга интервалов таких, что каждый из них удовлетворяет условию 2) и пересечение их дает точку ξ . Действительно, существует покрытие пространства J интервалами из набора η_x , в котором участвует интервал σ_{i_1} . Пусть точка ξ в этом покрытии покрывается интервалом $\delta_{n_1^* \dots n_{k_1}^*}$. Пусть определены интервалы

$$\{\delta_{n_1^* \dots n_{k_1}^*}\}, \quad i = 1, 2, \dots, r-1,$$

такие, что

$$\xi \in \delta_{n_1^* \dots n_{k_i}^*}, \quad i = 1, 2, \dots, r-1,$$

$$\delta_{n_1^* \dots n_{k_{j-1}}^*} \supset \delta_{n_1^* \dots n_{k_j}^*}, \quad j = 1, 2, \dots, r-1,$$

и интервалы

$$\{\delta_{n_1^* \dots n_{k_i}^*}\}, \quad i = 1, 2, \dots, r-1,$$

удовлетворяют условию 2).

В силу того, что система $\{\sigma_{i_n}\}$ удовлетворяет условию (A) по отношению к точке ξ , найдется интервал $\sigma_{i_{k_r}}$ такой, что $\sigma_{i_{k_r}} \subset \delta_{n_1^* \dots n_{k_{r-1}}^*}$.

Обозначим через $\delta_{n_1^* \dots n_{k_r}^*}$ интервал, который покрывает точку ξ в том покрытии пространства J , в котором участвует интервал $\sigma_{i_{k_r}}$. В результате получится система интервалов $\{\delta_{n_1^* \dots n_{k_i}^*}\}$ такая, что каждый из интервалов удовлетворяет условиям 2), 3),

$$\delta_{n_1^* \dots n_{k_j}^*} \supset \delta_{n_1^* \dots n_{k_{j+1}}^*} \quad (j = 1, 2, 3, \dots)$$

и

$$\prod_{i=1}^{\infty} \delta_{n_1^* \dots n_{k_i}^*} = \xi.$$

Среди интервалов набора η_x , содержащих точку ξ и удовлетворяющих условию 2), выберем интервал наименьшего ранга. Пусть это будет $\delta_{n_1 \dots n_{k_1}}$. Пусть, далее, определены интервалы $\{\delta_{n_1 \dots n_{k_i}}\}$, $i = 1, 2, \dots, r-1$, такие, что каждый из них удовлетворяет условию 2) и

$$\delta_{n_1 \dots n_{k_i}} \ni \xi, \quad \delta_{n_1 \dots n_{k_{i-1}}} \supset \delta_{n_1 \dots n_{k_i}}, \quad i = 1, 2, \dots, r-1.$$

Среди интервалов набора η_x , вложенных в интервал $\delta_{n_1 \dots n_{k_{r-1}}}$, выберем интервал наименьшего ранга такой, что он содержит точку ξ и удовлетворяет условию 2). Пусть $\delta_{n_1 \dots n_{k_r}}$ — этот интервал. В результате получится система интервалов $\{\delta_{n_1 \dots n_{k_i}}\}$ такая, что каждый из интервалов этой системы удовлетворяет условию 2),

$$\delta_{n_1 \dots n_{k_j}} \ni \delta_{n_1 \dots n_{k_{j+1}}} \quad (j = 1, 2, 3, \dots)$$

и

$$\prod_{i=1}^{\infty} \delta_{n_1 \dots n_{k_i}} = \xi.$$

Ясно, что каждый из интервалов этой системы удовлетворяет и условию 3).

Покажем, что

$$\xi \in E.$$

Действительно, в силу того, что $\delta_{n_1 \dots n_{k_1}}$ удовлетворяет условиям 2), 3) и среди интервалов набора η_x не найдется ни одного интервала, включающего $\delta_{n_1 \dots n_{k_1}}$ и удовлетворяющего тем же условиям, интервал $\delta_{n_1 \dots n_{k_1}}$ должен входить в систему первого порядка, т. е.

$$\xi \in E_1.$$

Вообще, в силу того, что интервал $\delta_{n_1 \dots n_{k_n}}$ удовлетворяет условиям 2), 3) и среди интервалов набора η_x , вложенных в интервал $\delta_{n_1 \dots n_{k_{n-1}}}$, не найдется ни одного интервала, удовлетворяющего тем же условиям и включающего интервал $\delta_{n_1 \dots n_{k_n}}$, последний должен входить в систему n -го порядка, т. е.

$$\xi \in E_n.$$

Отсюда следует, что

$$\xi \in \prod_{n=1}^{\infty} E_n = E.$$

Но это противоречит соотношению (1). Следовательно, предположение, что вне интервалов некоторого покрытия множества E находится бесконечная система непересекающихся интервалов, удовлетворяющих условиям 2), 3), неверно.

Пусть $\{\sigma_i\}$ — счетная система интервалов таких, что

$$\sigma_1 \supset \sigma_2 \supset \dots \supset \sigma_i \supset \dots,$$

каждый из них удовлетворяет условиям 2), 3) и не пересекается ни с одним из интервалов данного покрытия множества E . Тогда система интервалов $\{\sigma_i\}$ определит единственную точку

$$\xi = \prod_{i=1}^{\infty} \sigma_i.$$

Так как σ_1 не пересекается ни с одним из интервалов данного покрытия множества E , то

$$\xi \notin E. \quad (2)$$

Пусть $\{\delta_{n_1 \dots n_{k_i}}\}$, где $\delta_{n_1 \dots n_{k_i}} \supset \delta_{n_1 \dots n_{k_{j+1}}}$ ($j = 1, 2, 3, \dots$), — система всех интервалов таких, что, каково бы ни было i ,

$$\delta_{n_1 \dots n_{k_i}} \ni \xi, \quad \delta_{n_1 \dots n_{k_i}} \in \eta_x$$

и удовлетворяет условию 2). Тогда каждый из интервалов $\{\delta_{n_1 \dots n_{k_i}}\}$ удовлетворяет условиям 2), 3). В силу того, что среди интервалов набора η_x нет интервала, включающего интервал $\delta_{n_1 \dots n_{k_1}}$ и удовлетворяющего условиям 2), 3), интервал $\delta_{n_1 \dots n_{k_1}}$ должен входить в систему первого порядка, т. е.

$$\delta_{n_1 \dots n_{k_1}} \subset E_1.$$

Тогда

$$\xi \in \delta_{n_1 \dots n_{k_1}} \subset E_1.$$

Вообще, так как интервал $\delta_{n_1 \dots n_{k_n}}$ удовлетворяет условиям 2), 3) и среди интервалов набора η_x , вложенных в интервал $\delta_{n_1 \dots n_{k_{n-1}}}$, не найдется ни одного интервала, удовлетворяющего условиям 2), 3) и включающего интервал $\delta_{n_1 \dots n_{k_n}}$, то последний должен входить в систему n -го порядка, т. е.

$$\delta_{n_1 \dots n_{k_n}} \subset E_n$$

и

$$\xi \in E_n.$$

Отсюда следует, что

$$\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \quad E.$$

Но это противоречит соотношению (2). Следовательно, наше предположение, что вне некоторого покрытия множества E существует бесконечная система вложенных друг в друга интервалов, удовлетворяющих условиям 2), 3), неверно.

Таким образом, каково бы ни было покрытие множества E , вне интервалов этого покрытия существует не более конечного числа интервалов, каждый из которых удовлетворяет условию 2) и допускает хотя бы одно, но конечное число различных собственных покрытий интервалами высшего ранга из набора η_x .

Так как множество E компактно, что во всяком жестком покрытии пространства J интервалами из набора η_x лишь конечное число непересекающихся интервалов покрывает множество E . В силу того, что существует не более счетного числа различных конечных совокупностей непересекающихся интервалов, участвующих в жестких покрытиях пространства J интервалами из набора η_x и покрывающих всякий раз множество E , а оставшаяся часть пространства J для каждой из таких конечных совокупностей при этом допускает не более конечного числа различных покрытий интервалами из набора η_x , то из интервалов набора η_x можно составить лишь счетное множество покрытий пространства J . Но это противоречит тому, что

$$x \in \Phi_{N_c}^{****}(\{E_v\}).$$

Следовательно, допущение, что не существует счетной системы интервалов из набора η_x , удовлетворяющих условиям 1), 2), 3), неверно.

Утверждение теоремы, таким образом, доказано.

Обозначим через $\Phi_{N_c}^{n_1 \dots n_k} \delta_s$ операцию, отбирающую такие точки x , что

$$x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} E_{s(n_1^i \dots n_{k_i}^i)},$$

где

$$\sum_{i=1}^{\infty} \delta_{n_1^i \dots n_{k_i}^i} = I - \delta_{n_1 \dots n_k}.$$

Применяя рассуждение леммы 3, получим:

$$\Phi_{N'_c}^{n_1 \dots n_k}(\Xi) \subset \Phi_{N'_c}(\Xi).$$

Через $\Phi_{N'_c(n_1 \dots n_k)}$ обозначим δ -операцию, отбирающую такие точки x , что

$$x \in \prod_{i=1}^{\infty} E_{\nu(n_1^i \dots n_{k_i}^i)},$$

где

$$\sum_{i=1}^{\infty} \delta_{n_1^i \dots n_{k_i}^i} = \delta_{n_1 \dots n_k}, \quad k_i > k \text{ для всех } i.$$

Покажем, что

$$\Phi_{N'_c(n_1 \dots n_k)}(\Xi) \subset \Phi_{N'_c}(\Xi).$$

Занумеруем множество $E_{\nu(n_1 \dots n_i)}$, где $\delta_{n_1 \dots n_i} \subset \delta_{n_1 \dots n_k}$, таким образом, что через $E_{\nu(n_{k+1})}$ обозначим множество $E_{\nu(n_1 \dots n_{kn_{k+1}})}$, через $E_{\nu(n_{k+1} \dots n_{k+i})}$ обозначим множество $E_{\nu(n_1 \dots n_{kn_{k+1}} \dots n_{k+i})}$ и т. д. Мы получим некоторую систему множеств $\{E_{\nu(n_1 \dots n_i)}^*\}$.

Очевидно,

$$\Phi_{N'_c(n_1 \dots n_k)}(\{E_{\nu}\}) = \Phi_{N'_c}(\{E_{\nu}\}),$$

т. е.

$$\Phi_{N'_c(n_1 \dots n_k)}(\Xi) \subset \Phi_{N'_c}(\Xi).$$

Обозначим через $\Phi_{N_c^*(n_1 \dots n_k)}$ δ -операцию, отбирающую такие точки x , для которых существуют по крайней мере две различные системы интервалов $\{\delta_{n_1^i \dots n_{k_i}^i}^*\}$ и $\{\delta_{n_1^* \dots n_{k_i}^*}^*\}$ такие, что

$$x \in E_{\nu(n_1^i \dots n_{k_i}^i)}, \quad x \in E_{\nu(n_1^* \dots n_{k_i}^*)}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

и

$$\sum_{i=1}^{\infty} \delta_{n_1^i \dots n_{k_i}^i} = \delta_{n_1 \dots n_k}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{n_1^* \dots n_{k_i}^*} = \delta_{n_1 \dots n_k}.$$

Очевидно, что

$$\Phi_{N_c^*(n_1 \dots n_k)}(\{E_{\nu}\}) = \Phi_{N_c^*}(\{E_{\nu}\}).$$

В силу следствия 1 леммы 3,

$$\Phi_{N_c^*(n_1 \dots n_k)}(\Xi) \subset \Phi_{N'_c}(\Xi).$$

ТЕОРЕМА 1. Каков бы ни был класс множеств Ξ ,

$$\Phi_{N_c^{***}}(\Xi) \subset \Phi_{N'_c}(\Xi), \quad \Phi_{N_c^{***n}}(\Xi) \subset \Phi_{N'_c}(\Xi).$$

Доказательство. Выделим точки $x \in \Phi_{N'_c}(\{E_v\})$, которые либо одновременно определяются цепями, содержащими в себе $v(n_1 \dots n_k)$, и цепями, содержащими в себе такие v , которые соответствуют жесткому покрытию интервала $\delta_{n_1 \dots n_k}$ интервалами более высокого ранга, либо определяются не менее чем двумя цепями, содержащими в себе v , соответствующие различным жестким покрытиям интервала $\delta_{n_1 \dots n_k}$ интервалами более высокого ранга. Это будет множество

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{n_1 \dots n_k} &= \Phi_{N'_c(v(n_1 \dots n_k))}(\{E_v\}) \cdot \Phi_{N'_c(n_1 \dots n_k)}(\{E_v\}) + \\ &+ \Phi_{N'_c(n_1 \dots n_k)}(\{E_v\}) \cdot \Phi_{N'_c}^{n_1 \dots n_k}(\{E_v\}). \end{aligned}$$

Множество $\mathcal{C}_{n_1 \dots n_k}^*$ точек x , определяемых не менее, чем счетным числом множеств $\mathcal{C}_{n_1 \dots n_k n_{k+1}}$ при постоянных значениях n_1, \dots, n_k , определяется равенством:

$$\mathcal{C}_{n_1 \dots n_k}^* = \lim_{n_{k+1}} \mathcal{C}_{n_1 \dots n_k n_{k+1}}$$

В силу леммы 4,

$$\Phi_{N'_c}^{\dots}(\{E_v\}) = \sum_{k: (n_1 \dots n_k)} \mathcal{C}_{n_1 \dots n_k}^*.$$

Следовательно,

$$\Phi_{N'_c}^{\dots}(\Xi) \subset \Phi_{N'_c}(\Xi).$$

Множество

$$\Phi_{N'_c}^{\dots n}(\{E_v\}) = \Phi_{N'_c}^{\dots}(\{E_v\}) \cdot \Phi_{N'_c}^n(\{E_v\}).$$

Отсюда, в силу леммы 3,

$$\Phi_{N'_c}^{\dots n}(\Xi) \subset \Phi_{N'_c}^n(\Xi),$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. Если Ξ — проективный класс множеств не ниже второго или класс СА-множеств, то

$$\Phi_{N'_c}^{\dots}(\Xi) \subset \Xi, \quad \Phi_{N'_c}^{\dots n}(\Xi) \subset \Xi.$$

На основании общей теоремы о накрытии множеств [см. (16), теорема 1] и следствия 1 теоремы 1, получим следующее утверждение:

Следствие 2. Для всякой последовательности СА₂-множеств $\{E_n\}$ таких, что каждая точка множества $\Phi_{N'_c}(\{E_n\})$ является точкой не более чем N'_c -счетнозначности последовательности множеств $\{E_n\}$, найдется такая последовательность В₂-множеств $\{H_n\}$, что $H_n \supset E_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) и каждая точка множества $\Phi_{N'_c}(\{H_n\})$ является точкой не более чем N'_c -счетнозначности последовательности множеств $\{H_n\}$.

В силу утверждения П. С. Новикова [см. (18)], в системе аксиом теории множеств Σ будет непротиворечиво

Следствие 3. Начиная с некоторого n , для всякой последовательности SA_n -множеств $\{E_n\}$ таких, что каждая точка множества $\Phi_{N'_c}(\{E_n\})$ является точкой не более чем N'_c -счетнозначности последовательности множеств $\{E_n\}$, найдется такая последовательность $\{H_n\}$ B_2 -множеств, что $H_n \supset E_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) и каждая точка множества $\Phi_{N'_c}(\{H_n\})$ является точкой не более чем N'_c -счетнозначности последовательности множеств $\{H_n\}$.

§ 3. Пусть \check{N} — жесткая приведенная база δs -операции Φ_N с жесткой базой N .

Скажем, что x определяется цепью $\eta = \{n_i\}$ относительно последовательности множеств $\{E_n\}$, если

$$x \in \prod_{n_i \in \eta} E_{n_i}.$$

Пусть $M_x = \{\eta\}$ обозначает для данной последовательности множеств $\{E_n\}$ и базы N множество всех таких $\eta \in \check{N}$, что x определяется цепью η относительно последовательности множеств $\{E_n\}$. Ясно, что для любого $x \in \Phi_N(\{E_n\})$ множество M_x принадлежит бэровскому пространству J .

Так как для каждого отдельного случая мы будем рассматривать фиксированную базу N и последовательность множеств $\{E_n\}$, то M_x будет зависеть только от x .

Через Φ_{N_*} обозначим δs -операцию, которая отбирает точки, получаемые δs -операцией Φ_N , каждая из которых определяется множеством цепей базы \check{N} , имеющим некомпактное замыкание.

ТЕОРЕМА 2. Если класс множеств Ξ и аза N находятся во вполне правильном отношении, то

$$\Phi_{N_*}(\Xi) \subset \Phi_N(\Xi).$$

Доказательство. Множество, компактное в бэровском пространстве J , не может быть покрыто счетной системой попарно не пересекающихся интервалов Бэра одинакового ранга так, чтобы каждый из интервалов содержал в себе точки данного компактного множества.

Пусть

$$E = \Phi_N(\{E_n\}),$$

где $E_n \in \Xi$. В силу вполне правильного отношения класса множеств Ξ с базой N ,

$$\Phi_{N^{n_1 \dots n_k}}(\Xi) \subset \Phi_N(\Xi)$$

и $\Phi_N(\Xi)$ инвариантно относительно счетного суммирования, счетного пересечения и, следовательно, относительно операции $\overline{\lim}$.

Пусть $n_1 < n_2 < \dots < n_k$. Положим

$$E_{n_1 \dots n_k}^1 = \Phi_{N^{n_1 \dots n_k}}(\{E_n^*\}),$$

где $E_n^* = 0$, если $n \neq n_i$, $i = 1, 2, \dots, k-1$, $n < n_k$, и $E_n^* = E_n$ во всех остальных случаях.

Легко видеть, что множество $E_{n_1 \dots n_k}^1 \in \Phi_N(\Xi)$ состоит из всех таких $x \in E$, для каждого из которых множество $M_x \cdot \delta_{n_1 \dots n_k}$ не пусто. А тогда множество всех тех $x \in E$, каждое из которых определяется не менее чем счетным числом множеств $E_{n_1 \dots n_k n_{k+1}}^1$, при постоянных значениях n_1, \dots, n_k определяется равенством:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{n_1 \dots n_k}^1 &= \overline{\lim}_n E_{n_1 \dots n_k (n_k + n)}^1 = \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{i=n}^{\infty} E_{n_1 \dots n_k (n_k + i)}^1 \in \Phi_N(\Xi). \end{aligned}$$

Множество

$$\Phi_{\check{N}_*}(\{E_n\}) = \sum_{\substack{k: (n_1 \dots n_k) \\ n_1 < \dots < n_k}} \mathcal{G}_{n_1 \dots n_k}. \quad (3)$$

Следовательно,

$$\Phi_{\check{N}_*}(\Xi) \subset \Phi_N(\Xi).$$

Множество

$$\Phi_{\check{N}^n}(\{E_m\}) = \Phi_{\check{N}_*}(\{E_m\}) \cdot \Phi_{N^n}(\{E_m\}).$$

Отсюда, в силу соотношения (3) и вполне правильного отношения класса множеств Ξ с базой N ,

$$\Phi_{\check{N}^n}(\Xi) \subset \Phi_N(\Xi).$$

На основании общей теоремы о накрытии множеств [см. (16), теорема 1] и теоремы 2, получим следующее утверждение:

Следствие 1. Если N — жесткая база δs -операции Φ_N , Λ — класс вполне регулярных трансфинитных индексов по отношению к классу множеств Ξ , находящемуся во вполне правильном отношении с базой N и инвариантному относительно операции Φ_N , то для всякой последовательности множеств $\{E_n\}$ класса Ξ таких, что каждая точка множества $\Phi_{N'_c}(\{E_n\})$ определяется компактным множеством цепей базы \check{N} (множеством цепей базы \check{N} , имеющим компактное замыкание), существует такая последовательность множеств $\{H_n\}$ класса $B\Xi$, что $H_n \supset E_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, и каждая точка множества $\Phi_N(\{H_n\})$ определяется множеством цепей базы \check{N} , имеющим компактное замыкание.

Следствие 2. Если Ξ — проективный класс множеств не ниже второго или класс СА-множеств, то

$$\Phi_{N'_c}(\Xi) \subset \Xi, \quad \Phi_{\check{N}^n_c}(\Xi) \subset \Xi.$$

На основании следствия 1 и следствия 2 теоремы 2, получим

Следствие 3. Для всякой последовательности CA_2 -множеств $\{E_n\}$ таких, что каждая точка множества $\Phi_{N'_c}(\{E_n\})$ определяется компактным множеством цепей базы \check{N}'_c (множеством цепей базы \check{N}'_c , имеющим компактное замыкание), существует такая последовательность B_2 -множеств $\{H_n\}$, что $H_n \supset E_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) и каждая точка множества $\Phi_{N'_c}(\{H_n\})$ определяется множеством цепей базы \check{N}'_c , имеющим компактное замыкание.

В силу утверждения П. С. Новикова [см. (1^к)], в системе аксиом теории множеств Σ будет непротиворечиво

Следствие 4. Начиная с некоторого n , для всякой последовательности CA_n -множеств $\{E_n\}$ таких, что каждая точка множества $\Phi_{N'_c}(\{E_n\})$ определяется компактным множеством цепей базы \check{N}'_c (множеством цепей базы \check{N}'_c , имеющим компактное замыкание), существует такая последовательность B_n -множеств $\{H_n\}$, что $H_n \supset E_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) и каждая точка множества $\Phi_{N'_c}(\{H_n\})$ определяется множеством цепей базы \check{N}'_c , имеющим компактное замыкание.

Поступило

7. V. 1956

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Гливенко В. И., О неявных функциях, Матем. сборн., XXXVI (1929), 138—142.
- ² Лужин Н. Н., Лекции об аналитических множествах и их приложениях, Москва, 1953.
- ³ Арсенин В. Я. и Ляпунов А. А., Теория A -множеств, Успехи матем. наук, т. V, вып. 5 (1950), 45—108.
- ⁴ Новиков П. С., Об одном свойстве аналитических множеств, Доклады Ак. наук СССР, II, № 5 (1934), 273—276.
- ⁵ Ляпунов А. А., Об отделимости аналитических множеств, Доклады Ак. наук СССР, II, № 5 (1934), 276—279.
- ⁶ Козлова З. И., О некоторых плоских A - и B -множествах, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 4 (1940), 479—500.
- ⁷ Козлова З. И., О накрытиях некоторых A -множеств, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 14 (1950), 421—442.
- ⁸ Колмогоров А. Н., Об операциях над множествами, Матем. сборн., 35 (1928), 414—422.
- ⁹ Канторович Л. В. и Ливенсон Е. М., Memoir on the analytical operations and projective sets. I, Fundamenta Mathematicae, XVIII (1932), 214—271.
- ¹⁰ Канторович Л. В. и Ливенсон Е. М., Memoir on the analytical operations and projective sets. II, Fundamenta Mathematicae, XX (1933), 54—97.
- ¹¹ Ляпунов А. А., R -множества, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова Ак. наук СССР, XL, Москва, 1953.
- ¹² Ляпунов А. А., Об операциях над множествами, допускающих трансфинитные индексы, Успехи матем. наук, т. 11, вып. 1 (67) (1956), 243—244.
- ¹³ Ляпунов А. А., О признаках вырождения для R -множеств, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 17 (1953), 563—578.
- ¹⁴ Очан Ю. С., О переместимости δs -операций, Матем. сборн., т. 10 (52):3 (1942), 151—163.
- ¹⁵ Козлова З. И., О накрытии множеств. I, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 19 (1955), 125—132.

- ¹⁶ Козлова З. И., О накрытии множеств. II, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 21 (1957), 349—370.
- ¹⁷ Гёдель К., Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств, перев. А. А. Маркова, Успехи матем. наук, т. III, вып. 1 (23) (1948), 96—149.
- ¹⁸ Новиков П. С., О непротиворечивости некоторых положений дескриптивной теории множеств, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова Ак. наук СССР, XXXVIII (1951), 279—316.
- ¹⁹ Александров П. С., Sur la puissance des ensembles mesurables B , Comptes Rendus, 162 (1916), 323—325.
- ²⁰ Александров П. С., Sur les ensembles complémentaires aux ensembles (A) , Fundamenta Mathematicae, V (1924), 160—165.
- ²¹ Очан Ю. С., Теория операций над множествами, Успехи матем. наук, X, вып. 3 (65) (1955), 71—123.
- ²² Канторович Л. В. и Ливенсон Е. М., Sur quelques théorèmes concernant la théorie des ensembles projectifs, Comptes Rendus de Paris, 204, № 5 (1937), 466—468.
- ²³ Новиков П. С., Sur la séparabilité des ensembles projectifs de seconde classe, Fundamenta Mathematicae, XXX (1935), 459—466.
-

З. И. КОЗЛОВА

О НАКРЫТИИ МНОЖЕСТВ. II

(Представлено академиком П. С. Александровым)

В работе дана общая теорема о накрытии множеств и показано, что она имеет место для A -операции над CA_2 -множествами и, в духе непротиворечивости в системе аксиом теории множеств Σ Гёделя, над CA_n -множествами для случаев точек p -значности, конечнозначности, счетнозначности, точек, определяемых множеством цепей базы A -операции с компактным замыканием, точек, определяемых рассеянным множеством цепей ограниченного индекса, точек, определяемых рассеянным семейством множеств цепей с компактным замыканием ограниченного индекса.

А. А. Ляпунов [см. (3), (4)], отправляясь от δs -операций Φ_N и Φ_{N^c} [см. (2), (3)], при помощи итерации конъюнктивных и дизъюнктивных расширений, показал, что для класса $R(\theta)$ -множеств, получаемых из класса множеств $\theta \subset I$, где I — произвольное пространство, выполняется следующая теорема (аналогичная теореме В. И. Гливенко о накрытии униформного A -множества таким же B -множеством):

Если N — жесткая база δs -операции такая, что все операции с базами N^{nm} имеют типы, не более сильные, чем R_N^α -тип, и $\{E_n\}$ — последовательность $R_N^\alpha(\theta)$ -множеств такая, что каждая точка множества $\Phi_N\{E_n\}$ является точкой N -однозначности последовательности множеств $\{E_n\}$, то существует последовательность $BR_N^\alpha(\theta)$ -множеств $\{H_n\}$ такая, что $H_n \supset E_n$ и каждая точка множества $\Phi_N\{H_n\}$ является точкой N -однозначности последовательности множеств $\{H_n\}$.

Аналогичные теоремы для R -множеств установлены в случае p -значности, где p — некоторое натуральное число, и в случае конечнозначности [см. (5)].

Эти теоремы могут быть получены как следствие из одной общей теоремы.

Пусть N — база некоторой δs -операции. Обозначим через N^n множество всех цепей базы N , которые содержат натуральное число n . На совокупности баз N и $\{N^n\}$ построим d -систему K , содержащую все конечные пересечения баз этой системы. Говорят, что класс множеств Ξ и база N находятся во вполне правильном отношении, если

1) класс множеств $\Phi_N(\Xi)$ инвариантен относительно счетных сумм и пересечений;

2) при любой базе $M \in K$ имеет место соотношение

$$\Phi_M(\Xi) \subset \Phi_N(\Xi).$$

ТЕОРЕМА I. Если N — жесткая* база δs -операции Φ_N , λ — класс вполне регулярных** трансфинитных индексов по отношению к классу множеств Ξ , находящемуся во вполне правильном отношении с базой N и инвариантному относительно операции Φ_N , Φ_M — δs -операция, отбирающая точки, определяемые δs -операцией Φ_N , обладающие некоторым свойством U , причем такая, что

$$\Phi_M(\Xi) \subset \Phi_M(\Xi) \text{ и } \Phi_{M^n}(\Xi) \subset \Phi_N(\Xi), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

то для всякой последовательности множеств $\{E_n\}$ класса Ξ таких, что ни одна из точек множества $\Phi_N(\{E_n\})$ не обладает свойством U , найдется такая последовательность множеств $\{H_n\}$ класса $B\Xi$, что $H_n \supset E_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, и ни одна из точек множества $\Phi_N(\{H_n\})$ не обладает свойством U .

Доказательство. В силу условий теоремы, в классе множеств Ξ выполняется первая теорема отделимости [см. (8), стр. 401, (9), теорема I]. А так как класс Ξ находится во вполне правильном отношении с базой N и инвариантен относительно операции Φ_N , то он инвариантен и относительно операции Φ_M и всех операций Φ_{M^n} . Тогда на основании теоремы А. А. Ляпунова [см. (8), стр. 400; (9), теорема III] в классе множеств Ξ будет выполняться вторая теорема кратной отделимости по отношению к операции Φ_M . Отсюда будет следовать выполнение в классе Ξ первой теоремы кратной отделимости по отношению к операции Φ_M [см. (10), теорема IV].

Согласно условию теоремы,

$$\Phi_M(\{E_n\}) = 0.$$

Следовательно, существует последовательность множеств $\{H_n\}$ класса $B\Xi$ таких, что

$$H_n \supset E_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

и

$$\Phi_M(\{H_n\}) = 0.$$

Это значит, что ни одна из точек множества $\Phi_N(\{H_n\})$ не обладает свойством U , что и требовалось доказать.

* Пусть N — база некоторой δs -операции. Цепь $\eta \in N$ называется жесткой цепью базы N , если она не содержит в себе никакой другой цепи базы N . База N , состоящая из одних только жестких цепей, называется жесткой базой (см. (6) и (?), стр. 83).

** Класс трансфинитных индексов $\{\beta(x)\} = \lambda$ называется вполне регулярным по отношению к классу множеств Ξ , если:

- 1) для всех $\beta(x) \in \lambda$ $\beta(x) \leq \Omega$ и $[\beta(x) = \Omega] \subset \Xi$;
- 2) для всякого $E \in \Xi$ существует $\beta(x) \in \lambda$ такое, что $E = [\beta(x) = \Omega]$;
- 3) для всяких двух $\beta_1(x)$ и $\beta_2(x) \in \lambda$ множеств $[\beta_1(x) \geq \beta_2(x)] \in \Xi$;
- 4) для всяких двух E_1 и $E_2 \in \Xi$ существуют такие $\beta_1(x)$ и $\beta_2(x) \in \lambda$, что $[\beta_1(x) = \beta_2(x)] = E_1 \cdot E_2$ и $E_1 = [\beta_1(x) = \Omega]$, $E_2 = [\beta_2(x) = \Omega]$.

Теорема 1, кроме вышеуказанных случаев, имеет место также тогда, когда N есть жесткая база A -операции, класс Ξ есть класс CA_2 - или CA_n -множеств, а свойство U состоит в том, чтобы быть точкой N -не-счётности, определяться множеством цепей базы N , имеющим не-компактное замыкание или не являющимся рассеянным множеством индекса $\leq \alpha$, или не являющимся рассеянным семейством множеств, замыкание которых компактно, индекса $\leq \alpha$.

1. A -операцией над системой множеств $\{E_{n_1 \dots n_k}\}$, занумерованных всевозможными кортежами, т. е. конечными совокупностями натуральных чисел, записанными в определенном порядке, называется операция вида:

$$A(\{E_{n_1 \dots n_k}\}) = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots} \prod_{k=1}^{\infty} E_{n_1 \dots n_k},$$

где суммирование распространено на совокупность N всевозможных последовательностей натуральных чисел, т. е. на совокупность всех точек бэровского пространства J .

Если все кортежи (n_1, n_2, \dots, n_k) занумеровать, т. е. установить взаимно однозначное соответствие между множеством всех кортежей натуральных чисел (n_1, n_2, \dots, n_k) , $k = 1, 2, 3, \dots$, и множеством всех натуральных чисел, и обозначить через $\nu(n_1, n_2, \dots, n_k)$ натуральное число, соответствующее (n_1, n_2, \dots, n_k) , а для точки бэровского пространства

$$\xi = (n_1, n_2, \dots, n_k, \dots) \in N$$

положить

$$\varphi(\xi) = (\nu(n_1), \nu(n_1, n_2), \dots, \nu(n_1, n_2, \dots, n_k), \dots),$$

то $\varphi(N) = N'$. Очевидно, что это соответствие между N и N' гомеоморфно. Следовательно, N' есть множество типа G_δ в пространстве J . Тогда множество $E = A(\{E_{n_1 \dots n_k}\})$ можно будет рассматривать как результат δs -операции с базой N' , совершенной над последовательностью множеств $\{E_{\nu(n_1 \dots n_k)}\}$:

$$E = \Phi_{N'}(\{E_{\nu(n_1 \dots n_k)}\}),$$

причем база N' будет жесткой базой A -операции $\Phi_{N'}$.

ЛЕММА 1. Жесткая база A -операции N' есть множество, нигде не плотное в бэровском пространстве.

Доказательство. Цепи жесткой базы A -операции N' будем рассматривать упорядоченными в виде

$$\nu(n_1), \nu(n_1, n_2), \dots, \nu(n_1, \dots, n_k), \dots$$

Пусть бэровский интервал

$$\delta_{n_1 \dots n_i} \ni \eta = (\nu(n_1^*), \nu(n_1^*, n_2^*), \dots, \nu(n_1^*, n_2^*, \dots, n_k^*), \dots).$$

Это означает, что

$$n_1 = \nu(n_1^*), \quad n_2 = \nu(n_1^*, n_2^*), \dots, \quad n_i = \nu(n_1^*, n_2^*, \dots, n_i^*).$$

Так как числа $\nu(m_1, m_2, \dots, m_{i+1})$ при всевозможных значениях m_1, m_2, \dots, m_{i+1} не охватывают всех натуральных чисел, то интервал

$\delta_{n_1 \dots n_i n_{i+1}}$, где $n_{i+1} \neq \nu(m_1 \dots m_{i+1})$ при любых значениях чисел m_1, m_2, \dots, m_{i+1} , не будет содержать в себе ни одной цепи $\eta \in N'$.

Этим лемма доказана.

Множество всех возрастающих последовательностей натуральных чисел \check{J} , как легко видеть, есть множество, замкнутое в бэровском пространстве. Следовательно, если возрастающие последовательности натуральных чисел рассматривать как точки, расстояния между которыми определяются так же, как в бэровском пространстве, то \check{J} будет полным метрическим пространством. Геометрическая интерпретация пространства возрастающих последовательностей дана в работе А. Д. Тайманова [см. (21)].

Расположив все элементы жесткой базы N в порядке возрастания, будем называть ее *жесткой приведенной базой* и обозначать через \check{N} .

Так, если мы установим взаимно однозначное соответствие между множеством всех кортежей натуральных чисел $\{(n_1, n_2, \dots, n_k)\}$, $k = 1, 2, 3, \dots$, и множеством всех натуральных чисел, исходя из двоичного представления натуральных чисел, т. е. если положим

$$\nu(n_1, n_2, \dots, n_k) = 2^{n_1-1} + 2^{n_1+n_2-1} + \dots + 2^{n_1+n_2+\dots+n_k-1},$$

то получим приведенную жесткую базу A -операции \check{N}' , состоящую из цепей

$$\eta = (\nu(n_1), \nu(n_1, n_2), \dots, \nu(n_1, n_2, \dots, n_k), \dots),$$

где

$$\nu(n_1) < \nu(n_1, n_2) < \dots < \nu(n_1, n_2, \dots, n_k) < \dots$$

ЛЕММА 2. Жесткая приведенная база A -операции \check{N}' есть множество, нигде не плотное в пространстве возрастающих последовательностей.

Доказательство. Действительно, пусть интервал $\delta_{n_1 \dots n_i}$ пространства J , $n_1 < n_2 < \dots < n_i$, содержит в себе хотя бы одну цепь базы \check{N}' ; пусть это будет цепь

$$\eta = (\nu(n_1^*), \nu(n_1^*, n_2^*), \dots, \nu(n_1^*, n_2^*, \dots, n_k^*), \dots).$$

Тогда

$$n_1 = \nu(n_1^*), \quad n_2 = \nu(n_1^*, n_2^*), \quad \dots, \quad n_i = \nu(n_1^*, n_2^*, \dots, n_i^*).$$

Интервал

$$\delta_{n_1, n_2, \dots, n_i n_{i+1}} \subset \delta_{n_1, n_2, \dots, n_i},$$

где $n_{i+1} = n_i + (2n + 1)$ (в качестве n может быть взято любое из натуральных чисел), не будет содержать в себе ни одной цепи приведенной жесткой базы \check{N}' .

ЛЕММА 3. Любой класс множеств Ξ находится во вполне правильном отношении с базой N' .

Доказательство. Действительно, класс множеств $\Phi_{N'}(\Xi)$ инвариантен относительно счетного суммирования и пересечения [см. (7), стр. 97]. Для доказательства существования вполне правильного отношения между классом множеств Ξ и базой N' надо показать, что

$$\Phi_{N'^n}(\Xi) \subset \Phi_{N'}(\Xi).$$

Пусть

$$E = \Phi_{N'}(\{E_{\nu(n_1 \dots n_k)}\}),$$

где $E_{\nu(n_1 \dots n_k)} \in \Xi$, и пусть $n = \nu(n_1^*, n_2^*, \dots, n_i^*)$.

Отобразим бэровский интервал $\delta_{n_1^* \dots n_i^*}$ во все бэровское пространство J , ставя во взаимно однозначное соответствие интервалы $\delta_{n_1^* \dots n_i^* n_{i+1}^*}$ интервалам δ_{n_i} , и вообще интервалы $\delta_{n_1^* \dots n_i^* n_{i+1}^* \dots n_{i+r}^*}$ интервалам $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_r}$ ($r = 1, 2, 3, \dots$). Множества

$$E_{\nu(n_1^* \dots n_i^* n_{i+1}^* \dots n_{i+r}^*)}$$

обозначим соответственно через

$$E_{\nu(n_1 \dots n_r)}^* \quad (r = 1, 2, 3, \dots).$$

Тогда имеем:

$$\Phi_{N'}(\{E_{\nu}\}) = \Phi_{N'}(\{E_{\nu}^*\}) \cdot \prod_{k=1}^i E_{\nu(n_1^*, \dots, n_k^*)}.$$

Так как A -операция $\Phi_{N'}$ мощнее операции конечного пересечения [см. (7), стр. 94], то

$$\prod_{k=1}^i E_{\nu(n_1^*, \dots, n_k^*)} \in \Phi_{N'}(\Xi);$$

следовательно,

$$\Phi_{N'}(\Xi) \subset \Phi_{N'}(\Xi).$$

Отсюда

$$\Phi_{N' n_1 \dots n_k}(\Xi) = \Phi_{N' n_1}(\Xi) \cdot \Phi_{N' n_2}(\Xi) \dots \Phi_{N' n_k}(\Xi) \subset \Phi_{N'}(\Xi).$$

Лемма доказана.

Следствие 1. Любой проективный класс множеств Ξ и база N' находятся во вполне правильном отношении.

Пусть N — жесткая база некоторой δs -операции.

Точка x называется точкой N — p -значности последовательности множеств $\{E_n\}$, если существует p и только p различных цепей базы N , в ядра которых входит точка x .

Через Φ_{N^*} обозначается δs -операция, которая отбирает точки, входящие не менее чем в два различных ядра, определяемых цепями базы N .

Через $\Phi_{[N, L]^*}$ обозначается δs -операция, отбирающая точки, входящие не менее чем в $(p+1)$ различных ядер, определяемых цепями базы N , т. е. точки, определяемые δs -операцией Φ_N , но не являющиеся точками N — k -значности, где $k \leq p$.

Точки x называются точками N -конечнозначности последовательности множеств $\{E_n\}$, если они являются точками $(N-p)$ -значности данной последовательности при любом натуральном числе p .

Через $\Phi_{N^{**}}$ обозначается δs -операция, отбирающая точки, входящие не менее чем в счетное число ядер δs -операции Φ_N , т. е. точки, определяемые Φ_N -операцией, но не являющиеся точками N -конечнозначности.

В силу теорем 1, 2 и 4 работы (5), справедливо утверждение:

Следствие 2. Для любого класса множеств Ξ , в частности для любого проективного класса множеств, имеют место соотношения:

$$\Phi_{[N'p]^*}(\Xi) \subset \Phi_{N'}(\Xi) \text{ и } \Phi_{[N'p]^*n}(\Xi) \subset \Phi_{N'}(\Xi),$$

$$\Phi_{N'^{**}}(\Xi) \subset \Phi_{N'}(\Xi) \text{ и } \Phi_{N'^{***}n}(\Xi) \subset \Phi_{N'}(\Xi).$$

В силу того, что класс SA_2 -множеств Ξ инвариантен относительно A -операции, т. е. $\Phi_{N'}(\Xi) = \Xi$, и обладает классом вполне регулярных трансфинитных индексов $\{\beta(x)\}$, [см. ⁽¹¹⁾], класс минимальных индексов], то на основании теоремы 1 и леммы 3 справедливо следующее утверждение:

Следствие 3. Для всякой последовательности SA_2 -множеств $\{E_n\}$ таких, что каждая точка множества $\Phi_{N'}(\{E_n\})$ является точкой не более чем $N' - r$ -значности (N' -конечнозначности) последовательности множеств $\{E_n\}$, существует такая последовательность B_2 -множеств $\{H_n\}$, что $H_n \supset E_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) и каждая точка множества $\Phi_{N'}(\{H_n\})$ является точкой не более чем $N' - r$ -значности (N' -конечнозначности) последовательности множеств $\{H_n\}$.

В работе ⁽¹²⁾ Гёдель рассматривает мощную систему аксиом теории множеств Σ , которая дает возможность осуществить все выводы, проводимые в существующей теории множеств. Гёдель показал, что континуум гипотеза не противоречит системе аксиом теории множеств Σ . П. С. Новиков в работе ⁽¹³⁾ сообщает, что им установлена непротиворечивость в системе аксиом теории множеств Σ следующего утверждения: начиная с некоторого n , законы отделимости для проективных множеств n -го класса совпадают с законами отделимости для проективных множеств второго класса [см. ⁽¹³⁾].

В силу этого в системе аксиом теории множеств Σ будет непротиворечивым следующее утверждение:

Следствие 4. Начиная с некоторого $n > 2$, для всякой последовательности SA_n -множеств $\{E_n\}$ таких, что каждая точка множества $\Phi_{N'}(\{E_n\})$ является точкой не более чем $N' - r$ -значности (N' -конечнозначности) последовательности множеств $\{E_n\}$, существует такая последовательность B_n -множеств $\{H_n\}$, что $H_n \supset E_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) и каждая точка множества $\Phi_{N'}(\{H_n\})$ является точкой не более чем $N' - r$ -значности (N' -конечнозначности) последовательности множеств $\{H_n\}$.

2. Точку x назовем точкой N -несчетнозначности последовательности множеств $\{E_n\}$, если существует несчетное число цепей базы N , в ядра которых входит точка x .

Через N^{***} обозначим множество всех цепей, каждая из которых содержит несчетное число различных цепей базы N .

Через $\Phi_{N^{***}}$ будем обозначать δs -операцию, которая отбирает точки, входящие в несчетное число ядер δs -операции Φ_N , т. е. точки, получаемые Φ_N -операцией и являющиеся точками несчетнозначности.

ТЕОРЕМА II. Если Ξ есть класс замкнутых множеств или A -множеств бэровского пространства и δs -операция $\Phi_{N'}$ есть A -операция, то

$$\Phi_{N^{***}}(\Xi) \subset \Phi_{N'}(\Xi) \text{ и } \Phi_{N^{***}n}(\Xi) \subset \Phi_{N'}(\Xi).$$

Доказательство. Пусть Ξ есть класс замкнутых множеств или A -множеств бэровского пространства J_x . Множество

$$E = \Phi_{N'}(\{E_v\}),$$

где $E_v \in \Xi$, будет A -множеством. Оно представимо в виде [см. (1), теорема V]:

$$E = \Phi_{N'}(\{E_v\}) = Pr_x(S(\{E_v\}) \cdot (J_x \times N')),$$

где

$$S(\{E_v\}) = \prod_{1 \leq v_1, v_2, \dots, v_k}^{\infty} E_{v_k} \times \delta_{v_1 v_2 \dots v_k}.$$

Так как $E_v \in \Xi$, то $S(\{E_v\})$ будет соответственно замкнутым множеством или A -множеством в пространстве $J_x \times J_y$. Следовательно, множество

$$S(\{E_v\}) \cdot (J_x \times N') = \mathcal{E}$$

в общем случае будет плоским A -множеством.

Множество точек N' -несчетнозначности последовательности множеств $\{E_v\}$ совпадает с множеством всех тех точек x множества E , для которых $P_x \cdot \mathcal{E}$ состоит из несчетного множества точек, где $P_x = x \times J_y$. Но множество таких точек x , согласно теореме Мазуркевича и Серпинского [см. (14), § 3], есть A -множество. Это значит, что

$$\Phi_{N'^{***}}(\Xi) \subset \Phi_{N'}(\Xi). \quad (1)$$

Так как класс замкнутых множеств или A -множеств находится во вполне правильном отношении с базой N' , то

$$\Phi_{N'^n} \subset \Phi_{N'}(\Xi). \quad (2)$$

Множество

$$\Phi_{N'^{***n}}(\{E_v\}) = \Phi_{N'^{***}}(\{E_v\}) \cdot \Phi_{N'^n}(\{E_v\}).$$

Отсюда, в силу соотношений (1) и (2),

$$\Phi_{N'^{***n}}(\Xi) \subset \Phi_{N'}(\Xi),$$

что и требовалось доказать.

В силу того, что класс A -множеств инвариантен относительно A -операции, т. е. $\Phi_{N'}(\Xi) = \Xi$, и обладает классом вполне регулярных трансфинитных индексов $\{\beta(x)\}$ [см. (15), § 6, 12, и (16)], то, на основании теорем I и II, справедливо следующее утверждение:

Следствие 5. Для всякой последовательности A -множеств $\{E_n\}$ таких, что каждая точка множества $\Phi_{N'}(\{E_n\})$ является точкой не более чем N' -счетнозначности последовательности множеств $\{E_n\}$, существует такая последовательность B -множеств $\{H_n\}$, что $H_n \supset E_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) и каждая точка множества $\Phi_{N'}(\{H_n\})$ является точкой не более чем N' -счетнозначности последовательности множеств $\{H_n\}$.

Теорема II является частным случаем следующей более общей теоремы.

ТЕОРЕМА III. Если Ξ есть произвольный класс множеств, то

$$\Phi_{N'^{***}}(\Xi) \subset \Phi_{N'}(\Xi) \text{ и } \Phi_{N'^{***n}}(\Xi) \subset \Phi_{N'}(\Xi).$$

Доказательство. Пусть $\Xi \subset J$ есть произвольный класс множеств и пусть

$$E_{v(n_1 \dots n_k)} \in \Xi.$$

Рассмотрим множество

$$E = \Phi_{N'}(\{E_{\vee(n_1 \dots n_k)}\}) = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_k} \prod_{k=1}^{\infty} E_{\vee(n_1 \dots n_k)} = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_k} \prod_{k=1}^{\infty} E'_{n_1 \dots n_k},$$

где

$$E'_{n_1 \dots n_k} = \prod_{i=1}^k E_{\vee(n_1 \dots n_i)}.$$

В силу того, что A -операция $\Phi_{N'}$ мощнее операции конечного пересечения, $E'_{n_1 \dots n_k} \in \Phi_{N'}(\Xi)$, а в силу определения множеств $E'_{n_1 \dots n_k}$, имеет место соотношение:

$$E'_{n_1 \dots n_k} \supset E'_{n_1 \dots n_k n_{k+1}}. \quad (3)$$

Используя имеющуюся нумерацию кортежей (n_1, \dots, n_k) , получим систему множеств $\{E'_{\vee(n_1 \dots n_k)}\}$.

Перенумеруем их теперь следующим образом:

$$1) E_n^* = E'_{n(n_1 \dots n_k)}.$$

2) Пусть s — данное натуральное число. Допустим, что мы уже определили все множества $E_{n_1 \dots n_k}^*$ для $k < 2s$ так, что

$$E_{n_1 \dots n_s}^* = E'_{\vee(p_1 \dots p_r)}$$

(числа r и p_1, p_2, \dots, p_r зависят от системы n_1, \dots, n_s). Определим

$$E_{n_1 \dots n_{2s-1} n_{2s}}^*$$

как n_{2s} -й член последовательности $\{E_{\vee}^*\}$ вида

$$E'_{\vee(p_1, \dots, p_r, m_1, \dots, m_k)},$$

а

$$E_{n_1^1 \dots n_{2s}^1 n_{2s+1}}^*$$

— как n_{2s+1} -й член последовательности $\{E_{\vee}^*\}$ вида

$$E'_{\vee(p_1 \dots p_r l_1 \dots l_j)}$$

такой, что

$$\delta_{p_1 \dots p_r m_1 \dots m_k} \cdot \delta_{p_1 \dots p_r l_1 \dots l_j} = 0. \quad (4)$$

Пусть

$$Q = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots} \prod_{k=1}^{\infty} E_{n_1 \dots n_k}^* = \Phi_{N'}(\{E'_{\vee(n_1 \dots n_k)}\}).$$

Докажем, что

$$Q = \Phi_{N'^{***}}(\{E_{\vee}\}).$$

Пусть

$$x \in Q = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots} \prod_{k=1}^{\infty} E_{n_1 \dots n_k}^*$$

Это означает, что существует последовательность индексов $q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$ такая, что

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} E_{q_1 \dots q_n}^* \quad (5)$$

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ — последовательность, образованная из чисел 0 и 1. Положим

$$k_h = 2^h + 2^{h-1}\alpha_1 + 2^{h-2}\alpha_2 + \dots + 2\alpha_{h-1} + \alpha_h, \quad h = 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

Из (6) следует, что

$$k_{h+1} = 2k_h + \alpha_{h+1}, \quad h = 1, 2, 3, \dots, \quad (7)$$

а из определения множеств $E_{n_1 \dots n_{2s}}^*$ и $E_{n_1 \dots n_{2s}n_{2s+1}}^*$ следует, что

$$E_{q_1 \dots q_{k_h}}^* \supset E_{q_1 \dots q_{k_{h+1}}}^*, \quad h = 1, 2, 3, \dots$$

Из соотношения (5) выводим, что

$$x \in \bigcap_{h=1}^{\infty} E_{q_1 \dots q_{k_h}}^* \quad (8)$$

Но множества $E_{q_1 \dots q_{k_h}}^*$ совпадают с некоторыми множествами $E'_{v(p_1 \dots p_n)}$, удовлетворяющими соотношению (3). Следовательно, существует такая последовательность натуральных чисел $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$, что последовательность множеств

$$\{E_{q_1 \dots q_{k_h}}^*\} \quad (h = 1, 2, 3, \dots)$$

извлечена из последовательности множеств

$$\{E'_{v(n_1 \dots n_k)}\} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

В силу соотношений (3),

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{h=1}^{\infty} E_{q_1 \dots q_{k_h}}^* &= \bigcap_{n=1}^{\infty} E'_{v(p_1 \dots p_n)} = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_{v(p_1 \dots p_n)} \subset \\ &\subset \sum_{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots} \bigcap_{k=1}^{\infty} E_{v(n_1 \dots n_k)} = \Phi_{N'}(\{E_{v(n_1 \dots n_k)}\}), \end{aligned}$$

причем x в данном случае входит в ядро цепи

$$\eta = (v(p_1), v(p_1, p_2), \dots, v(p_1, \dots, p_k), \dots) \in N'.$$

Пусть $\{\alpha'_k\}$ есть последовательность чисел, составленная из 0 и 1 и отличная от последовательности $\{\alpha_k\}$. Обозначим через η' цепь базы N' , ядром которой является точка x , определяемую последовательностью $\{\alpha'_k\}$. Покажем, что $\eta \neq \eta'$. Действительно, пусть $\alpha_k = \alpha'_k$ для $k < m$, $\alpha_m \neq \alpha'_m$, например $\alpha_m = 0$, $\alpha'_m = 1$. Положив

$$k'_h = 2^h + 2^{h-1}\alpha'_1 + 2^{h-2}\alpha'_2 + \dots + 2\alpha'_{h-1} + \alpha'_h,$$

будем иметь, согласно (6) и (7):

$$k_m = 2k_{m-1} + \alpha_m, \quad k'_m = 2k_{m-1} + \alpha'_m.$$

Следовательно,

$$k_m = 2k_{m-1} = 2s, \quad k'_m = 2k_{m-1} + 1 = 2s + 1$$

и, в силу (8),

$$x \in E_{q_1 \dots q_{k_m}}^* = E_{q_1 \dots q_{2s}}^*,$$

$$x \in E_{q_1 \dots q_{k'} m}^* = E_{q_1 \dots q_{2s} q_{2s+1}}^*.$$

Согласно построению множеств $E_{n_1 \dots n_{2s}}^*$ и $E_{n_1 \dots n_{2s} n_{2s+1}}^*$, имеем:

$$E_{q_1 \dots q_{2s}}^* = E'_{\vee(p_1 \dots p_r p_{r+1} \dots p_k)},$$

$$E_{q_1 \dots q_{2s} q_{2s+1}}^* = E'_{\vee(p_1 \dots p_r l_1 \dots l_j)},$$

причем

$$\delta_{p_1 \dots p_r p_{r+1} \dots p_{r+k}} \cdot \delta_{p_1 \dots p_r l_1 \dots l_j} = 0.$$

Но

$$\vee(p_1 \dots p_r p_{r+1} \dots p_{r+k}) \in \eta \in N',$$

$$\vee(p_1 \dots p_r l_1 \dots l_j) \in \eta' \in N'.$$

Это показывает, что цепь базы N' , определяемая последовательностью $\{\alpha_k\}$, отлична от цепи базы N' , определяемой последовательностью $\{\alpha_k\}$, т. е. $\eta \neq \eta'$.

Таким образом, всякой последовательности $\{\alpha_k\}$, составленной из чисел 0 и 1, соответствует цепь $\eta \in N'$, в ядро которой входит точка x , причем различным последовательностям $\{\alpha_k\}$ соответствуют различные цепи $\eta \in N'$, определяющие точку x . Так как различных последовательностей $\{\alpha_k\}$, составленных из чисел 0 и 1, существует несчетное множество, то отсюда следует, что точка x определяется несчетным числом цепей базы N' , т. е.

$$x \in \Phi_{N'^{***}}(\{E_\vee\}).$$

Следовательно,

$$Q \subset \Phi_{N'^{***}}(\{E_\vee\}). \quad (9)$$

Пусть теперь $x \in \Phi_{N'^{***}}(\{E_\vee\})$. Это означает, что существует несчетное число цепей базы N' , в ядра которых входит x .

Определим последовательность натуральных чисел $m_1, m_2, \dots, m_s, \dots$ следующим образом:

1) m_1 есть первое натуральное число такое, что

$$x \in E_{m_1}^* = E'_{\vee(p_1 \dots p_r)},$$

причем $\delta_{p_1 \dots p_r}$ содержит в себе несчетное число цепей базы N' , в ядра которых входит x .

2) Пусть s — данное натуральное число. Допустим, что мы уже определили числа $m_1, m_2, \dots, m_{2s-1}$ так, что

$$E_{m_1 \dots m_s}^* = E'_{\vee(p_1 \dots p_r)} \ni x,$$

причем $\delta_{p_1 \dots p_r}$ содержит в себе несчетное число цепей базы N' , в ядра которых входит точка x . Множества

$$E_{m_1 \dots m_{2s-1} n}^*$$

суть множества вида

$$E'_{\vee(p_1 \dots p_r q_1^{(n)} \dots q_s^{(n)})}$$

Определим m_{2s} как наименьшее натуральное число n такое, что

$$E_{m_1 \dots m_{2s-1} m_{2s}}^* = E'_{v(p_1 \dots p_r q_1^{(n)} \dots q_{s_n}^{(n)})} \ni x,$$

причем

$$\delta_{p_1 \dots p_r q_1^{(n)} \dots q_{s_n}^{(n)}}$$

содержит в себе несчетное число цепей базы N' , в ядра которых входит точка x , и существует бесконечно много интервалов $\delta_{p_1 \dots p_r l_1 \dots l_j}$ таких, что

$$\delta_{p_1 \dots p_r q_1^{(n)} \dots q_{s_n}^{(n)}} \cdot \delta_{p_1 \dots p_r l_1 \dots l_j} = 0 \quad (10)$$

и каждый из интервалов $\delta_{p_1 \dots p_r l_1 \dots l_j}$ содержит в себе несчетное множество цепей базы N' , определяющих точку x . Определим m_{2s+1} как наименьшее натуральное число n такое, что

$$E_{m_1 \dots m_{2s} m_{2s+1}}^* = E'_{v(p_1 \dots p_r l_1 \dots l_j)} \ni x,$$

причем $\delta_{p_1 \dots p_r l_1 \dots l_j}$ содержит в себе несчетное множество цепей базы N , определяющих точку x , и удовлетворяет соотношению (10). Из того, что

$$x \in \Phi_{N' \dots}(\{E_v\}),$$

и из определения множеств $E_{n_1 \dots n_k}^*$ следует, что бесконечная последовательность чисел $m_1, m_2, \dots, m_s, \dots$ существует. Таким образом,

$$x \in \bigcap_{s=1}^{\infty} E_{m_1 \dots m_s}^* \subset \sum_{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots} \prod_{k=1}^{\infty} E_{n_1 \dots n_k}^* = \Phi_{N'}(\{E_{v(n_1 \dots n_k)}^*\}) = Q,$$

т. е.

$$\Phi_{N' \dots}(\{E_v\}) \subset Q. \quad (11)$$

Из (9) и (11) следует, что

$$\Phi_{N' \dots}(\{E_v\}) = Q = \Phi_{N'}(\{E_{v(n_1 \dots n_k)}^*\}),$$

где $E_{n_1 \dots n_k}^* \in \Phi_{N'}(\Xi)$. Но $\Phi_{N'}(\Phi_{N'}(\Xi)) = \Phi_{N'}(\Xi)$ [см. (17), теорема III], следовательно,

$$\Phi_{N' \dots}(\Xi) \subset \Phi_{N'}(\Xi). \quad (12)$$

Множество

$$\Phi_{N' \dots n}(\{E_v\}) = \Phi_{N' \dots}(\{E_v\}) \cdot \Phi_{N^n}(\{E_v\}).$$

Отсюда, в силу леммы 3 и соотношения (12), следует:

$$\Phi_{N' \dots n}(\Xi) \subset \Phi_{N'}(\Xi),$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. Если Ξ есть класс B -множеств или CA -множеств, то

$$\Phi_{N' \dots}(\Xi) \subset \Phi_{N'}(\Xi) \text{ и } \Phi_{N' \dots n}(\Xi) \subset \Phi_{N'}(\Xi).$$

Следствие 2. Если Ξ есть класс проективных множеств не ниже n -того или класс A -множеств, то

$$\Phi_{N' \dots}(\Xi) \subset \Xi \text{ и } \Phi_{N' \dots n}(\Xi) \subset \Xi.$$

Действительно, если Ξ есть проективный класс множеств не ниже n -того или класс A -множеств, то $\Phi_{N'}(\Xi) = \Xi$ [см. (17), следствие 2 теоремы II, теорема III]. Так как класс CA_2 -множеств обладает классом

вполне регулярных трансфинитных индексов, то, в силу теорем I и III, справедливо следующее утверждение:

Следствие 3. Для всякой последовательности SA_2 -множеств $\{E_n\}$ таких, что каждая точка множества $\Phi_{N'}(\{E_n\})$ является точкой не более чем N' -счетнозначности последовательности множеств $\{E_n\}$, существует такая последовательность B_2 -множеств $\{H_n\}$, что $H_n \supset E_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) и каждая точка множества $\Phi_{N'}(\{H_n\})$ является точкой не более чем N' -счетнозначности последовательности множеств $\{H_n\}$.

В силу того, что в системе аксиом теории множеств \sum П. С. Новиковым установлена непротиворечивость утверждения, что, начиная с некоторого n , законы отделимости для проективных множеств n -го класса совпадают с законами отделимости для проективных множеств Φ второго класса [см. (13)], в этой системе аксиом будет непротиворечивым утверждение:

Следствие 4. Начиная с некоторого $n > 2$, для всякой последовательности SA_n -множеств $\{E_n\}$ таких, что каждая точка множества $\Phi_{N'}(\{E_n\})$ является точкой не более чем N' -счетнозначности последовательности множеств $\{E_n\}$, непротиворечиво существование такой последовательности B_n -множеств $\{H_n\}$, что $H_n \supset E_n$ ($n = 1, 2, 3$) и каждая точка множества $\Phi_{N'}(\{H_n\})$ является точкой не более чем N' -счетнозначности последовательности множеств $\{H_n\}$.

3. Рассеянным (clairsemé) множеством называется всякое множество точек, не имеющее подмножества, плотного в себе. Такое множество счетно [см. (18)].

Пусть $E = E^{[\alpha]}$ есть линейное множество. Если $\alpha = \alpha + 1$, то через $E^{[\alpha]}$ обозначается множество всех неизолированных точек множества $E^{[\alpha-1]}$; если α — трансфинитное число второго рода, то

$$E^{[\alpha]} = \prod_{\alpha' < \alpha} E^{[\alpha']}.$$

Если множество E — рассеянное, то найдется такое число β , что

$$E^{[\beta]} = E^{[\beta+1]} = \dots = \emptyset.$$

Наименьшее число β , обладающее этим свойством, называется *индексом* рассеянного множества E .

Через N_x обозначим множество всех цепей, каждая из которых содержит множество цепей базы N , не являющееся рассеянным множеством индекса $\leq \alpha$.

Через Φ_{N_x} будем обозначать δs -операцию, которая отбирает точки, получаемые δs -операцией Φ_N , каждая из которых определяется множеством цепей базы N , не являющимся рассеянным множеством индекса $\leq \alpha$.

ТЕОРЕМА IV. Если класс множеств Ξ и база N' находятся во вполне правильном отношении, то

$$\Phi_{N'_\alpha}(\Xi) \subset \Phi_{N'}(\Xi) \text{ и } \Phi_{N'_\alpha}(\Xi) \subset \Phi_{N'}(\Xi).$$

Доказательство. Пусть

$$E = \Phi_{N'}(\{E_{v(n_1 \dots n_k)}\}),$$

где

$$E_{v(n_1 \dots n_k)} \in \Xi.$$

Применим метод трансфинитной индукции. Достаточно показать, что теорема верна для

- 1) $\alpha = 1$,
- 2) $\alpha = \alpha^* + n$, $n \geq 1$, где α^* — трансфинитное число второго рода,
- 3) α — трансфинитное число второго рода.

Пусть $\alpha = 1$. В силу леммы 3,

$$\Phi_{N' \setminus v_1(n_1^* \dots n_i^*)}(\{E_{v(n_1 \dots n_k)}\}) = \Phi_{N'}(\{E_v^*\}) \cdot \prod_{l=1}^i E_{v(n_1^* \dots n_l^*)} \subset \Phi_{N'}(\Xi),$$

где $\{E_v^*\}$ есть множества

$$\{E_{v(n_1^* \dots n_i^* n_{i+1}^* \dots n_{i+k}^*)}\},$$

занумерованные в соответствии с отображением интервала Бэра $\delta_{n_1^* \dots n_i^*}$ в пространство Бэра J . Тогда

$$\Phi_{[N' \setminus v_1(n_1^* \dots n_i^*)]^*}(\{E_v\}) = \Phi_{N'^*}(\{E_v^*\}) \prod_{l=1}^i E_{v(n_1^* \dots n_l^*)}.$$

Отсюда, в силу того, что класс множеств Ξ и база N' находятся во вполне правильном отношении, следует, что

$$\Phi_{[N' \setminus v_1(n_1^* \dots n_i^*)]^*}(\{E_v\}) \subset \Phi_{N'}(\Xi). \quad (13)$$

Легко видеть, что

$$\Phi_{[N' \setminus v_1(n_1^* \dots n_i^*)]^*}(\{E_v\}) \supset \Phi_{[N' \setminus v_1(n_1^* \dots n_{i+1}^*)]^*}(\{E_v\}).$$

Пусть

$$L_i = \sum_{n_1^*, n_2^*, \dots, n_i^*} \Phi_{[N' \setminus v_1(n_1^* \dots n_i^*)]^*}(\{E_v\}).$$

Ясно, что $L_1 \supset L_2 \supset \dots \supset L_i \supset \dots$. Но тогда

$$\begin{aligned} \Phi_{N'_1}(\{E_v\}) &= \prod_{i=1}^{\infty} L_i = \prod_{i=1}^{\infty} \sum_{n_1^*, n_2^*, \dots, n_i^*} \Phi_{[N' \setminus v_1(n_1^* \dots n_i^*)]^*}(\{E_v\}) = \\ &= \sum_{n_1^*, n_2^*, \dots, n_i^*} \prod_{i=1}^{\infty} \Phi_{[N' \setminus v_1(n_1^*, \dots, n_i^*)]^*}(\{E_v\}) = \Phi_{N'}(\{\Phi_{v_1}(\Phi_{v_2}(\dots \Phi_{v_i}(\{E_v\})\dots)\}) = \\ &= \Phi_{N'}(\{\mathcal{G}_{v_1(n_1^* \dots n_i^*)}^1\}), \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{G}_{v_1(n_1^* \dots n_i^*)}^1 = \Phi_{[N' \setminus v_1(n_1^* \dots n_i^*)]^*}(\{E_v\}).$$

В силу соотношения (13),

$$\mathcal{G}_{v_1(n_1^* \dots n_i^*)}^1 \in \Phi_{N'}(\Xi).$$

Следовательно,

$$\Phi_{N_1'}(\Xi) \subset \Phi_{N'}(\Xi). \quad (14)$$

Множество

$$\Phi_{N_1'}(\{E_v\}) = \Phi_{N_1'}(\{E_v\}) \cdot \Phi_{N_1'}(\{E_v\}).$$

Значит, в силу соотношения (14) и леммы 3,

$$\Phi_{N_1'}(\Xi) \subset \Phi_{N'}(\Xi). \quad (15)$$

Таким образом, теорема верна для $\alpha = 1$.

Пусть $\alpha = \alpha^* + n$, $n \geq 1$, где α^* — трансфинитное число второго рода, и для всех $\alpha' < \alpha$ теорема верна, причем

$$\Phi_{N_{\alpha'}} = \Phi_{N'}(\{\mathcal{O}_v^{\alpha'}\}),$$

где

$$\mathcal{O}_v^{\alpha'} \subset \Phi_{N'}(\Xi).$$

Тогда

$$\Phi_{N_{\alpha}}(\{E_v\}) = \Phi_{N_{\alpha'}}(\{\Phi_{N'}(\{\mathcal{O}_v^{\alpha-1}\})\}).$$

Класс множеств $\Phi_{N'}(\Xi)$, в силу леммы 3, находится во вполне правильном отношении с базой N' . Отсюда следует, что

$$\Phi_{N'}(\{\mathcal{O}_v^{\alpha-1}\}) \subset \Phi_{N'}(\Xi),$$

и, значит,

$$\Phi_{N_{\alpha}}(\Xi) \subset \Phi_{N'}(\Xi).$$

Множество

$$\Phi_{N_{\alpha}}(\{E_v\}) = \Phi_{N_{\alpha}}(\{E_v\}) \cdot \Phi_{N_{\alpha}}(\{E_v\}),$$

поэтому

$$\Phi_{N_{\alpha}}(\Xi) \subset \Phi_{N'}(\Xi).$$

Следовательно, теорема верна для $\alpha = \alpha^* + n$, $n \geq 1$.

Пусть α — трансфинитное число второго рода и для всех $\alpha' < \alpha$ теорема верна, причем

$$\Phi_{N_{\alpha'}}(\{E_v\}) = \Phi_{N'}(\{\mathcal{O}_v^{\alpha'}\}),$$

где

$$\mathcal{O}_v^{\alpha'} \in \Phi_{N'}(\Xi).$$

Пусть $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \dots \rightarrow \alpha$. Тогда

$$\Phi_{N_{\alpha_n}}(\{E_v\}) = \Phi_{N'}(\{\mathcal{O}_v^{\alpha_n}\}),$$

где

$$\mathcal{O}_v^{\alpha_n} \in \Phi_{N'}(\Xi), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Множество

$$\Phi_{N_\alpha}'(\{E_v\}) = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots} \prod_{k=1}^{\infty} \prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_{v(n_1, \dots, n_k)}^{\alpha n} = \Phi_{N'}(\left\{ \prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_{v(n_1, \dots, n_k)}^{\alpha n} \right\}).$$

Так как класс множеств $\Phi_{N'}(\Xi)$ инвариантен относительно счетных пересечений, то

$$\prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_{v(n_1, \dots, n_k)}^{\alpha n} \in \Phi_{N'}(\Xi).$$

Отсюда следует, что

$$\Phi_{N_\alpha}'(\Xi) \subset \Phi_{N'}(\Xi).$$

Множество

$$\Phi_{N_\alpha}'(\{E_v\}) = \Phi_{N_\alpha}'(\{E_v\}) \cdot \Phi_{N'}(\{E_v\}),$$

поэтому

$$\Phi_{N_\alpha}'(\Xi) \subset \Phi_{N'}(\Xi).$$

Таким образом, теорема верна для трансфинитного числа α второго рода.

Итак, теорема верна для всех трансфинитных чисел α , что и требовалось доказать.

Следствие 1. Если Ξ есть проективный класс множеств не ниже второго класса или класс A -множеств, то

$$\Phi_{N_\alpha}'(\Xi) \subset \Xi \text{ и } \Phi_{N_\alpha}'(\Xi) \subset \Xi.$$

На основании теоремы I и следствия 1 теоремы IV, получаем следующие утверждения:

Следствие 2. Для всякой последовательности A -множеств $\{E_n\}$ таких, что каждая точка множества $\Phi_{N'}(\{E_n\})$ определяется рассеянным множеством цепей базы N' индекса $\leq \alpha$, существует такая последовательность B -множеств $\{H_n\}$, что $H_n \supset E_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) и каждая точка множества $\Phi_{N'}(\{H_n\})$ определяется рассеянным множеством цепей базы N' индекса $\leq \alpha$.

Следствие 3. Для всякой последовательности SA_2 -множеств $\{E_n\}$ таких, что каждая точка множества $\Phi_{N'}(\{E_n\})$ определяется рассеянным множеством цепей базы N' индекса $\leq \alpha$, существует такая последовательность B_2 -множеств $\{H_n\}$, что $H_n \supset E_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) и каждая точка множества $\Phi_{N'}(\{H_n\})$ определяется рассеянным множеством цепей базы N' индекса $\leq \alpha$.

В силу того, что в системе аксиом теории множеств Σ установлена непротиворечивость утверждения, что, начиная с некоторого n , законы отделимости для проективных множеств n -го класса совпадают с законами отделимости для проективных множеств второго класса, то непротиворечиво следующее утверждение:

Следствие 4. Начиная с некоторого $n > 2$, для всякой последовательности SA_n -множеств $\{E_n\}$ таких, что каждая точка множества $\Phi_{N'}(\{E_n\})$ определяется рассеянным множеством цепей базы N' индекса $\leq \alpha$, существует такая последовательность B_n -множеств $\{H_n\}$, что

$H_n \supset E_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) и каждая точка множества $\Phi_{N'}(\{H_n\})$ определяется рассеянным множеством цепей базы N' индекса $\leq \alpha$.

4. Через N_* обозначим множество всех цепей, каждая из которых состоит из множества цепей базы N , имеющего некомпактное замыкание.

Через Φ_{N_*} обозначим δs -операцию, которая отбирает точки, получаемые в результате δs -операции Φ_N , каждая из которых определяется множеством цепей базы N , имеющим некомпактное замыкание.

ТЕОРЕМА V. Если класс множеств Ξ и база N' находятся во вполне правильном отношении, то

$$\Phi_{N'_*}(\Xi) \subset \Phi_{N'}(\Xi) \text{ и } \Phi_{N'^n}(\Xi) \subset \Phi_{N'}(\Xi).$$

Доказательство. Множество, компактное в бэровском пространстве J , не может быть покрыто счетной системой непересекающихся интервалов Бэра так, чтобы каждый из интервалов включал в себя точки данного компактного множества.

Пусть

$$E = \Phi_{N'}(\{E_{v(n_1, \dots, n_k)}\}), \quad E_{v(n_1, \dots, n_k)} \in \Xi.$$

Согласно лемме 3,

$$\Phi_{N'}^{v^*(n_1, \dots, n_k)}(\{E_v\}) \subset \Phi_{N'}(\Xi).$$

Множество

$$\begin{aligned} A_{n_1, \dots, n_k} &= \overline{\lim_{n_{k+1}}} \Phi_{N'}^{v^*(n_1, \dots, n_k, n_{k+1})}(\{E_v\}) = \\ &= \prod_{r=1}^{\infty} \prod_{n_{k+1}=r}^{\infty} \Phi_{N'}^{v^*(n_1, \dots, n_k, n_{k+1})}(\{E_v\}) \subset \Phi_{N'}(\Xi). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$A_k = \sum_{n_1, \dots, n_k} A_{n_1, \dots, n_k} = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1}} \overline{\lim} \Phi_{N'}^{v^*(n_1, \dots, n_k, n_{k+1})}(\{E_v\}) \subset \Phi_{N'}(\Xi).$$

Множество

$$\Phi_{N'_*}(\{E_v\}) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k = \sum_{k; n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1}} \overline{\lim} \Phi_{N'}^{v^*(n_1, \dots, n_k, n_{k+1})}(\{E_v\}).$$

Так как класс множеств Ξ и база N' находятся во вполне правильном отношении, то отсюда следует, что

$$\Phi_{N'_*}(\Xi) \subset \Phi_{N'}(\Xi). \quad (16)$$

Множество

$$\Phi_{N'^n}(\{E_v\}) = \Phi_{N'_*}(\{E_v\}) \cdot \Phi_{N'^n}(\{E_v\}).$$

Отсюда, в силу (15) и леммы 3,

$$\Phi_{N'^n}(\Xi) \subset \Phi_{N'}(\Xi),$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. Если Ξ есть класс B -множеств или класс CA -множеств, то

$$\Phi_{N_*'}(\Xi) \subset \Phi_{N'}(\Xi) \quad \text{и} \quad \Phi_{N_*'^n}(\Xi) \subset \Phi_{N'}(\Xi).$$

Следствие 2. Если Ξ — проективный класс множеств не ниже второго или класс A -множеств, то

$$\Phi_{N_*'}(\Xi) \subset \Xi \quad \text{и} \quad \Phi_{N_*'^n}(\Xi) \subset \Xi.$$

В силу теоремы I и следствия 2 теоремы V, получаем следующие утверждения:

Следствие 3. Для всякой последовательности A -множеств $\{E_n\}$ таких, что каждая точка множества $\Phi_{N'}(\{E_n\})$ определяется компактным множеством цепей базы N' (множеством цепей, имеющим компактное замыкание), существует такая последовательность B -множеств $\{H_n\}$, что $H_n \supset E_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) и каждая точка множества $\Phi_{N'}(\{H_n\})$ определяется множеством цепей базы N' , имеющим компактное замыкание.

Следствие 4. Для всякой последовательности CA_2 -множеств $\{E_n\}$ таких, что каждая точка множества $\Phi_{N'}(\{E_n\})$ определяется компактным множеством цепей базы N' (множеством цепей, имеющим компактное замыкание), существует такая последовательность B_2 -множеств $\{H_n\}$, что $H_n \supset E_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) и каждая точка множества $\Phi_{N'}(\{H_n\})$ определяется множеством цепей базы N' , имеющим компактное замыкание.

В силу того, что в системе аксиом теории множеств Σ установлена непротиворечивость утверждения, что, начиная с некоторого n , законы отделимости для проективных множеств n -го класса совпадают с законами отделимости для проективных множеств второго класса, непротиворечиво следующее утверждение:

Следствие 5. Начиная с некоторого $n > 2$, для всякой последовательности CA_n -множеств $\{E_n\}$ таких, что каждая точка множества $\Phi_{N'}(\{E_n\})$ определяется компактным множеством цепей базы N' (множеством цепей, имеющим компактное замыкание), существует такая последовательность B_n -множеств $\{H_n\}$, что $H_n \supset E_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) и каждая точка множества $\Phi_{N'}(\{H_n\})$ определяется множеством цепей базы N' , имеющим компактное замыкание.

5. Множество E называется множеством абсолютно первого класса, если на всяком компактном множестве, пересекающемся с ним, у него найдется компактная порция (или точка локальной компактности) [см. (19)]. Такое множество можно представить как сумму рассеянного * семейства компактных множеств.

Пусть $E = E^{\{0\}}$ есть линейное множество абсолютно первого класса.

Через $E^{\{\alpha+1\}}$ обозначается множество, которое получается из $E^{\{\alpha\}}$ путем выбрасывания всех его компактных порций; если α — трансфинит-

* Семейство множеств $\{E\}$ называется *рассеянным*, если во всяком его подсемействе найдется множество E , которое отделимо от суммы всех остальных или множеством класса нуля, или просто порцией.

ное число второго рода, то, по определению,

$$E^{\{\alpha\}} = \prod_{\alpha' < \alpha} E^{\{\alpha'\}}.$$

Наименьшее трансфинитное число β такое, что $E^{\{\beta\}} = 0$, называется *подклассом* множества E .

Известно существование множеств абсолютно первого класса сколь угодно высоких подклассов [см. ⁽²⁰⁾, стр. 422].

Будем рассматривать линейные множества E , являющиеся суммами рассеянного семейства множеств, замыкание которых компактно.

Пусть $E = E^{(0)}$. Если α — трансфинитное число первого рода, то через $E^{(\alpha)}$ обозначается множество, которое получается из множества $E^{(\alpha-1)}$ путем удаления всех его изолированных порций, замыкание которых компактно; если α — трансфинитное число второго рода, то, по определению,

$$E^{(\alpha)} = \prod_{\alpha' < \alpha} E^{(\alpha')}.$$

Наименьшее число β такое, что $E^{(\beta)} = 0$, называется *индексом* множества E .

Замечание. Если E есть множество абсолютно первого класса подкласса α , то индекс множества E не превосходит α .

Через $N_*^{(x)}$ будем обозначать множество всех цепей, каждая из которых состоит из множества цепей базы N , не являющегося рассеянным семейством множеств, замыкание которых компактно, индекса $\leq \alpha$.

Через $\Phi_{N_*^{(x)}}$ будем обозначать δs -операцию, которая отбирает точки, получаемые δs -операцией Φ_N , каждая из которых определяется множеством цепей базы N , не являющимся рассеянным семейством множеств, замыкание которых компактно, индекса $\leq \alpha$.

ТЕОРЕМА VI. Если класс множеств Ξ и база N' находятся во вполне правильном отношении, то

$$\Phi_{N_*^{(\alpha)}}(\Xi) \subset \Phi_{N'}(\Xi) \text{ и } \Phi_{[N_*^{(\alpha)}]^n}(\Xi) \subset \Phi_{N'}(\Xi).$$

Доказательство. Пусть

$$E = \Phi_{N'}(\{E_{v(n_1 \dots n_k)}\}),$$

где

$$E_{v(n_1 \dots n_k)} \subset \Xi.$$

Применим метод трансфинитной индукции. Достаточно показать, что теорема верна для:

1) $\alpha = 1$,

2) $\alpha = \alpha^* + n$, $n \geq 1$, где α^* — трансфинитное число второго рода,

3) α — трансфинитное число второго рода.

Пусть $\alpha = 1$. В силу теоремы V, множество всех точек x δs -операции $\Phi_{N'}(\{E_v\})$, определяемых множеством цепей базы N' , имеющим некомпактное замыкание, определяется δs -операцией

$$\Phi_{N_*}(\{E_v\}) = \sum_{k; n_1, \dots, n_k} \overline{\lim} \Phi_{N^{(n_1 \dots n_k n_{k+1})}}(\{E_v\}) \subset \Phi_{N'}(\Xi).$$

В силу леммы 3,

$$\Phi_{N'v_1(n_1^* \dots n_k^*)}(\{E_v\}) \subset \Phi_{N'}(\Xi).$$

Значит, множество всех точек x δs -операции $\Phi_{N'v_1(n_1^* \dots n_k^*)}(\{E_v\})$, определяемых множеством цепей базы $N'^{v_1(n_1^* \dots n_k^*)}$, имеющим некомпактное замыкание, определяется при помощи δs -операции

$$\begin{aligned} & \Phi_{[N'v_1(n_1^* \dots n_k^*)]_*}(\{E_v\}) = \\ &= \sum_{r; n_{k+1}, \dots, n_{k+r}} \overline{\lim}_{n_{k+r}} \Phi_{N'^{v_1(n_1^* \dots n_k^* n_{k+1}^* \dots n_{k+r}^*)}}(\{E_v\}). \end{aligned}$$

Так как класс множеств Ξ и база N' находятся во вполне правильном отношении, то

$$\Phi_{[N'^{v_1(n_1^* \dots n_k^*)}]_*}(\{E_v\}) \subset \Phi_{N'}(\Xi).$$

Множество

$$\begin{aligned} \Phi_{N'_*(1)}(\{E_v\}) &= \sum_{n_1^*, n_2^*, \dots, n_k^*} \prod_{k=0}^{\infty} \Phi_{[N'^{v_1(n_1^* \dots n_k^*)}]_*}(\{E_v\}) = \\ &= \Phi_{v_1}(\{\Phi_{[N'^{v_1(n_1^* \dots n_k^*)}]_*}(\{E_v\})\}) = \Phi_{v_1}(\{\mathcal{G}_{v_1(n_1^* \dots n_k^*)}^1\}), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{v_1(n_1^* \dots n_k^*)}^1 &= \Phi_{[N'^{v_1(n_1^* \dots n_k^*)}]_*}(\{E_v\}) \subset \Phi_{N'}(\Xi), \\ \Phi_{[N'^{v_1(n_1^* \dots n_k^*)}]_*}(\{E_v\}) &\supset \Phi_{[N'^{v_1(n_1^* \dots n_k^* n_{k+1}^*)}]_*}(\{E_v\}), \\ \Phi_{[N'^{v_1(n_1^* \dots n_k^*)}]_*}(\{E_v\}) &= \Phi_{N'_*}(\{E_v\}) \text{ при } k=0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\Phi_{N'_*(1)}(\Xi) \subset \Phi_{N'}(\Xi). \quad (17)$$

Множество

$$\Phi_{[N'_*(1)]^n}(\{E_v\}) = \Phi_{N'_*(1)}(\{E_v\}) \cdot \Phi_{N'^n}(\{E_v\}).$$

Значит, в силу соотношения (17) и леммы 3,

$$\Phi_{[N'_*(1)]^n}(\Xi) \subset \Phi_{N'}(\Xi). \quad (18)$$

Таким образом, для $\alpha = 1$ теорема верна.

Пусть $\alpha = \alpha^* + n$, $n \geq 1$, где α^* — трансфинитное число второго рода, и для всех $\alpha' < \alpha$ теорема верна, причем

$$\Phi_{N'_*(\alpha')}(\{E_v\}) = \Phi_{N'}(\{\mathcal{G}_{v(n_1^* \dots n_k^*)}^{\alpha'}\}),$$

где

$$\mathcal{G}_{v(n_1^* \dots n_k^*)}^{\alpha'} \subset \Phi_{N'}(\Xi).$$

Так как класс множеств $\Phi_{N'}(\Xi)$ инвариантен относительно конечных пересечений, то, в силу леммы 3, он находится во вполне правильном

отношении с базой N' . Отсюда, в силу теоремы V,

$$\Phi_{N'_*}(\{\mathcal{G}_{v(n_1 \dots n_k)}^{\alpha-1}\}) \subset \Phi_{N'}(\Xi),$$

а в силу леммы 3,

$$\Phi_{N'_*(n_1^* \dots n_k^*)}(\{\mathcal{G}_{v(n_1 \dots n_k)}^{\alpha-1}\}) \subset \Phi_{N'}(\Xi).$$

Тогда, в силу теоремы V,

$$\begin{aligned} & \Phi_{[N'_*(n_1^* \dots n_k^*)]_*}(\{\mathcal{G}_{v(n_1 \dots n_k)}^{\alpha-1}\}) = \\ &= \sum_{r; n_{k+1} \dots n_{k+r}} \lim_{n_{k+r}} \Phi_{N'_*(n_1^* \dots n_k^* n_{k+1} \dots n_{k+r})}(\{\mathcal{G}_v^{\alpha-1}\}) \subset \Phi_{N'}(\Xi). \end{aligned}$$

Множество

$$\Phi_{N'_*(x)}(\{E_v\}) = \Phi_{N'}(\{\Phi_{[N'_*(n_1^* \dots n_k^*)]_*}(\{\mathcal{G}_v^{\alpha-1}\})\}).$$

Отсюда следует, что

$$\Phi_{N'_*(x)}(\Xi) \subset \Phi_{N'}(\Xi).$$

Множество

$$\Phi_{[N'_*(x)]^n}(\{E_v\}) = \Phi_{N'_*(x)}(\{E_v\}) \cdot \Phi_{N'^n}(\{E_v\}),$$

откуда следует, что

$$\Phi_{[N'_*(x)]^n}(\Xi) \subset \Phi_{N'}(\Xi).$$

Таким образом, теорема верна для $\alpha = \alpha^* + n$, $n \geq 1$.

Пусть α — трансфинитное число второго рода, и для всех $\alpha' < \alpha$ теорема верна, причем

$$\Phi_{N'_*(x)}(\{E_v\}) = \Phi_{N'_*(x)}(\{\mathcal{G}_{v(n_1 \dots n_k)}^{\alpha'}\}),$$

где

$$\mathcal{G}_{v(n_1 \dots n_k)}^{\alpha} \in \Phi_{N'}(\Xi).$$

Пусть $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \dots \rightarrow \alpha$. Тогда

$$\Phi_{N'_*(x_n)}(\{E_v\}) = \Phi_{N'}(\{\mathcal{G}_v^{\alpha_n}\}),$$

где

$$\mathcal{G}_v^{\alpha_n} \in \Phi_{N'}(\Xi), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Множество

$$\Phi_{N'_*(x)}(\{E_v\}) = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots} \prod_{k=1}^{\infty} \prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_{v(n_1 \dots n_k)}^{\alpha_n} = \Phi_{N'_*(x)}\left(\prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_{v(n_1 \dots n_k)}^{\alpha_n}\right).$$

Так как класс множеств $\Phi_{N'}(\Xi)$ инвариантен относительно счетных пересечений, то

$$\prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_{v(n_1 \dots n_k)}^{\alpha_n} \in \Phi_{N'}(\Xi),$$

а следовательно,

$$\Phi_{N'_*(x)}(\Xi) \subset \Phi_{N'}(\Xi).$$

Множество

$$\Phi_{[N'_*(\alpha)]^n}(\{E_v\}) = \Phi_{N'_*(\alpha)}(\{E_v\}) \cdot \Phi_{N'^n}(\{E_v\}),$$

поэтому

$$\Phi_{[N'_*(\alpha)]^n}(\Xi) \subset \Phi_{N'}(\Xi).$$

Таким образом, теорема верна для трансфинитного числа α второго рода.

Итак, теорема верна для всех трансфинитных чисел α , что и требовалось доказать.

Следствие 1. Если Ξ есть проективный класс множеств не ниже второго или класс A -множеств, то

$$\Phi_{N'_*(\alpha)}(\Xi) \subset \Xi \text{ и } \Phi_{[N'_*(\alpha)]^n}(\Xi) \subset \Xi.$$

На основании теоремы I и следствия 1 теоремы VI, получаем следующие утверждения:

Следствие 2. Для всякой последовательности A -множеств $\{E_n\}$ таких, что каждая точка множества $\Phi_{N'}(\{E_n\})$ определяется множеством цепей базы N' абсолютно первого класса подкласса $\leq \alpha$ (множеством цепей базы N' , представляющим собой рассеянное семейство множеств, замыкание которых компактно, индекса $\leq \alpha$) существует такая последовательность B -множеств $\{H_n\}$, что $H_n \supset E_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$) и каждая точка множества $\Phi_{N'}(\{H_n\})$ определяется множеством цепей базы N' , представляющим собой рассеянное семейство множеств, замыкание которых компактно, индекса $\leq \alpha$.

Следствие 3. Для всякой последовательности CA_2 -множеств $\{E_n\}$ таких, что каждая точка множества $\Phi_{N'}(\{E_n\})$ определяется множеством цепей базы N' абсолютно первого класса подкласса $\leq \alpha$ (множеством цепей базы N' , представляющим собой рассеянное семейство множеств, замыкание которых компактно, индекса $\leq \alpha$), существует такая последовательность B_2 -множеств $\{H_n\}$, что $H_n \supset E_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$) и каждая точка множества $\Phi_{N'}(\{H_n\})$ определяется множеством цепей базы N' , представляющим собой рассеянное семейство множеств, замыкание которых компактно, индекса $\leq \alpha$.

Аналогично, в системе аксиом теории множеств Σ непротиворечиво утверждение:

Следствие 4. Начиная с некоторого $n > 2$, для всякой последовательности CA_n -множеств $\{E_n\}$ таких, что каждая точка множества $\Phi_{N'}(\{E_n\})$ определяется множеством цепей базы N' абсолютно первого класса подкласса $\leq \alpha$ (множеством цепей базы N' , представляющим собой рассеянное семейство множеств, замыкание которых компактно, индекса $\leq \alpha$), существует такая последовательность B_n -множеств $\{H_n\}$, что $H_n \supset E_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$) и каждая точка множества $\Phi_{N'}(\{H_n\})$ определяется множеством цепей базы N' , представляющим собой рассеянное семейство множеств, замыкание которых компактно, индекса $\leq \alpha$.

Поступило
7. V. 1956

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Канторович Л. В. и Ливенсон Е. М., Memoir on the analytical operations and projective sets, I, Fundamenta Mathematicae, XVIII (1932), 214—271.

- ² Канторович Л. В. и Ливенсон Е. М., Memoir on the analytical operations and projective sets. II. Fundamenta Mathematicae, XX (1933), 54—97.
- ³ Ляпунов А. А., Об операциях над множествами, допускающих трансфинитные индексы, Успехи матем. наук, т. 11, вып. 1(67) (1956), 243—244.
- ⁴ Ляпунов А. А., О признаках вырождения для R -множеств, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 17 (1953), 563—578.
- ⁵ Козлова З. И., О накрытии множеств. I, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 19 (1955), 125—132.
- ⁶ Очан Ю. С., О переместимости δs -операций, Математ. сборник, 10 (52): 3 (1942), 151—163.
- ⁷ Очан Ю. С., Теория операций над множествами, Успехи матем. наук., т. X, вып. 3 (65) (1955), 71—128.
- ⁸ Ляпунов А. А., О кратной отделимости для δs -операций, Доклады Ак. наук СССР, 53, № 5 (1946), 399—402.
- ⁹ Ляпунов А. А., Отделимость и неотделимость R -множеств, Математ. сборник, т. 32 (74): 3 (1953), 515—532.
- ¹⁰ Козлова З. И., Взаимоотношения между теоремами кратной отделимости, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 16 (1952), 389—404.
- ¹¹ Новиков П. С., Sur la séparabilité des ensembles projectifs de seconde classe, Fundamenta Mathematicae, XXV (1935), 459—466.
- ¹² Гёдель К., Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств, перев. А. А. Маркова, Успехи матем. наук., т. III, вып. 1 (23) (1948), 96—149.
- ¹³ Новиков П. С., О непротиворечивости некоторых положений дескриптивной теории множеств, Труды Математ. инст. им. В. А. Стеклова, XXXVIII (1951), 279—316.
- ¹⁴ Mazurkiewicz S. et Sierpinski W., Sur un problème concernant les fonctions continues, Fundamenta Mathematicae, VI (1924), 161—169.
- ¹⁵ Арсенин В. Я. и Ляпунов А. А., Теория A -множеств, Успехи матем. наук, т. V, вып. 5 (39), (1950), 45—108.
- ¹⁶ Новиков П. С., Отделимость C -множеств, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 1 (1937), 253—264.
- ¹⁷ Канторович Л. В. и Ливенсон Е. М., Sur quelques théorèmes concernant la théorie des ensembles projectifs, Comptes Rendus de Paris, 204, № 5 (1937), 466—468.
- ¹⁸ De la Vallée Poussin Ch., Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensembles. Classes de Baire, Paris, 1934.
- ¹⁹ Проскуряков И. В., О некоторых свойствах локально-компактных и локально-бикompактных пространств, Ученые записки МГУ, Математика, вып. XXX, книга 3-я, 1939.
- ²⁰ Ляпунов А. А., О подклассах B -множеств, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 1 (1937), 419—426.
- ²¹ Тайманов А. Д., О жестких базах δs -операций, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 14 (1950), 443—448.

А. Я. ДУБОВИЦКИЙ

О СТРУКТУРЕ МНОЖЕСТВ УРОВНЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ n -МЕРНОГО КУБА В k -МЕРНЫЙ КУБ

(Представлено академиком П. С. Александровым)

В работе изучена связь между строением типичного множества уровня и степенью гладкости дифференцируемого отображения.

Введение

В приложениях математического анализа большое значение имеет вопрос исследования решений системы вида:

$$\left. \begin{aligned} u_1(x_1, \dots, x_n) &= c_1, \\ u_2(x_1, \dots, x_n) &= c_2, \\ u_k(x_1, \dots, x_n) &= c_k, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где левые части представляют собой дифференцируемые функции, определенные в единичном кубе C_n пространства R_n .

Геометрически совокупность решений системы (1) можно представить как множество точек куба C_n , образом которых при отображении U , задаваемом функциями $u_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, 2, \dots, k$, служит точка (c_1, c_2, \dots, c_k) k -мерного куба C_k .

Определение 1. Пусть $u = (c_1, c_2, \dots, c_k)$ — точка C_k . Множеством уровня E_u отображения U , переводящего C_n в C_k , называется полный прообраз точки u .

Отображение $U = \{u_i(x_1, x_2, \dots, x_n), i = 1, \dots, k\}$ мы называем m раз дифференцируемым, если все функции $u_i(x_1, \dots, x_n)$ обладают m последовательными дифференциалами в каждой точке куба C_n .

Пользуясь определением 1, мы можем сказать, что нахождение всех решений системы (1) эквивалентно определению соответствующего множества уровня E_u .

Особенный интерес представляет собой тот случай, когда какие-нибудь из k значений неизвестных решений, по крайней мере локально, являются однозначными функциями значений остальных неизвестных. Достаточным условием этого, согласно теореме Юнга, является наличие среди миноров k -го порядка матрицы Якоби $\left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\| (i = 1, \dots, k,$

$s = 1, \dots, n$) отличного от нуля в каждой точке рассматриваемого множества уровня. Поэтому представляется важным определить закономерность распределения особых точек (т. е. точек вырождения матрицы Якоби) по уровням дифференцируемого отображения в зависимости от степени его гладкости.

Прежде всего заметим, что строение индивидуального множества уровня отображения не зависит от степени гладкости этого отображения. Чтобы убедиться в этом, достаточно построить бесконечно дифференцируемую функцию n переменных, нулевое множество уровня которой совпадает с наперед заданным замкнутым множеством E . Построение такой функции можно провести по следующей схеме.

Пусть $\sigma = \left\{ \sqrt{\sum_s (x_s - \bar{x}_s)^2} \leq r \right\}$ — сфера радиуса r . В силу тождества

$$\rho(\eta, \sigma) = \sqrt{\sum_s (x_s - \bar{x}_s)^2} - r,$$

расстояние от точки η до сферы σ есть бесконечно дифференцируемая функция точки η . Тогда функция

$$\varphi_\sigma(\eta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \eta \in \bar{\sigma}, \\ e^{-\frac{1}{\rho(\eta, \sigma)}}, & \text{если } \eta \in C\bar{\sigma}, \end{cases}$$

бесконечно дифференцируема во всех точках R_n .

Рассмотрим произвольное конечное покрытие A множества E сферами $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_s$. Свяжем с ним функцию

$$F_A(\eta) = \varphi_{\sigma_1}(\eta), \dots, \varphi_{\sigma_s}(\eta).$$

Функция $F_A(\eta)$ бесконечно дифференцируема, неотрицательна и обращается в нуль только на множестве $\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2 + \dots + \bar{\sigma}_s$.

Построим стягивающуюся систему конечных покрытий A_1, A_2, A_3, \dots множества E сферами так, что радиусы сфер покрытия A_s не превосходят $\frac{1}{s}$. Положим

$$F(\eta) = F_{A_1}(\eta) + \frac{1}{n_2} F_{A_2}(\eta) + \frac{1}{n_3} F_{A_3}(\eta) + \dots$$

При соответствующем подборе чисел n_2, n_3, n_4, \dots ряд в правой части равномерно сходится вместе со всеми своими частными производными и определяет поэтому бесконечно дифференцируемую функцию $F(\eta)$. Все слагаемые ряда обращаются в нуль на E , а значит и $F(\eta)$ обращается в нуль в точках E . Если же $\eta \in CE$, то все слагаемые, начиная с некоторого, отличны от нуля. Следовательно, E есть нулевое множество уровня функции $F(\eta)$.

Таким образом, степень гладкости отображения не связана со структурой всех его множеств уровня. Поэтому мы ограничимся рассмотрением свойств, присущих почти всем уровням гладких отображений.

Определение 2. Мы будем говорить, что свойство A имеет место

почти для всех множеств уровня некоторого отображения C_n в C_k , если множество \mathcal{C} тех значений $u \in C_k$, для которых E_u не обладает свойством A , таково, что $m_k \mathcal{C} = 0$.

Множество уровня, обладающее свойством A , присущим почти всем уровням данного отображения, называется *типичным*.

В простейшем случае дифференцируемого отображения одномерного куба в одномерный типичное множество уровня не содержит особых точек.

Аналогичное предложение для функций многих переменных получили А. С. Кронрод и Е. М. Ландис в работе⁽¹⁾, основным результатом которой является теорема о том, что типичное множество уровня n раз дифференцируемой функции n переменных не содержит нулей ее дифференциала. Там же показано, исходя из примера Д. Е. Меншова, что при любом n существует $n - 1$ раз дифференцируемая функция n переменных, принимающая на своем особом множестве значения, заполняющие целый отрезок, откуда следует, что предпосылки полученной теоремы не могут быть ослаблены.

В работе автора⁽²⁾ эти результаты были обобщены на случай дифференцируемых отображений n -мерного куба в k -мерный куб.

В настоящей работе продолжены и, в известной степени, завершены исследования, проведенные в работе⁽²⁾.

Основной результат состоит в том, что ν -мерная мера множества особых точек $n - k + 1 - \nu$ раз дифференцируемого отображения n -мерного куба в k -мерный, содержащихся на его типичном множестве уровня, равна нулю, т. е. что «массивность» этого множества на типичном уровне уменьшается с увеличением гладкости отображения и, наконец, при $\nu = 0$ типичное множество уровня вообще не содержит особых точек. Таким образом, при $m \geq n - k + 1$ почти все множества уровня m раз дифференцируемого отображения C_n в C_k состоят из многообразий той же гладкости, что и само отображение.

Полученный результат не может быть усилен в том смысле, что при любых n, k и ν существует $n - k - \nu$ раз дифференцируемое отображение C_n в C_k , каждый уровень которого содержит множество особых точек положительной ν -мерной меры.

В настоящей работе устанавливается ряд теорем, характеризующих топологическую структуру типичного множества уровня гладкого отображения, и затем полученные результаты используются для изучения типичного множества уровня дифференцируемых функций многих переменных.

Основным аппаратом исследования в настоящей работе является понятие множества уровня.

Тот факт, что мы будем изучать отображение n -мерного куба в k -мерный куб, а не отображения произвольных замкнутых n -мерных областей в пространстве R_n , вызывается не существом дела, а принимается лишь для простоты изложения.

В заключение я выражаю глубокую признательность Д. Е. Меншову и П. С. Новикову, а также А. С. Кронроду и Е. М. Ландису за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Обозначения. Пусть U — отображение C_n в C_k . Символ $E\{V\}$ будет обозначать совокупность всех точек куба C_k , обладающих свойством V . Например $E\{m_u, E_u > 0\}$ обозначает множество всех точек u , $u \in C_k$, для которых u -мерная мера Хаусдорфа множества уровня E_u больше нуля.

Аналогично, пусть $D \subset C_n \cdot E\{m_u, E_u \cdot D > 0\}$ представляет собой совокупность точек u из C_k , для каждой из которых $m_u E_u \cdot D > 0$.

Пусть, далее, $B \subset C_k$. Ортогональную проекцию B в грань $x_i = 0$ будем обозначать $\text{пр}_{x_i} B$ или просто $\text{пр} B$, если в контексте указано, в какую грань проводится проектирование.

ГЛАВА 1

В этой главе будут доказаны вспомогательные предложения, используемые в дальнейшем.

§ 1. Мера Хаусдорфа

В наших исследованиях мы будем часто пользоваться различными свойствами меры Хаусдорфа.

Определение 3. Пусть Q — куб, координаты которого удовлетворяют условию

$$\frac{l_i}{2^s} < x_i < \frac{l_i + 1}{2^s},$$

$i = 1, 2, \dots, n$, $l_i = \pm 1, \pm 1,5, \pm 2, \pm 2,5, \dots$, $s = 1, 2, 3, \dots$.

Систему всех кубов указанного типа обозначим через Σ .

Пусть E — произвольное множество из R_n . Каждое δ -покрытие Σ множества E кубами из Σ будем называть *регулярным*. Обозначим через r_1, r_2, r_3, \dots ребра кубов Q_1, Q_2, Q_3, \dots регулярного покрытия Σ' . Число $\sum_s r_s^v$ будем называть v -мерной величиной Σ' и обозначать через $\sigma_v(\Sigma')$.

Нижняя грань v -мерных величин по всем регулярным δ -покрытиям множества E называется δ -приближением внешней v -мерной меры Хаусдорфа.

δ -приближение v -мерной меры Хаусдорфа множества E обозначается через $m_v^\delta E$.

Очевидно с уменьшением δ $m_v^\delta E$ не убывает.

$\lim_{\delta \rightarrow 0} m_v^\delta E$ называется v -мерной внешней мерой Хаусдорфа и обозначается через $m_v E$.

Так введенная внешняя мера является мерой Каратеодори. В частности, все A -множества измеримы по отношению к ней. Это определение отличается от традиционного [см. (6)]. Однако, если обозначить общепринятую внешнюю v -мерную меру Хаусдорфа множества E через $\Lambda_v E$, а здесь введенную — через $m_v E$, то имеет место

ТЕОРЕМА. Для любого множества E из R_n справедливо:

$$2^{n+v} n^{\frac{v}{2}} m_v E \geq 2^{n+v} \Lambda_v E \geq m_v E.$$

Доказательство. Заметим сначала, что каждую сферу π диаметра $d < 1$ можно всегда покрыть регулярной системой из 2^n кубов из \sum с ребрами, длина которых меньше, чем $2d$.

Из сказанного вытекает, что каждое δ -покрытие, $\delta > 1$, множества E сферами $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots$ с диаметрами d_1, d_2, d_3, \dots можно заключить в регулярную систему \sum' кубов так, что ν -мерная величина \sum' будет меньше, чем

$$2^{n+\nu} \sum_s d_s^\nu.$$

Следовательно,

$$2^{n+\nu} \Lambda_\nu^\delta E \geq m_\nu^{2\delta} E. \quad (1)$$

Обратная оценка получается следующим образом.

Пусть кубы Q_1, Q_2, Q_3, \dots с ребрами r_1, r_2, r_3, \dots образуют регулярное δ -покрытие множества E . Описав вокруг каждого из них сферу, получим покрытие множества E сферами с диаметрами $\sqrt[n]{n} \cdot r_1, \sqrt[n]{n} \cdot r_2, \dots$. ν -мерная величина этого покрытия будет меньше, чем

$$n^{\frac{\nu}{2}} \sum_s r_s^\nu.$$

Следовательно,

$$n^{\frac{\nu}{2}} m_\nu^\delta E \geq \Lambda_\nu^{\sqrt[n]{n}\delta} E. \quad (2)$$

Устремив в неравенствах (1) и (2) δ к нулю, получим

$$2^{n+\nu} n^{\frac{\nu}{2}} m_\nu E \geq 2^{n+\nu} \Lambda_\nu E \geq m_\nu E.$$

Теорема доказана.

Из доказанного следует, что $m_\nu E$ и $\Lambda_\nu E$ одновременно обращаются в нуль и в бесконечность

§ 2. О δ -приближениях ν -мерной внешней меры Хаусдорфа монотонно возрастающих последовательностей множеств

Известно, что мера Хаусдорфа регулярна и поэтому предел внешних мер монотонно возрастающей последовательности множеств равен мере предела этой последовательности [см. (6)].

Аналогичный результат имеет место и для δ -приближений ν -мерной меры Хаусдорфа, а именно справедлива

ТЕОРЕМА 1. Пусть

$$E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \dots \quad (1)$$

— монотонно возрастающая последовательность множеств. Тогда при любом $\delta > 0$

$$\lim_s m_\nu^\delta E_s = m_\nu^\delta \left(\sum_s E_s \right).$$

Доказательство 1°. Пусть, сначала, все множества (1) заключены в некоторой сфере K пространства R_n . Занумеруем кубы из Σ , содержащиеся в K , в простую последовательность

$$Q_1, Q_2, Q_3, \dots \quad (2)$$

Если r_1, r_2, r_3, \dots — их ребра, то, очевидно,

$$\lim_s r_s = 0. \quad (3)$$

Доказательство теоремы будем вести от противного. Обозначим $\sum_s E_s = E$.

Пусть при некотором $\delta > 0$

$$\lim_s m_v^\delta E_s = a \text{ и } m_v^\delta E \neq a. \quad (4)$$

Тогда

$$m_v^\delta E = a + d, \quad d > 0.$$

Заклучим каждое из множеств E_i в измеримое множество \mathcal{G}_i одинаковой с ним внешней v -мерной меры [см. (6)]. Положим

$$\mathcal{G} = \sum_s \mathcal{G}_s.$$

Подберем для каждого из множеств \mathcal{G}_i регулярное δ -покрытие \sum_i так, чтобы

$$\sigma_v(\sum_i) < a + \frac{d}{4}. \quad (5)$$

Каждый куб из последовательности (2), содержащийся в бесконечном числе построенных покрытий, назовем *отмеченным*.

Возможны два случая: либо среди кубов последовательности (2) существуют отмеченные, либо нет.

А) Рассмотрим тот случай, когда последовательность (2) не содержит отмеченных кубов. В этом случае v -мерная мера каждого из множеств \mathcal{G}_i меньше, чем $a + \frac{d}{4}$. Действительно, множество \mathcal{G}_i содержится в каждом из покрытий \sum_{i+p} при любом p . Пусть $\varepsilon > 0$. Кубов с ребрами, большими, чем ε , содержится в (2) лишь конечное число. А так как каждый из них принадлежит только конечному числу покрытий \sum_i , то все \sum_i , начиная с некоторого, состоят из кубов с ребрами, меньшими ε . Значит,

$$m_v^\varepsilon \mathcal{G}_i < a + \frac{d}{4}.$$

Отсюда, в силу произвольности ε , следует:

$$m_v \mathcal{G}_i \leq a + \frac{d}{4}.$$

Но тогда

$$\lim_{i \rightarrow \infty} m_v \mathcal{G}_i = m_v \mathcal{G},$$

где $\mathcal{G} = \sum_s \mathcal{G}_s$. Значит,

$$m_v \mathcal{G} < a + \frac{d}{4}$$

и, тем более,

$$m_v E < a + \frac{d}{4},$$

что невозможно, так как $m_v^\delta E = a + d$.

В) Рассмотрим теперь тот случай, когда система (2) содержит отмеченные кубы.

Обозначим через \bar{Q}_1 отмеченный куб с наименьшим индексом. Удалив не содержащие \bar{Q}_1 покрытия и перенумеровав их заново, будем считать, что \bar{Q}_1 содержится во всех \sum_i . Если в исправленной системе покрытий новых отмеченных кубов нет, то на этом процесс их выделения закончим. Если же среди кубов (2) существуют отмеченные, отличные от \bar{Q}_1 , то обозначим через \bar{Q}_2 отмеченный куб, имеющий наименьший индекс.

Можно считать, что \bar{Q}_2 содержится во всех покрытиях \sum_i , начиная со второго. Чтобы достичь этого, достаточно удалить все покрытия, не содержащие \bar{Q}_2 , кроме первого, и оставшиеся перенумеровать заново. Если среди кубов системы (2) найдутся отмеченные, отличные от \bar{Q}_1 и \bar{Q}_2 , то обозначим через \bar{Q}_3 тот из них, который имеет наименьший индекс. Можно считать, что \bar{Q}_3 содержится во всех покрытиях, начиная с \sum_3 . Чтобы достичь этого, достаточно удалить все покрытия, не содержащие \bar{Q}_3 , кроме первых двух.

Продолжив процесс выделения отмеченных кубов неограниченно, получим конечную или счетную последовательность \sum' отмеченных кубов $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \bar{Q}_3, \dots$ такую, что \bar{Q}_s содержится во всех покрытиях, начиная с \sum_s . Очевидно,

$$\sigma_v(\sum') < a + \frac{d}{4}.$$

Поэтому из \sum' можно выделить конечную систему \sum'' , содержащую N_1 кубов $\bar{Q}_1, \bar{Q}_3, \bar{Q}_5, \dots, \bar{Q}_{N_1}$ так, что

$$\sigma_v(\sum') - \sigma_v(\sum'') < \frac{d}{4}. \quad (6)$$

Так как из доказанного в случае А) следует, что v -мерная мера каждого из множеств $\mathcal{C}_i - \sum'$ не превосходит $a + \frac{d}{4}$, то

$$\lim_i m_v(\mathcal{C}_i - \sum')$$

существует и равен

$$m_v(\mathcal{C} - \sum').$$

Возьмем N_2 столь большим, чтобы для $i \geq N_2$

$$m_v\{(\mathcal{C} - \sum') - (\mathcal{C}_i - \sum')\} < \frac{d}{4}. \quad (7)$$

Положим $N = \max[N_1, N_2]$. Мы имеем:

$$\mathcal{C} \subset \sum_N + (\sum' - \sum_N) + \{(\mathcal{C} - \sum') - (\mathcal{C}_N - \sum')\}.$$

Действительно, если точка η содержится в \mathcal{C} , но не содержится в \sum_N и в \sum' , то она не содержится и в \mathcal{C}_N , и поэтому

$$(\mathcal{C} - \sum') - (\mathcal{C}_N - \sum') \supset \eta.$$

Значит,

$$m_v^{\delta} \mathcal{C} \leq \sigma_v(\sum_N) + \sigma_v(\sum' - \sum_N) + m_v^{\delta}\{(\mathcal{C} - \sum') - (\mathcal{C}_N - \sum')\},$$

или в силу (5), (6) и (7),

$$m_v^\delta \mathcal{G} < a + \frac{d}{4} + \frac{d}{4} + \frac{d}{4} = a + \frac{3}{4}d,$$

что невозможно, так как, по условию, $m_v^\delta E = a + d$, а $E \subset \mathcal{G}$.

Таким образом, для случая ограниченных множеств (1) теорема доказана.

2°. Рассмотрим теперь тот случай, когда множества (1) неограниченны. Пусть $D \subset R_n$. Обозначим через D^p совокупность точек η из D , для которых $p \leq |\eta| \leq p+1$, и пусть $\bar{D}^N = \sum_{p < N} D^p$. Очевидно,

$$\sum_{p=1}^{\infty} D^p = D,$$

причем множества D^p с индексами одинаковой четности удалены друг от друга не меньше, чем на единицу.

Пусть $\sum_i E_i = E$, $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \dots$ и $\delta > 0$. Возможны два случая:

$$\begin{aligned} 1. \quad \sum_i m_v^\delta E_i^{2s} < \infty \quad \text{и} \quad \sum_i m_v^\delta E_i^{2s+1} < \infty, \\ 2. \quad \sum_i m_v^\delta E_i^{2s} = \infty \quad \text{либо} \quad \sum_i m_v^\delta E_i^{2s+1} = \infty. \end{aligned}$$

Рассмотрим случай 1. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда найдется $N > 0$ такое, что

$$\sum_{p > N} m_v^\delta E^p < \frac{\varepsilon}{3};$$

следовательно,

$$m_v^\delta \bar{E}^N + \frac{\varepsilon}{3} > m_v^\delta E. \quad (8)$$

По доказанному в п. 1°,

$$\lim_i m_v^\delta \bar{E}_i^N = m_v^\delta \bar{E}^N.$$

Значит, для достаточно больших i

$$m_v^\delta \bar{E}_i^N + \frac{\varepsilon}{3} > m_v^\delta \bar{E}^N. \quad (9)$$

Из (8) и (9) следует, что для тех же i

$$m_v^\delta E_i + \frac{2}{3}\varepsilon > m_v^\delta E,$$

т. е.

$$\lim_i m_v^\delta E_i = m_v^\delta E.$$

Если же имеет место случай 2, то совершенно аналогично можно показать, что

$$\lim_i m_v^\delta E_i = \infty.$$

Теорема доказана.

Отметим, что в теореме 2 мы не предполагали измеримости рассматриваемых множеств.

Определение 4. Верхним топологическим пределом последовательности множеств

$$E_1, E_2, E_3, \dots \quad (10)$$

называется множество, состоящее из точек, содержащих в каждой своей окрестности точки бесконечного числа множеств последовательности (10).

ЛЕММА 1. Если множество E есть верхний топологический предел последовательности множеств (10), лежащих в C_n , и $m_\delta^\delta E_i \geq A$ для всех i , то и $m_\delta^\delta E \geq A$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное регулярное δ -покрытие Σ' множества E кубами $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots$ с ребрами r_1, r_2, r_3, \dots . Покажем, что все множества последовательности (10), начиная с некоторого, погружены в $\sum_s \pi_s$.

Действительно, если бы это было не так, то нашлась бы бесконечная подпоследовательность множеств последовательности (10), содержащих, по крайней мере, по одной точке из $C \sum_s \pi_s$. В силу компактности $C_n \cdot C \sum_s \pi_s$, отсюда следовало бы, что в $C \sum_s \pi_s$ содержится, по крайней мере, одна точка из верхнего топологического предела последовательности (10), что невозможно, так как $E = \bar{\text{li}} E_s$ и $E \subset \sum_s \pi_s$. Значит, $m_\delta^\delta(\Sigma') \geq A$, а отсюда уже легко следует, в силу произвольности Σ' , что $m_\delta^\delta E \geq A$.

Лемма доказана.

Следствие. Если множество E есть пересечение убывающей последовательности замкнутых множеств

$$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots \quad (11)$$

из куба C_n , причем $m_\delta^\delta E_i > A$ для всех i , то $m_\delta^\delta E \geq A$.

Доказательство. Для доказательства, в силу леммы 1, достаточно заметить, что в данном случае множество E является верхним топологическим пределом последовательности (11).

ЛЕММА 2. Если множество E есть сумма возрастающей последовательности множеств $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \dots$, то $\lim_s m_\delta^\delta E_s = m_\delta^\delta E$.

Доказательство. Справедливость леммы 2 вытекает из регулярности меры Хаусдорфа [см. (6), стр. 80].

§ 3. Вспомогательные предложения

ЛЕММА 3. Пусть U — отображение n -мерного куба в k -мерный куб C_k , и D — множество типа F_α , лежащее в C_n , на котором U непрерывно. Тогда $m_\delta^\delta E_u D$ есть B -функция точки u .

Доказательство. Множество D , данное в условии, представим в виде суммы возрастающей последовательности ограниченных замкнутых множеств $D_1 \subset D_2 \subset D_3 \subset \dots$. Так как

$$m_\delta^\delta E_u \cdot D = \lim_s m_\delta^\delta E_u \cdot D_s,$$

то утверждение леммы будет доказано, если мы покажем, что $m_v E_u \cdot D_s$ есть B -функция точки u при каждом s .

Пусть $\delta > 0$. Обозначим через $T(\delta, A)$ совокупность тех точек $u \in C_k$, для которых $m_v^\delta E_u \cdot D_s \geq A$. $T(\delta, A)$ замкнуто. Действительно, пусть u_0 есть предел последовательности точек u_1, u_2, \dots из $T(\delta, A)$. Так как отображение U непрерывно на замкнутом множестве D_s , то

$$\overline{\lim}_r E_{u_r} \cdot D_s \subset E_{u_0} \cdot D_s.$$

В силу леммы 1,

$$m_v^\delta E_{u_0} \cdot D_s \geq A,$$

т. е. $u_0 \in T(\delta, A)$. Следовательно, $m_v^\delta E_u \cdot D_s$ есть полунепрерывная сверху функция точки u . Но

$$m_v E_u \cdot D_s = \lim_{\delta \rightarrow 0} m_v^\delta E_u \cdot D_s,$$

поэтому $m_v E_u \cdot D_s$, будучи пределом возрастающей последовательности полунепрерывных сверху функций, полунепрерывна сверху, а значит является B -функцией точки u .

Известно [см. (4) и (5)], что если $m_v E = d > 0$, где E — A -множество пространства R_n , то существует замкнутое множество F , $F \subset E$, такое, что $m_v F > d - \varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$.

Обобщением этого предложения является

ЛЕММА 4. Пусть U — отображение n -мерного куба в k -мерный куб, непрерывное на замкнутом множестве P . Если N , содержащееся в P , есть A -множество такое, что

$$m_k E_u \{m_v E_u \cdot N > 0\} = a, \quad (1)$$

то, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует замкнутое множество $N^* \subset N$, для которого

$$m_k E_u \{m_v E_u \cdot N^* > 0\} > a - \varepsilon.$$

Доказательство. Будем рассматривать куб C_n как проекцию куба C_{n+1} в гиперплоскость $x_{n+1} = 0$. Множество N , данное в условии, будем считать проекцией множества \tilde{N} типа G_δ куба C_{n+1} :

$$\tilde{N} = \prod_s \sum_r \tilde{N}_{sr},$$

где \tilde{N}_{sr} замкнуты и монотонно возрастают с ростом r при фиксированном s .

Множество N^* будем строить как проекцию пересечения специально выделенной последовательности

$$\tilde{N}_{1r_1}, \tilde{N}_{2r_2}, \tilde{N}_{3r_3}, \dots \quad (2)$$

В силу (1), из леммы 2 следует существование такого $\omega > 0$, что

$$m_k E_u \{m_v^\omega E_u \cdot N > \omega\} > a - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Приступим к построению последовательности (2). N_{1r_1} выберем из условия

$$m_k E_u \{m_v^\omega E_u \cdot \text{пр}_{x_{n+1}} \tilde{N} \cdot \tilde{N}_{1r_1} > \omega\} > a - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть все \tilde{N}_{1r_i} для $i < s$ определены. \tilde{N}_{sr_s} выберем так, чтобы

$$m_k E_u \{m_v^\omega E_u \cdot \text{пр}_{x_{n+1}} \tilde{N} \cdot \prod_{i \leq s} \tilde{N}_{ir_i} > \omega\} > a - \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3)$$

Возможность выбора таких множеств вытекает из тождества

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \tilde{N} \cdot \tilde{N}_{ir} = \tilde{N}$$

в силу теоремы 1 и леммы 2.

Положим

$$N^s = P \text{ пр}_{x_{n+1}} \prod_{i < s} \tilde{N}_{ir_i}, \quad N^* = \text{пр}_{x_{n+1}} \prod_s N^s, \quad (4)$$

$$\mathcal{G}^s = E_u \{m_v^\omega E_u \cdot N^s \geq \omega\}; \quad \mathcal{G}^* = \prod_s \mathcal{G}^s.$$

Очевидно,

$$N^1 \supset N^2 \supset \dots \text{ и } \mathcal{G}^1 \supset \mathcal{G}^2 \supset \dots \quad (5)$$

Из леммы 3 следует, что все множества \mathcal{G}^s измеримы (более того, они, как легко следует из доказательства леммы 3, замкнуты).

Так как

$$E_u \{m_v^\omega E_u \cdot N^s \geq \omega\} \supseteq E_u \{m_v^\omega E_u \cdot \text{пр}_{x_{n+1}} \tilde{N} \cdot \prod_{i=s} \tilde{N}_{ir_i} > \omega\},$$

то, в силу (3),

$$m_k \mathcal{G}^s = m_k E_u \{m_v^\omega E_u N^s \geq \omega\} > a - \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда

$$m_k \mathcal{G}^* > a - \varepsilon. \quad (6)$$

Пусть $\bar{u} \in \mathcal{G}^*$. Так как $\bar{u} \in \mathcal{G}^s$ при всех s , то из (4) следует:

$$m_v^\omega E_{\bar{u}} \cdot N^s \geq \omega \text{ при всех } s \quad (7)$$

и

$$\lim_{s \rightarrow \infty} E_{\bar{u}} \cdot N^s = E_{\bar{u}} \cdot N^*.$$

Так как отображение u непрерывно на замкнутом множестве $\bullet P$, то $E_u \cdot P$ замкнуто и поэтому, в силу следствия из леммы 1, из (7) следует:

$$m_v^\omega E_{\bar{u}} \cdot N^* \geq \omega$$

и, тем более,

$$m_v E_{\bar{u}} \cdot N^* \geq \omega.$$

Так как \bar{u} — произвольная точка из \mathcal{G}^* , то из последнего соотношения, в силу (6), выводим:

$$m_k \{m_v E_u \cdot N^* > 0\} > a - \varepsilon. \quad (8)$$

Лемма доказана.

Следствие 1. Утверждение леммы 4 остается справедливым, если в ее условии заменить замкнутое множество P произвольным множеством типа F_σ .

Доказательство. Пусть P — множество типа F_σ , содержащее A -множества N , $P = \lim P_s$, где P_s замкнуты, и пусть

$$m_k E_u \{m_v E_u \cdot P_s \cdot N > 0\} = a_s.$$

Выделим в каждом из A -множеств $P_s \cdot N$, пользуясь леммой 4, замкнутые множества N_s^* так, чтобы

$$m_k E_u \{m_v E_u \cdot N_s^* > 0\} > a_s - \frac{\varepsilon}{r}.$$

Так как $a_s \rightarrow a$, то найдется s_0 такое, что

$$m_k E_u \{m_v E_u \cdot N_{s_0}^* > 0\} > a - \varepsilon.$$

Это и доказывает следствие 1.

Следствие 2. Если для отображения U n -мерного куба в k -мерный куб и A -множества $N \subset C_n$ выполнены все условия леммы 4, то множество $E_u \{m_v E_u \cdot N_s^* > 0\}$ измеримо.

Доказательство. Справедливость высказанного утверждения следует из неравенства (8), так как множество $E_u \{m_v E_u \cdot N^* > 0\}$, в силу леммы 2, измеримо, как лебеговское множество B -функции (напомним, что отображение U непрерывно на множестве P и, тем более, на множестве $N^* \subset P$).

ЛЕММА 5. Если множество A принадлежит графику функции $x_p = \varphi(x_1, \dots, x_{p-1})$ и в точках $\text{пр}_{x_1} A$ эта функция однократно дифференцируема, причем $m_v A > 0$, то $m_v \text{пр}_{x_p} A > 0$.

Доказательство. Пусть

$$\xi_0 = (x_1^0, \dots, x_{p-1}^0, x_p^0).$$

Тогда найдется такое натуральное число $n(\xi_0)$, что

$$|\varphi(x_1^0, \dots, x_{p-1}^0) - \varphi(x_1, \dots, x_{p-1})| < n(\xi_0) \sqrt{\sum_{i \leq p-1} (x_i - x_i^0)^2},$$

как только

$$\sqrt{\sum_{i \leq p-1} (x_i - x_i^0)^2} \leq \frac{1}{n(\xi_0)}.$$

Обозначим через A_m совокупность точек из A , для каждой из которых $n(\xi_0) \leq m$. Очевидно,

$$\sum_m A_m = A.$$

Следовательно, по крайней мере одно из слагаемых левой части обладает положительной v -мерной мерой. Пусть для определенности, $m_v A_m > 0$. Покажем, что $m_v \text{пр}_{x_p} A_m > 0$. Доказательство проведем от противного.

Пусть $m_v \text{пр}_{x_p} A_m = 0$. Тогда при каждом $\delta > 0$

$$m_v^\delta \text{пр}_{x_p} A_m = 0.$$

Следовательно, для любых положительных ε и δ существует δ -покрытие множества $\text{пр}_{x_p} A$ кубами $\pi_1^{(p-1)}, \pi_2^{(p-1)}, \dots$ с ребрами r_1, r_2, \dots такое,

что $\sum_i r_i^\gamma < \varepsilon$.

Рассмотрим произвольное δ -покрытие множества $\text{pr}_{x_p} A$, где $\delta < \frac{1}{m}$, кубами

$$\pi_1^{(p-1)}, \pi_2^{(p-1)}, \dots \quad (9)$$

с ребрами r_1, r_2, \dots , для которого $\sum_i r_i^v < \frac{\varepsilon}{2^m}$. Пусть куб π_s^{p-1} с ребром r_s содержится в последовательности (9). В силу определения множества A_m и из того, что диаметр куба π_s^{p-1} меньше $\frac{1}{m}$, следует, что часть множества A_m , расположенная над π_s^{p-1} , может быть погружена в систему, состоящую из $2m$ равных между собой p -мерных кубов, ребра которых равны r_s (ребру куба π_s^{p-1}). Проведя аналогичные рассуждения для каждого из кубов по последовательности (9), заключаем, что множество A_m можно погрузить в систему p -мерных кубов с диаметрами, меньшими $2\delta < \frac{2}{m}$, сумма v степеней ребер которых меньше ε .

В силу произвольности чисел ε и δ , отсюда следует: $m_v A_m = 0$, что противоречит условию. Таким образом,

$$m_v \text{pr}_{x_p} A_m > 0$$

и, тем более,

$$m_v \text{pr}_{x_p} A > 0.$$

Лемма доказана.

Для доказательства последующего предложения — леммы о неявной функции — введем ряд определений.

Определение 5. *Направлением луча $\eta_0\eta$ в пространстве R_n называется совокупность его направляющих косинусов.*

Определение 6. Луч $\overline{\eta_0\eta}$ называется *полукасательной множества E в точке η_0* , если существует последовательность точек $\{\eta_s\}$ из E такая, что $\eta_s \rightarrow \eta_0$ и направления лучей $\overline{\eta_0\eta_s}$ стремятся к направлению луча $\overline{\eta_0\eta}$.

Определение 7. Направление луча $\overline{\eta_0\eta}$ называется *свободным для множества E в точке η_0* , если луч $\overline{\eta_0\eta}$ не есть полукасательная для множества E .

Определение 8. Совокупность всех полукасательных множества E в точке η_0 называется *контингенцией множества E в точке η_0* .

Определение 9. Мы будем говорить, что функция $f(\eta)$, определенная на множестве E , *слабо дифференцируема до порядка m в точке η_0* , если существует полином $P(\eta_0, \eta)$ степени не выше m и такой, что

$$|P(\eta_0, \eta) - f(\eta)| = o(|\eta - \eta_0|^m).$$

Полином P называется *слабым дифференциалом* для функции $f(\eta)$.

ЛЕММА 6 (о неявной функции). Пусть на A -множестве N производная по x_1 m -кратно дифференцируемой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ отлична от нуля и $N \subset \mathcal{E}_\tau$ (\mathcal{E}_τ — множество уровня функции f).

Если непрерывное отображение U куба C_n в куб C_k таково, что

$$m_k E \left\{ m_u E_u \cdot N > 0 \right\} > 0,$$

то существуют B -функция $\varphi(x_2, \dots, x_n)$ с графиком $\Gamma \subset \mathcal{E}_\tau$ и A -множество N^* , $N^* \subset \Gamma$, такие, что

$$1. m_k E_u \{m_v E_u \cdot N^* > 0\} > 0,$$

2. $\varphi(x_2, \dots, x_n)$ m -кратно слабо дифференцируема на множестве $\text{пр}_x N^*$.

Доказательство. 1°. Если $m > 1$, то множество N можно погрузить в счетную систему сегментов $\{\pi_s\}$, в каждом из которых множество \mathcal{G}_τ , в силу теоремы Юнга о неявной функции, совпадает с графиком Γ_s m раз дифференцируемой функции $\varphi_s(x_2, \dots, x_n)$. Так как

$$E_u \{m_v E_u \cdot N > 0\} = \sum_s E_u \{m_v E_u \cdot N \cdot \Gamma_s > 0\},$$

то хотя бы одно слагаемое в правой части имеет положительную внешнюю меру. Для определенности положим

$$m_k E_u \{m_v E_u \cdot N \cdot \Gamma_1 > 0\} > 0.$$

Тогда для функции $\varphi_1(x_2, \dots, x_n)$ выполняются, как легко видеть, все утверждения леммы.

2°. Пусть $m = 1$. Тогда $N = \sum_s N_{\frac{1}{s}}$, где в каждой точке η_0 из $N_{\frac{1}{s}}$ производная $\frac{\partial f}{\partial x_1} \neq 0$ и на отрезке длины $\frac{2}{s}$, параллельном оси x_1 , с серединой в точке η_0 , нет других точек \mathcal{G}_τ (кроме η_0). Покажем, что $N_{\frac{1}{s}}$ является одновременно с N A -множеством. Имеем:

$$N \cdot CN_{\frac{1}{s}} = \sum_{r>s} T_{\frac{1}{s}} \frac{1}{r},$$

где $T_{\frac{1}{s}} \frac{1}{r}$ состоит из точек $\eta_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$, принадлежащих N и таких, что один из отрезков с концами

$$\eta' = \left(x_1^0 \pm \frac{1}{r}, x_2^0, \dots, x_n^0\right), \quad \eta'' = \left(x_1^0 \pm \frac{1}{s}, x_2^0, \dots, x_n^0\right),$$

содержит, по крайней мере, одну точку уровня \mathcal{G}_τ . Очевидно, $T_{\frac{1}{s}} \frac{1}{r}$ замкнуто на N . Следовательно, $NCN_{\frac{1}{s}}$ есть F_σ на N , а множество $N_{\frac{1}{s}}$ есть G_δ на N . Значит, $N_{\frac{1}{s}}$ есть A -множество.

Так как

$$E_u \{m_v E_u \cdot N > 0\} = \sum_s E_u \{m_v E_u \cdot N_{\frac{1}{s}} > 0\},$$

то хотя бы одно из слагаемых правой части имеет положительную k -мерную меру. Для определенности, положим

$$m_k E_u \{m_v E_u \cdot N_{\frac{1}{s_0}} > 0\} > 0. \quad (10)$$

Рассмотрим точку $\eta_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ из $N_{\frac{1}{s_0}}$. Согласно определению множества $N_{\frac{1}{s_0}}$, каждый отрезок η' , η'' , где

$$\eta' = (x_1', x_2^0, \dots, x_n^0), \quad \eta'' = (x_1'', x_2^0, \dots, x_n^0),$$

а x_1' и x_1'' — рациональные числа, причем $|x_1' - x_1''| < \frac{1}{s_0}$ и $x_1' < x_1^0 < x_1''$, не содержит ни одной точки множества уровня \mathcal{G}_τ (кроме η_0).

Если числа x'_1 и x''_1 выбраны достаточно близкими к x^0_1 , то либо

$$f(\eta') < f(\eta_0) < f(\eta''),$$

либо

$$f(\eta') > f(\eta_0) > f(\eta'')$$

(в зависимости от знака производной $\frac{\partial f}{\partial x_1}$). Пусть, для определенности,

$$f(\eta') < f(\eta_0) < f(\eta'').$$

В силу непрерывности функции $f(\eta)$, точку η_0 можно погрузить в рациональный сегмент π с основаниями π' , π'' , содержащими, соответственно, точки η' и η'' , и такой, что в точках верхнего основания π'' функция $f(\eta)$ принимает значения, большие, чем $f(\eta_0)$, а в точках нижнего основания π' — меньшие.

Из построения следует, что каждый отрезок, соединяющий основания сегмента π , пересекается со множеством \mathcal{G}_τ . Подобное построение проведем для каждой точки из $N_{\frac{1}{s_0}}$. Мы получим счетное множество рациональных сегментов π_1, π_2, \dots . Так как

$$E_u \{m_v E_u \cdot N_{\frac{1}{s_0}} > 0\} = \sum_i E_u \{m_v E_u \cdot N_{\frac{1}{s_0}} \cdot \pi_i > 0\},$$

то, в силу (10), одно из слагаемых правой части имеет положительную k -мерную меру. Для определенности положим

$$m_k E_u \{m_v E_u \cdot N_{\frac{1}{s_0}} \pi_1 > 0\} > 0. \quad (11)$$

Обозначим $N^* = N_{\frac{1}{s_0}} \pi_1$. Как следует из определения сегмента π_1 и множества $N_{\frac{1}{s_0}}$, множество N^* равномерно вдоль оси x_1 . Определим в точках проекции сегмента π_1 в гиперплоскость $x_1 = 0$ функцию $\varphi(x_2, \dots, x_n)$, положив $\varphi(x_2^0, \dots, x_n^0) = \min x_1$, где минимум берется среди всевозможных точек $(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \mathcal{G}_\tau \cdot \pi_1$. Графиком Γ этой функции является совокупность нижних точек множества $\mathcal{G}_\tau \cdot \pi_1$, поэтому φ является B -функцией первого класса. В силу равномерности N^* , имеет место: $N^* \subset \Gamma$, причем из неравенства (11) следует:

$$m_k E_u \{m_v E_u \cdot N^* > 0\} > 0. \quad (12)$$

Остается показать, что $\varphi(x_2, \dots, x_n)$ однократно слабо дифференцируема во всех точках проекции N^* в гиперплоскость $x_1 = 0$. Действительно, пусть

$$(x_2^0, \dots, x_n^0) \in \text{пр}_{x_1} N^*.$$

Тогда

$$\eta_0 = [\varphi(x_2^0, \dots, x_n^0) x_2^0, \dots, x_n^0],$$

в силу определения $\varphi(x_2, \dots, x_n)$, принадлежит N^* . В точках же мно-

* Сегмент $\pi = \{h_i \leq x_i \leq \bar{h}_i\}$ мы называем рациональным, если все h_i, \bar{h}_i — рациональные числа.

жества $N^* \subset N$ контингентия уровня \mathcal{E}_τ содержит не более $n-1$ линейно независимых направлений. Действительно, в точках из \mathcal{E}_τ , к которым множество \mathcal{E}_τ сходится вдоль n независимых направлений, дифференциал функции $f(\eta)$ равен нулю.

Пусть $\eta_0 \in N^*$. Из того, что $\Gamma \subset \mathcal{E}_\tau$, следует, что контингентия множества Γ в точке η_0 можно погрузить в $(n-1)$ -мерную гиперплоскость H , которая определяется однозначно. H касается графика Γ в точке η_0 . Она не параллельна оси x_1 , так как эта ось является свободным направлением для \mathcal{E}_τ в точке η_0 . Если

$$A_1(x_1 - x_1^0) + A_2(x_2 - x_2^0) + \dots + A_n(x_n - x_n^0) = 0$$

— уравнение гиперплоскости H , то многочлен

$$P(\eta_0, \eta) = X_i^0 - \left[\frac{A_2}{A_1}(x_2 - x_2^0) + \dots + \frac{A_n}{A_1}(x_n - x_n^0) \right]$$

является слабым дифференциалом функции φ в точке (x_2^0, \dots, x_n^0) .

Лемма доказана.

Следствие. В силу леммы 4, из A -множества N^* , указанного в утверждении леммы 6, можно выделить замкнутое множество F такое, что

$$m_k E_u \{m_v E_u \cdot F > 0\} > 0.$$

Следовательно, в утверждении леммы 6 множество N^* можно считать замкнутым.

§ 4. О дифференцируемом продолжении функций, определенных и слабо дифференцируемых на A -множествах куба

В ходе доказательства основной теоремы нам придется продолжать функции, определенные на A -множествах, принадлежащих кубу C_n , на весь куб с сохранением дифференцируемости. При этом важное значение имеет понятие сильного дифференциала.

Определение 10. Будем говорить, что функция $f(\eta)$, определенная на E , равномерно слабо дифференцируема до порядка m в точках множества $E_1 \subset E$ по множеству E , если она слабо дифференцируема на множестве E_1 по множеству E , причем для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что, коль скоро $|\eta' - \eta''| < \delta$ и $\eta' \in E_1$, а $\eta'' \in E$, то

$$|P(\eta'_0 \eta'') - f(\eta'')| < \varepsilon |\eta' - \eta''|^m.$$

Определение 11. Будем говорить, что дифференциальные полиномы порядка m от некоторой функции $f(\eta)$ согласованы между собой в точках множества E , если, каковы бы ни были точка $\xi_0 \in E$, направление \bar{l} и последовательность точек $\{\xi_s\}$ из множества E , сходящаяся вдоль направления \bar{l} к точке ξ_0 , выполнены следующие соотношения:

$$\lim_{\substack{\partial x_1^{v_1} \dots \partial x_n^{v_n} \\ |\xi_0 - \xi_s|}} \frac{\partial^r P(\xi_s, \xi_s) - \partial^r P(\xi_0, \xi_0)}{\partial x_1^{v_1} \dots \partial x_n^{v_n}} = \frac{\partial^{r+1} P(\xi_0, \xi_0)}{\partial x_1^{v_1+1} \dots \partial x_n^{v_n}},$$

где $v_1 + \dots + v_n = r$ при любой системе декартовых координат x_1, \dots, x_n , в которой положительное направление оси x_1 совпадает с направлением l .

Определение 12. Будем говорить, что функция $f(\eta)$, заданная на множестве E , m раз сильно дифференцируема на множестве E_1 , $E_1 \subset E$, относительно множества E , если она равномерно слабо дифференцируема на множестве E_1 относительно множества E и если ее дифференциальные полиномы порядка m согласованы между собой в точках множества E_1 .

Роль понятия сильной дифференцируемости функций выясняет следующая

ТЕОРЕМА [Уитней⁽⁹⁾]. Если функция $f(\eta)$ определена на замкнутом множестве E , $E \subset R_n$, и m раз сильно дифференцируема на нем, то существует функция $\bar{f}(\eta)$, определенная и m раз дифференцируемая во всех точках R_n , причем в точках множества E дифференциальные полиномы порядка m функций $f(\eta)$ и $\bar{f}(\eta)$ совпадают.

Дальнейшие предложения настоящего параграфа посвящены вопросу выделения замкнутых множеств, на которых функции, обладающие, вообще говоря, слабыми дифференциалами, сильно дифференцируемы. Для решения этого вопроса нам понадобится

ЛЕММА 7. Если функция $f(\eta)$, определенная в кубе C_n , m раз равномерно слабо дифференцируема в точках замкнутого множества $E \subset C_n$ по кубу C_n , то $\bar{f}(\eta)$ m раз сильно дифференцируема на этом множестве.

Доказательство. См. лемму 4 работы автора⁽²⁾.

ЛЕММА 8 [А. С. Кронрод и Е. М. Ландис⁽¹⁾]. Для каждой тройки натуральных чисел n, r, s существует постоянная c_{nrs} такая, что, сколь скоро полином $P(\eta)$ от n переменных без свободного члена степени не выше r имеет при члене степени s коэффициент, модуль которого не меньше α , для любого положительного числа $d, d < 1$, существует точка ξ , для которой $d > |\xi| > \frac{d}{2}$ и $|P(\xi)| > \alpha |\xi|^s c_{nrs}$.

Следствие. Если полиномы P_1 и P_2 степени m от n переменных удовлетворяют условию

$$|P_1(\eta) - P_2(\eta)| \leq \alpha |\eta|^m$$

при всех $|\eta| \leq \rho$, то

$$|P_1(\eta) - P_2(\eta)| < \frac{2n^m}{c_{nm}} |\eta|^m, \quad (13)$$

причем модули коэффициентов полинома $P_1 - P_2$ не превосходят $\frac{2\alpha}{c_{nm}}$ и члены степени ниже m у него отсутствуют.

Доказательство. Сначала докажем, что в полиноме $P_1 - P_2$ нет членов степени, меньшей чем m .

Действительно, пусть существует член степени $r, r < m$, коэффициент которого по модулю равен числу $\beta, \beta > 0$. Тогда, по лемме, в сфериче-

ском слое $\rho \geq d \geq |\xi| \geq \frac{d}{2}$ существует точка ζ , в которой будет выполнено неравенство

$$|P_1(\zeta) - P_2(\zeta)| \geq c_{nmr} |\zeta|^{\gamma\beta}.$$

С другой стороны, в силу условия

$$|P_1(\zeta) - P_2(\zeta)| < \alpha |\zeta|^m,$$

эти неравенства противоречивы для малых d .

Предположим теперь, что модуль хотя бы одного из коэффициентов полинома $P_1 - P_2$ превосходит $\frac{2\alpha}{c_{nmn}}$. По лемме, в сферическом слое

$\rho > |\xi| > \frac{\rho}{2}$ существует точка $|\zeta|$, для которой будут выполнены неравенства

$$\alpha |\zeta|^m > |P_1(\zeta) - P_2(\zeta)| > \frac{2\alpha}{c_{nmn}} c_{nmn} |\zeta|^m,$$

которые также противоречивы.

Итак, коэффициенты полинома $P_1 - P_2$ по модулю не превосходят $\frac{2\alpha}{c_{nmn}}$, причем этот полином не содержит членов степени, меньшей чем m . Отсюда следует неравенство (13), так как число членов степени m во всяком случае не превосходит n^m .

ЛЕММА 9. Если

$$U = \{u_i(x_1, \dots, x_n)\} \quad (1)$$

— m раз слабо дифференцируемое на A -множестве N куба C_n отображение u

$$m_k E_u \{m_v \cdot E_u \cdot N > 0\} > 0, \quad (2)$$

то из N можно выделить замкнутое множество N^* , на котором отображение U m раз сильно дифференцируемо, причем

$$m_k E_u \{m_v \cdot E_u \cdot N^* > 0\} > 0. \quad (3)$$

Доказательство. В силу леммы 7, достаточно выделить из N замкнутое множество N^* , на котором отображение U равномерно слабо дифференцируемо до порядка m и которое бы удовлетворяло условию (3).

Замечание. Так как на множестве N функции u_i $m \geq 1$ раз слабо дифференцируемы, то, какова бы ни была точка $\eta_0 \in N$, найдутся числа $r(\eta_0)$ и $c(\eta_0)$ такие, что

$$|u(\eta) - u(\eta_0)| < c(\eta_0) |\eta - \eta_0|,$$

как только

$$|\eta - \eta_0| < r(\eta_0).$$

Обозначим через $D(s)$ совокупность точек η из N , для каждой из которых $r(\eta) \geq \frac{1}{s}$ и $c(\eta) \leq s$. Легко видеть, что функции u_i , а следовательно, и отображение U непрерывно на каждом из $\overline{D(s)}$ по кубу C_n . Так как $N \subset \sum \overline{D(s)}$, то данное в условии леммы множество N содержится во множестве типа F_σ , на котором отображение U непрерывно.

Поэтому из (2), в силу следствия 1 из леммы 4, вытекает существование замкнутого множества $N' \subset N$ такого, что

$$m_k E \{m_u E_u \cdot N' > 0\} > 0. \quad (4)$$

Приступим теперь к выделению множества N^* .

Пусть $\eta_0 \in N'$. Так как функции u_i m раз слабо дифференцируемы на множестве N , то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\rho(\varepsilon, \eta_0)$ такое, что

$$|u_i(\eta_0) - u_i(\eta)| < \varepsilon |\eta - \eta_0|^m$$

при всех i для $|\eta_0 - \eta| < \rho(\varepsilon, \eta_0)$.

Обозначим через $D(l, \varepsilon, \frac{1}{l})$ множество точек из N' , для которых коэффициенты дифференциальных полиномов порядка m по модулю не превосходят l и $\rho(\varepsilon, \eta) \geq \frac{1}{l}$. Покажем, что

$$D(l, \varepsilon, \frac{1}{l}) \subset D(l + c, c\varepsilon, \frac{1}{l+c}),$$

где

$$c = \frac{4n^m}{c_{nmt}} + 1. \quad (5)$$

Действительно, пусть

$$\{\eta_s\} \quad (6)$$

— последовательность точек из $D(l, \varepsilon, \frac{1}{l})$, сходящихся к точке η_0 . Покажем, что $\eta_0 \in D(l + c, c\varepsilon, \frac{1}{l+c})$. Прежде всего $\eta_0 \in N'$. В каждой точке последовательности (6) существуют свои дифференциальные полиномы $P_i(\eta_s, \eta)$ порядка m с коэффициентами, по модулю не превосходящими l .

Выберем из системы полиномов равномерно сходящиеся в кубе C_n подпоследовательности:

$$P_i(\eta_s, \eta) \rightrightarrows P_i^*(\eta_0, \eta) \quad \text{при } s \rightarrow \infty \quad (i = 1, \dots, k).$$

Очевидно

$$|P_i^*(\eta_0, \eta) - u_i(\eta)| \leq \varepsilon |\eta_0 - \eta|^m \quad (7)$$

для $|\eta_0 - \eta| < \frac{1}{l}$ ($i = 1, \dots, k$).

Коэффициенты предельных полиномов $P_i^*(\eta_0, \eta)$ по модулю не превосходят числа l .

В точке η_0 существуют свои дифференциальные полиномы $P_i(\eta_0, \eta)$. По определению слабого дифференциала,

$$|P_i(\eta_0, \eta) - u_i(\eta)| < \varepsilon |\eta_0 - \eta|^m \quad (8)$$

для $|\eta_0 - \eta| < \rho(\varepsilon, \eta_0)$.

Сравним дифференциальные полиномы $P_i(\eta_0, \eta)$ ($i = 1, \dots, k$) с предельными полиномами $P_i^*(\eta_0, \eta)$.

Для этого сложим неравенства (7) и (8) внутри сферы $|\eta_0 - \eta| < \omega$, где

$$\omega = \min \left[\frac{1}{l}, \rho(\varepsilon, \eta_0) \right].$$

Мы получим:

$$|P_i^* - P_i| < 2(\eta_0 - \eta)^m \cdot \varepsilon.$$

В силу следствия леммы 8, имеем:

$$|P_i^* - P_i| < 2 \cdot 2\varepsilon \frac{n^m}{c_{nmm}} |\eta_0 - \eta|^m \quad (9)$$

для всех η , причем коэффициенты полиномов $P_i(\eta_0, \eta)$ по модулю не превосходят числа

$$l + \frac{4n^m}{c_{nmm}} + 1 = l + c.$$

Сложив, наконец, неравенства (9) и (7) для $|\eta - \eta_0| < \frac{1}{l}$, получим:

$$|P_i(\eta_0, \eta) - u_i(\eta)| < c\varepsilon |\eta - \eta_0|^m.$$

Последние неравенства доказывают соотношение (5).

Отметим, что из определения множества $D(l, \varepsilon, \frac{1}{l})$ следует:

$$\sum \overline{D(l, \varepsilon, \frac{1}{l})} = N',$$

причем

$$D(l', \varepsilon, \frac{1}{l'}) \subseteq D(l'', \varepsilon, \frac{1}{l'') \quad (10)$$

для любых неотрицательных $l' < l''$ при произвольном ε .

Приступим к выделению множества N^* . При этом мы воспользуемся доказанными в § 1, 2 свойствами δ -приближений γ -мерной меры Хаусдорфа.

Из неравенства (4), тождества

$$\lim_{a \rightarrow 0} E_u \{m_v^a E_u \cdot N' > 0\} = E_u \{m_v E_u \cdot N' > 0\}$$

и леммы 2 следует существование числа $a > 0$ такого, что

$$m_k E_u \{m_v^a E_u \cdot N' > a\} > a.$$

Множество N^* будем строить в виде пересечения специальным образом подобранной последовательности множеств

$$\overline{D(l_s, \frac{1}{s}, \frac{1}{l_s})}.$$

Зафиксируем последовательность чисел $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$. Свяжем с ней возрастающую последовательность натуральных чисел l_1, l_2, \dots и выберем l_1 так, чтобы

$$m_k E_u \left\{ m_v^a E_u \overline{D(l_1, 1, \frac{1}{l_1})} > a \right\} > a.$$

Выбор такого множества $\overline{D(l_1, 1, \frac{1}{l_1})}$, в силу леммы 2, возможен, так как из теоремы 1 и соотношения (10) следует:

$$E_u \{m_v^a E_u N' > a\} = \lim_u E_u \left\{ m_v^a E_u \overline{D(l, 1, \frac{1}{l})} > a \right\},$$

причем допредельные множества образуют возрастающую с ростом l последовательность.

Пусть все l_i для $i < s$ определены. l_s определим так, чтобы

$$m_k E_u \left\{ m_v^a E_u \prod_{i \leq s} \overline{D\left(l_i, \frac{1}{i}, \frac{1}{l_i}\right)} > a \right\} > a. \quad (11)$$

Возможность выбора таких чисел l_s следует в силу теоремы 1, леммы 2 и соотношения (10). Введем обозначения. Положим

$$D^{(s)} = \prod_{i \leq s} \overline{D\left(l_i, \frac{1}{i}, \frac{1}{l_i}\right)}, \quad D^{(0)} = \prod_s D^{(s)},$$

$$\mathcal{G}^{(s)} = E \{ m_v^a E_u D^{(s)} \geq a \}, \quad \mathcal{G}^{(0)} = \prod_s \mathcal{G}^{(s)}.$$

Очевидно

$$\mathcal{G}^{(1)} \supseteq \mathcal{G}^{(2)} \supseteq \mathcal{G}^{(3)} \supseteq \dots \text{ и } D^{(1)} \supseteq D^{(2)} \supseteq D^{(3)} \supseteq \dots$$

Каждое из множеств $\mathcal{G}^{(s)}$, а значит и их пересечение, в силу леммы 4, измеримы (больше того, как следует из доказательств леммы 3, все $\mathcal{G}^{(s)}$, а значит и $\mathcal{G}^{(0)}$, замкнуты). Поэтому из (11) следует, что $m_k \mathcal{G}^{(0)} > 0$ и, тем более,

$$m_k \mathcal{G}^{(0)} > 0. \quad (12)$$

Пусть \bar{u} — произвольная точка из $\mathcal{G}^{(0)}$. Тогда $\bar{u} \in \mathcal{G}^{(s)}$ для всех s . Следовательно,

$$m_v^a E_{\bar{u}} \cdot D^{(0)} > a$$

для всех s . Так как множества $D^{(s)}$ замкнуты для всех s , то, в силу леммы 1,

$$m_v^a E_{\bar{u}} \cdot D^{(0)} \geq 0$$

и, тем более,

$$m_v E_{\bar{u}} \cdot D^{(0)} > 0.$$

Сравнивая последние неравенства с (12), заключаем, что

$$m_k E_u \{ m_v E_{\bar{u}} \cdot D^{(0)} > 0 \} > 0,$$

где $D^{(0)}$ — замкнутое подмножество N . Обозначим $D^{(0)}$ через N^* и покажем, что на нем функции u_i равномерно слабо дифференцируемы до порядка m .

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Существует целое s_0 такое, что $c \frac{1}{s_0} < \varepsilon$, где

$$c = \frac{4n^m}{c_{nm}} + 1.$$

Так как

$$N^* \subset \overline{D\left(l_{s_0}, \frac{1}{s_0}, \frac{1}{l_{s_0}}\right)} \subset D\left(l_{s_0} + c, \frac{c}{s_0}, \frac{1}{l_{s_0} + c}\right),$$

то для любой точки $\eta_0 \in N^*$ и $\eta \in C_n$ имеет место неравенство

$$|u_i(\eta) - P_i(\eta_0, \eta)| < |\eta - \eta_0|^m \frac{c}{s_0} < \varepsilon |\eta - \eta_0|^m,$$

если

$$|\eta - \eta_0| < \delta = \frac{1}{l_{s_0} + c}.$$

Следствие. Если отображение U куба C_n в куб C_k и A -множество N удовлетворяют всем условиям предыдущей леммы, то существует t раз дифференцируемое отображение U^* куба C_n в куб C_k , совпадающее вместе со своими дифференциальными полиномами t -го порядка с отображением U в точках замкнутого множества N^* , $N^* \subset N$, причем

$$m_k E_u \{m, E_u N^* > 0\} > 0.$$

Для доказательства нужно применить к данным в условии следствия отображению U и множеству N предыдущую лемму, а затем воспользоваться теоремой Уитнея.

ЛЕММА 10 [А. С. Кронрод и Е. М. Ландис (¹)]. Пусть функция $F(x_1, \dots, x_n)$ определена в кубе C_n и t раз дифференцируема на нем, причем в точке $x_1^0, \dots, x_{n-1}^0, x_n^0$ ее первые r последовательных дифференциалов равны нулю. Пусть, далее, функция $\varphi(x_1, \dots, x_{n-1})$ слабо дифференцируема $t - r$ раз в точке x_1^0, \dots, x_{n-1}^0 и такова, что $\varphi(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0) = x_n^0$. Тогда функция $n - 1$ переменного $F[x_1, \dots, \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})]$ будет t раз слабо дифференцируема в точке x_1^0, \dots, x_{n-1}^0 .

ГЛАВА 2

В этой главе будет изучена связь между степенью гладкости отображения и структурой его типичного уровня.

§ 1. Основная теорема

Настоящий параграф посвящен доказательству основной теоремы, выясняющей закон распределения множества особых точек по уровням дифференцируемого отображения в зависимости от его гладкости.

ТЕОРЕМА 2 (основная). Пусть U — отображение n -мерного куба в k -мерный, задаваемое системой $n - k + 1 - \nu$ дифференцируемых функций

$$u_i(x_1, \dots, x_n), \quad 1 \leq i \leq k. \quad (1)$$

Если Ω — особое множество отображения U , то

$$m_k E_u \{m, E_u \Omega > 0\} = 0.$$

Доказательство. Доказательство будем вести от противного индукцией по числу измерений куба C_n . Для $n = 1$ теорема доказывается в элементарном курсе теории функций действительного переменного непосредственным применением теоремы Витали.

Предположим, что теорема верна для дифференцируемых отображений куба C_m в куб C_k при любом $m < n$, и существует $n - k + 1 - \nu$ раз дифференцируемое отображение куба C_n в куб C_k , для которого утверждение теоремы не верно, т. е.

$$m_k E_u \{m, E_u \Omega > 0\} > 0. \quad (2)$$

Предварительно проведем следующую классификацию точек множеств

ва Ω : ко множеству Ω_1 отнесем те точки из Ω , в каждой из которых один из первых дифференциалов функций (1) отличен от нуля; ко множеству Ω_2 отнесем те точки из $\Omega - \Omega_1$, в каждой из которых по крайней мере один из дифференциалов порядка r , $r \leq n - k + 1 - v$, какой-либо функции системы (1) отличен от нуля; все остальные точки Ω отнесем ко множеству Ω_3 . Как легко видеть, множества Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 являются B -множествами.

Приведем последовательно к противоречию каждое из неравенств

$$m_k E_u \{m_v E_u \cdot \Omega_1 > 0\} > 0, \quad (3)$$

$$m_k E_u \{m_v E_u \cdot \Omega_2 > 0\} > 0, \quad (4)$$

$$m_k E_u \{m_v E_u \cdot \Omega_3 > 0\} > 0, \quad (5)$$

откуда немедленно будет вытекать невозможность неравенства (2), а значит, и справедливость теоремы.

Расчленим доказательство на три пункта. В первых двух пунктах, в которых приводятся к противоречию неравенства (3) и (4), отображение U рассматривается в точках выбранной надлежащим образом $(n-1)$ -мерной гиперповерхности. За такую гиперповерхность в первом пункте мы примем уровень одной из функций, задающих отображение (именно той функции, первый дифференциал которой на Ω_1 отличен от нуля). Во втором пункте за такую гиперповерхность мы примем нулевой уровень последней, равной нулю на Ω_2 производной одной из функций системы (1). Это позволит нам перейти от отображения n -мерного куба в k -мерный к отображению $(n-1)$ -мерного куба в k -мерный с сохранением дифференцируемости. При этом невыполнение утверждения теоремы для исходного отображения приведет к невыполнению утверждения ее и для полученного. Последнее же, в силу предположения индукции, невозможно.

Чтобы завершить доказательство теоремы, достаточно будет показать противоречивость неравенства (5). Это проводится в п. 3° непосредственной оценкой меры множества $E_u \{m_v E_u \cdot \Omega_3 > 0\}$.

1°. Приступим к доказательству противоречивости неравенства (3). Мы имеем:

$$\Omega_1 = \sum \Omega_{ij},$$

где в точках Ω_{ij} производная $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \neq 0$. Так как

$$E_u \{m_v E_u \cdot \Omega_1 > 0\} = \sum_u E_u \{m_v E_u \cdot \Omega_{ij} > 0\},$$

то по крайней мере одно из слагаемых правой части имеет положительную k -мерную меру. Пусть, для определенности,

$$m_k E_u \{m_v E_u \cdot \Omega_{11} > 0\} > 0. \quad (6)$$

Так как Ω_{11} является B -множеством, то, в силу леммы 4, $E_u \{m_v E_u \cdot \Omega_{11} > 0\}$ измеримо. Применяя к этому множеству теорему Фубини, заключаем, что в кубе C_k существует гиперплоскость $H(u_1 = t_0)$ такая, что

$$m_{k-1} H \cdot E_u \{m_v E_u \cdot \Omega_{11} > 0\} > 0.$$

Если обозначить t_0 -уровень функции u_1 через \mathcal{G}_{t_0} , то имеет место равенство:

$$H \cdot E_u \{m_v E_u \cdot \Omega_{11} > 0\} = E \{m_v E_u \cdot \Omega_{11} \cdot \mathcal{G}_{t_0} > 0\},$$

откуда

$$m_{k-1} E_k \{m_v E_u \cdot \Omega_{11} \cdot \mathcal{G}_{t_0} > 0\} > 0. \quad (7)$$

Рассмотрим теперь отображение U только в точках уровня \mathcal{G}_{t_0} .

Так как на $\Omega_{11} \cdot \mathcal{G}_{t_0}$ производная по x_1 функции u_1 отлична от нуля, то, в силу леммы 6, существует функция $\varphi(x_2, \dots, x_n)$ с графиком Γ , $\Gamma \subset \mathcal{G}_{t_0}$, слабо дифференцируемая до $(n-k+1-\nu)$ -го порядка на $\text{пр}_{x_1} \Omega^*$, где Ω^* — замкнутое множество, содержащееся в $\mathcal{G}_{t_0} \cdot \Omega_{11}$, и такое, что

$$m_{k-1} E_u \{m_v E_u \cdot \Omega^* > 0\} > 0. \quad (8)$$

Следовательно, отображение

$$\tilde{U} = \{u_i[\varphi(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n]\} \quad (9)$$

куба $C_{n-1} = \text{пр}_{x_1} C_n$ в куб $C_{k-1} = C_k \cdot H$ слабо дифференцируемо $n-k+1-\nu$ раз на $\text{пр}_{x_1} \Omega^*$.

Заметим, далее, что каждое множество уровня \tilde{E}_u отображения \tilde{U} представляет собой проекцию пересечения соответствующего множества уровня E_u отображения U с графиком Γ в грань $x_1 = 0$ и поэтому, в силу леммы 5, неравенства

$$m_v \tilde{E}_u \text{пр}_{x_1} \Omega^* > 0 \text{ и } m_v E_u \Omega^* > 0$$

выполняются одновременно. Поэтому из (8) следует:

$$m_{k-1} E_u \{m_v \tilde{E}_u \text{пр}_{x_1} \Omega^* > 0\} > 0. \quad (10)$$

Легко видеть, что первые дифференциалы функций (9) линейно зависимы в точках $\text{пр}_{x_1} \Omega^*$.

Этот факт, вместе с соотношением (10), приводит нас к противоречию с предположением индукции, так как, применяя к отображению \tilde{U} и множеству $\text{пр}_{x_1} \Omega^*$ следствие леммы 9, мы придем к $n-k+1-\nu$ раз дифференцируемому отображению U^* куба C_{n-1} в куб C_{k-1} , совпадающему с отображением \tilde{U} в точках Ω^{**} , $\Omega^{**} \subset \text{пр}_{x_1} \Omega^*$, вместе с дифференциальными полиномами порядка $n-k+1-\nu$, причем

$$m_{k-1} E_u \{m_v \tilde{E}_u \Omega^{**} > 0\} > 0,$$

что невозможно, так как Ω^{**} , очевидно, является особым множеством для отображения U^{**} .

Итак, невозможность неравенства (3) доказана.

2°. Приведем теперь к противоречию неравенство (4). Мы имеем:

$$\Omega_2 = \sum_{i, r=\alpha_1+\dots+\alpha_n} \Omega_{i, r, \alpha_1, \dots, \alpha_n},$$

где на множестве $\Omega_{i,r,\alpha_1,\dots,\alpha_n}$ производная

$$\frac{\partial^r u_i}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \neq 0,$$

в то время как все производные более низких порядков функций (1) равны нулю. Поэтому из (4) следует, что одно из множеств

$$E_u \{m_\nu E_u \cdot \Omega_{i,r,\alpha_1,\dots,\alpha_n} > 0\}$$

имеет положительную k -мерную меру. Пусть, например,

$$m_k E_u \{m_\nu E_u \cdot \Omega_{1,r,\alpha_1,\dots,\alpha_n} > 0\} > 0 \quad (11)$$

и $\alpha_1 \geq 1$. Введем функцию

$$\varphi = \frac{\partial^{r-1} u_1}{\partial x_1^{\alpha_1-1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

* Если обозначить ее нулевое множество уровня через \mathcal{C}_0 , то $\Omega_{1,r,\alpha_1,\dots,\alpha_n} \subset \mathcal{C}_0$.

Так как нулевое множество уровня функции φ содержит B -множество $\Omega_{1,r,\alpha_1,\dots,\alpha_n}$, в точках которого $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \neq 0$, причем имеет место неравенство (11), то, применяя к отображению U , B -множеству $\Omega_{1,r,\alpha_1,\dots,\alpha_n}$ и функции φ лемму 6 о неявной функции, заключаем, что существуют B -функция $\psi(x_2, \dots, x_n)$ с графиком Γ , $\Gamma \subset \mathcal{C}_0$, и замкнутое множество Ω^* , $\Omega^* \subset \Omega_{1,r,\alpha_1,\dots,\alpha_n}$, такие, что

$$m_k E_u \{m_\nu E_u \cdot \Omega^* > 0\} > 0, \quad (12)$$

причем функция $\psi(x_2, \dots, x_n)$ на множестве $\text{пр}_{x_1} \Omega^*$ слабо дифференцируема до порядка $n - k + 1 - \nu - (r - 1)$.

Тогда отображение

$$\tilde{U} = \{u_i [\psi(x_2, \dots, x_n) x_2, \dots, x_n]\}, \quad (13)$$

в силу леммы 10, $n - k + 1 - \nu$ раз слабо дифференцируемо на $\text{пр}_{x_1} \Omega^*$, причем дифференциалы $(r - 1)$ -го $(r - 1 \neq 0)$ порядка функций (13) в точках $\text{пр}_{x_1} \Omega^*$ равны нулю.

Заметим, далее, что каждое множество уровня \tilde{E}_u отображения \tilde{U} представляет собой проекцию пересечения $\Gamma \cdot E_u$ в грань $x_1 = 0$. Следовательно, в силу леммы 5, неравенства

$$m_\nu E_u \cdot \Omega^* > 0 \text{ и } m_\nu \tilde{E}_u \cdot \text{пр}_{x_1} \Omega^* > 0$$

выполняются одновременно. Поэтому из (13) следует:

$$m_k E_u \{m_\nu \tilde{E}_u \cdot \text{пр}_{x_1} \Omega^* > 0\} > 0. \quad (14)$$

Последнее соотношение ведет к противоречию, так как, применяя к отображению \tilde{U} следствие леммы 9, мы приходим к $n - k + 1 - \nu$ раз дифференцируемому отображению U^* куба C_{n-1} в куб C_k , совпадающему с \tilde{U} в точках множества $\Omega^{**} \subset \text{пр}_{x_1} \Omega^*$ вместе с дифференциалами порядка $n - k + 1 - \nu$, причем

$$m_k E_u \{m_\nu \tilde{E}_u \cdot \Omega^{**} > 0\} > 0,$$

что невозможно, так как Ω^{**} является особым множеством для отображения U^* .

Противоречивость неравенства (4) доказана.

3°. Покажем, наконец, что неравенство

$$m_k E_u \{m_v E_u \cdot \Omega_3 > 0\} > 0$$

невозможно.

Доказательство проведем от противного непосредственной оценкой меры специальным образом выделенных подмножеств множества $E_u \{m_v E_u \cdot \Omega_3 > 0\}$.

Пусть

$$m_k E_u \{m_v E_u \cdot \Omega_3 > 0\} = 2d, \quad d > 0.$$

$E_u \{m_v E_u \cdot \Omega_3 > 0\}$ есть предел возрастающей последовательности множеств $E_u \left\{m_v E_u \cdot \Omega_3 > \frac{1}{s}\right\}$. В силу леммы 2, найдется p такое, что

$$m_k E_u \left\{m_v E_u \cdot \Omega_3 > \frac{1}{p}\right\} > d.$$

Рассмотрим точку $\eta \in \Omega_3$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\rho(\varepsilon, \eta)$ такое, что диаметр образа любого куба с ребром r , содержащего точку η , не превосходит $\varepsilon \cdot r^{n-k+1-\nu}$, как только $r < \rho(\varepsilon, \eta)$. Совокупность точек η из множества Ω_3 , для каждой из которых $\rho(\varepsilon, \eta) \geq r$, обозначим через $\Omega_{r\varepsilon}$. Из определения $\Omega_{r\varepsilon}$ следует, что

$$\Omega_3 = \lim_{r \rightarrow 0} \Omega_{r\varepsilon},$$

причем допредельные множества образуют возрастающую последовательность. Следовательно, в силу леммы 2,

$$E_u \left\{m_v E_u \cdot \Omega_3 > \frac{1}{p}\right\} = \lim_{r \rightarrow 0} E_u \left\{m_v E_u \cdot \Omega_{r\varepsilon} > \frac{1}{p}\right\}.$$

Отсюда, в силу леммы 2 и определения δ приближений меры Хаусдорфа, вытекает существование такого положительного числа r_0 , что

$$m_k E_u \left\{m_v^r E_u \cdot \Omega_{r\varepsilon} > \frac{1}{p}\right\} > d$$

для любого r , $r \leq r_0$.

Во всех приведенных рассуждениях числа p и d от ε не зависят.

Зафиксируем числа r_0 , p , d и рассмотрим подразделение A куба C на n^m равных кубов, где m выбирается из условия $\frac{\sqrt[n]{n}}{m} < r_0$.

Обозначим множество $E_u \left\{m_v^r E_u \cdot \Omega_{r\varepsilon} > \frac{1}{p}\right\}$ через \mathcal{G} . Пусть $u \in \mathcal{G}$. Оценим снизу число кубов подразделения A , каждый из которых содержит, по крайней мере, по одной точке из множества $E_u \cdot \Omega_{r\varepsilon}$. Пусть кубы π_1, \dots, π_x из A образуют покрытие множества $E_u \cdot \Omega_{r\varepsilon}$. Так как диаметры кубов этого покрытия не превосходят r_0 и

$$m_v^r E_u \cdot \Omega_{r\varepsilon} > \frac{1}{p},$$

то

$$x \cdot \frac{1}{m^v} > \frac{1}{p}.$$

Отсюда следует, что

$$x > \frac{m^v}{p}. \quad (15)$$

Если обозначить систему кубов, содержащую множество $E_u \cdot \Omega_{r_\varepsilon}$, через S_u , то, очевидно, диаметр множества $u(S_u)$ не превосходит

$$\frac{2\varepsilon}{m^{n-k+1-v}}. \quad (16)$$

Каждой точке $u \in \mathcal{G}$ отнесем систему кубов S_u , содержащую множество $E_u \cdot \Omega_{r_\varepsilon}$. Две системы кубов $S_{u'}$ и $S_{u''}$ мы будем называть пересекающимися, если они содержат по крайней мере один общий куб подразделения A . Возьмем произвольную систему кубов S_{u_1} и присоединим к ней кубы всех пересекающихся с ней систем. Полученное семейство кубов обозначим через H_{u_1} . Возьмем, далее, систему S_{u_2} , не пересекающуюся с S_{u_1} . Выделим соответствующее этой системе семейство H_{u_2} , состоящее из кубов, принадлежащих всем системам, пересекающимся с S_{u_2} , и т. д. В результате получим семейства

$$H_{u_1}, H_{u_2}, \dots, H_{u_l}.$$

Так как каждое из построенных семейств H_{u_s} содержит по соответствующей ему системе кубов S_{u_s} , причем системы, соответствующие разным u_s , не пересекаются, то различных семейств существует не больше, чем непересекающихся систем.

В силу (15), каждая система S_{u_s} содержит не менее чем $\frac{m^v}{p}$ кубов. Следовательно, из кубов подразделения A можно выделить не более чем $m^n : \frac{m^v}{p} = m^{n-v} \cdot p$ различных семейств.

Оценим диаметр множества $U(H_{u_s})$. Пусть u' и $u'' \in U(H_{u_s})$. Тогда найдутся две системы кубов, S_{u^*} и $S_{u^{**}}$, пересекающиеся с системой S_{u_s} , соответствующей семейству H_{u_s} , и такие, что $u(S_{u^*}) \ni u'$, а $u(S_{u^{**}}) \ni u''$. В силу неравенства (16), имеем:

$$\begin{aligned} |u' - u^*| &< \frac{2\varepsilon}{m^{n-k+1-v}}, \\ |u'' - u^{**}| &< \frac{2\varepsilon}{m^{n-k+1-v}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Раз системы S_{u^*} и S_{u_s} пересекаются, то отсюда следует, что в одном из кубов подразделения A содержатся как точки множества $E_{u_s} \cdot \Omega_{r_\varepsilon}$, так и точки множества $E_{u^*} \cdot \Omega_{r_\varepsilon}$. Следовательно, в силу определения Ω_{r_ε} , получим:

$$|u^* - u_s| < \frac{\varepsilon}{m^{n-k+1-v}} \quad (18)$$

и, аналогично,

$$|u^{**} - u_s| < \frac{\varepsilon}{m^{n-k+1-v}}.$$

Сложив неравенства (17) и (18), найдем:

$$|u' - u''| < \frac{6\varepsilon}{m^{n-k+1-\nu}}.$$

Следовательно, диаметр множества $U(H_{u_s})$ не превосходит числа $\frac{6\varepsilon}{m^{n-k+1-\nu}}$ и, значит,

$$m_k U(H_{u_s}) < \frac{6^k \varepsilon^k}{m^{k(n-k-1-\nu)}}.$$

По ранее доказанному, различных семейств существует не больше, чем $m^{n-\nu} \cdot p$. Поэтому

$$m_k U(\sum_s H_{u_s}) < p \frac{6^k m^{n-\nu} \cdot \varepsilon^k}{m^{(n-k+1-\nu)k}} \leq \varepsilon \cdot p \cdot 6^k.$$

Но множество

$$E_u \left\{ m_v^r \cdot E_u \cdot \Omega_{r_s} \varepsilon > \frac{1}{p} \right\}$$

содержится во множестве $U(\sum_s H_{u_s})$; следовательно,

$$d < m_k E_u \left\{ m_v^r \cdot E_u \cdot \Omega_{r_s} \varepsilon > \frac{1}{p} \right\} \leq \varepsilon \cdot p \cdot 6^k.$$

В силу произвольности ε , последнее неравенство невозможно. Таким образом,

$$m_k E_u \{ m_v E_u \cdot \Omega_3 > 0 \} = 0.$$

Теорема доказана.

§ 2. Пример, показывающий невозможность ослабления предпосылок теоремы

В этом параграфе для заданных натуральных чисел n , k и ν , $n - k - \nu \geq 1$, будет построено $n - k - \nu$ раз дифференцируемое отображение U куба C_n в куб C_k такое, что

$$E_u \{ m_v E_u \cdot \Omega_n > 0 \} = C_k,$$

где Ω — особое множество отображения U .

При построении примера мы воспользуемся известным примером Д. Е. Меньшова, показывающим, что при любом натуральном m существует $m - 1$ раз дифференцируемая функция m переменных, содержащая на каждом своем уровне нули дифференциала.

Так как пример такой функции представляет собой и самостоятельный интерес, то ниже мы приведем ее конструкцию.

1°. Пример $m - 1$ раз дифференцируемой функции m переменных, содержащей нули дифференциала на каждом своем уровне. Нужную функцию будем строить следующим образом:

В кубе C_m проведем жорданову кривую L , содержащую совершенное, всюду разрывное множество положительного m -мерного объема. Обозначим начальную точку этой кривой буквой O . Введем функцию точки кривой L , положив для $\eta \in L$

$$\Phi_m(\eta) = m \check{O}\eta,$$

где $\check{O}\eta$ — отрезок кривой L , заключенный между точками O и η . При надлежащем выборе кривой L функция $\Phi_m(\eta)$ будет $m-1$ раз сильно дифференцируема в точках множества P , причем все ее дифференциалы до $(m-1)$ -го порядка в точках множества P равны нулю. Распространив, согласно теореме Уитнея, функцию $\Phi_m(\eta)$ с сохранением дифференцируемости на весь куб C_m , мы получим нужную функцию.

Предварительные замечания. Пусть $\pi = \{ |x_i - \bar{x}_i| \leq \frac{a}{2} \}$ — m -мерный куб с центром в точке $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$. Совокупность точек куба π , у которых i -я координата x_i удовлетворяет неравенству $|x_i - \bar{x}_i| < \frac{a}{2}$, мы будем называть полосой ширины a . Всего в кубе π содержится m различных полос данной ширины. m -мерный объем каждой полосы, очевидно, равен $a \cdot d^{m-1}$. Если удалить из куба все m полос ширины a , то в результате образуется 2^m m -мерных кубов с ребрами, равными $\frac{d-a}{2}$. Обозначим полученную систему кубов буквой A .

Интервалы, содержащиеся в удаленных полосах куба π и соединяющие вершины различных кубов системы A , называются *соединительными интервалами*.

Пусть π' и π'' — два произвольных куба рассматриваемой системы A . Покажем, что, присоединяя к системе A соответствующим образом выбранные соединительные интервалы, можно получить континуум S , обладающий следующими свойствами:

- 1) к кубам π' и π'' примыкает только по одному соединительному интервалу;
- 2) ко всем остальным кубам системы A примыкает по два соединительных интервала;
- 3) соединительные интервалы попарно не пересекаются и не имеют общих концов.

Континуум S , обладающий перечисленными свойствами, мы будем называть *цепочкой*.

Покажем, что из возможности проведения цепочек в кубах C_l размерности $l < m$ следует возможность их проведения в кубах размерности m .

Действительно, пусть кубы π' и π'' содержатся в системе A . Граница куба π содержит две параллельные грани H' и H'' , $\pi' \subset H'$, $\pi'' \subset H''$. Система A распадается на две подсистемы A' и A'' по 2^{m-1} кубов в каждой, A' состоит из кубов, пересекающихся с H' , а A'' состоит из кубов, пересекающихся с H'' . Выделим два куба: $\pi^* \in A'$, $\pi^{**} \in A''$, так, чтобы $\pi^* \neq \pi'$, а $\pi^{**} \neq \pi''$. В грани H' проведем цепочку через грани кубов A' с концами в $(m-1)$ -мерных кубах $\pi' \cdot H'$ и $\pi^* H'$. Аналогично, в грани H'' проведем цепочку через грани кубов A'' с концами в $(m-1)$ -мерных кубах $\pi'' \cdot H''$ и $\pi^{**} H''$.

Приведенные рассуждения показывают, что системы A' и A'' могут быть дополнены до цепочек S' и S'' , концами которых служат, соответственно, кубы π' и π^* , π'' и π^{**} . Соединив две из оставшихся свободными вершины кубов π^* и π^{**} соединительным интервалом, мы получим цепочку S с концами π' и π'' .

Так как при $m = 1$ построение цепочки всегда возможно, то приведенные рассуждения доказывают возможность ее проведения в кубах любой размерности.

Построение кривой L и совершенного множества P мы будем осуществлять при помощи счетной последовательности операций O_1, O_2, \dots .

Операция O_1 состоит в том, что мы удаляем из единичного куба C_m все m полос ширины a , где $a < 1$, и дополняем оставшиеся кубы до цепочки, началом которой служит куб, содержащий вершину с координатами $(0, 0, 0, \dots, 0)$, а концом — куб, содержащий вершину с координатами $(1, 1, \dots, 1)$. Полученную цепочку обозначим через L_1 .

Операция O_2 состоит в том, что мы проводим в каждом кубе цепочки L_1 операцию O_1 ; причем удаляются полосы ширины $\frac{a}{l}$, где $l > 2$, а соединительные интервалы проводятся так, чтобы все полученные кубы были связаны в цепочку. Полученную цепочку обозначим через L_2 .

Вообще, пусть при помощи операции O_s выделена цепочка L_s . Тогда операция O_{s+1} будет состоять в проведении операции O_1 в каждом из кубов цепочки L_s с удалением в этих кубах полос ширины $\frac{a}{l^s}$ и соединении полученных кубов в цепочку, которую мы будем обозначать через L_{s+1} .

Продолжив указанный процесс неограниченно, мы получим последовательность цепочек $L_1 \supset L_2 \supset \dots$. Их пересечение будет жордановой кривой с концами в точках $(0, 0, 0, \dots, 0)$ и $(1, 1, 1, \dots, 1)$. Обозначим эту кривую через L . Кривая будет иметь положительный m -мерный объем, если сумма мер удаленных полос не превосходит 1.

Операция O_1 удаляет из куба C_m множество, m -мерная мера которого меньше $m \cdot a$.

Операция O_2 удаляет из цепочки L_1 множество, m -мерная мера которого меньше $2m \frac{a}{l}$.

И, вообще, операция O_{s+1} удаляет из цепочки L_s множество, m -мерная мера которого меньше $2^s \frac{a}{l^s} \cdot m$. Следовательно,

$$m_m L > 1 - \left(m \cdot a + m a \frac{2}{l} + m a \left(\frac{2}{l} \right)^2 + \dots \right) = 1 - \frac{ma}{1 - \frac{2}{l}}.$$

Значит, если a и l таковы, что

$$1 > \frac{ma}{1 - \frac{2}{l}}, \quad (1)$$

то кривая L имеет положительную меру.

Сумму всех соединительных интервалов кривой L обозначим через G .

Так как $mG = 0$, то

$$m_m(L - G) = m_m L.$$

Определим на L функцию $\Phi_m(\eta)$, положив для $\eta \in L$

$$\Phi_m(\eta) = m_m \check{O} \eta,$$

где $\check{O}\eta$ — дуга кривой L с концами O и η .

Найдем, при каких значениях параметров a и l функция $\Phi_m(\eta)$ будет $m-1$ раз сильно дифференцируема на множестве $P = L - G$.

Пусть η и $\eta' \in P$. Рассмотрим последнюю цепочку L_s , один из кубов которой содержит как η , так и η' . Этот куб содержит $\widetilde{\eta\eta'}$. Следовательно,

$$|\Phi_m(\eta) - \Phi_m(\eta')| < \frac{1}{2^m s}. \quad (2)$$

После проведения операции O_{s+1} точки η и η' попадут в разные кубы цепочки L_{s+1} . Значит $|\eta - \eta'|$ не меньше, чем ширина удаляемой при операции O_{s+1} полосы, т. е.

$$|\eta - \eta'| > \frac{a}{l^s}. \quad (3)$$

Сравнивая (2) и (3), получаем:

$$\begin{aligned} |\Phi_m(\eta) - \Phi_m(\eta')| &< \frac{1}{2^m s} \left(\frac{l^s}{a} \right)^{m-1} \left(\frac{a}{l^s} \right)^{m-1} < \\ &< \frac{1}{a^{m-1}} \left(\frac{l^{m-1}}{2^m} \right)^s |\eta - \eta'|^{m-1}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что отношение

$$\frac{\Phi_m(\eta) - \Phi_m(\eta')}{|\eta - \eta'|^{m-1}}$$

стремится к нулю при $|\eta - \eta'| \rightarrow 0$, если $\frac{l^{m-1}}{2^m} < 1$. Но, по условию, $l > 2$. Следовательно, параметр l должен удовлетворять неравенству:

$$2 < l < 2^{\frac{m}{m-1}}.$$

Подобрав l , удовлетворяющее последнему неравенству, из условия (1), находим a :

$$a = \frac{l-2}{lm}.$$

Определенная такими значениями a и l функция $\Phi_m(\eta)$, как легко видеть, $m-1$ раз сильно дифференцируема на P , причем ее дифференциальные полиномы $(m-1)$ -го порядка на P обращаются в нуль.

Так как $\Phi_m(\eta)$ принимает на P все промежуточные значения между нулем и $m_m L$, то, используя теорему Уитнея, мы можем распространять функцию $\Phi_m(\eta)$ $m-1$ раз дифференцируемым образом на весь куб C_m , получив в результате искомую функцию.

ТЕОРЕМА 3. Пусть U — отображение n -мерного куба C_n в k -мерный куб C_k , задаваемое системой $n - k + 1$ раз дифференцируемых функций $u_i(x_1, \dots, x_n)$. Если Ω — особое множество отображения U , то $m_k U(\Omega) = 0$.

Доказательство. В силу основной теоремы, 0-мерная мера (число особых точек) множества особых точек, содержащихся на типичном уровне $n - k + 1$ раз дифференцируемого отображения C_n в C_k , равна нулю, а это и доказывает теорему.

Замечание. Пусть U — m ($m > 1$) раз дифференцируемое отображение C_n в C_k . Пусть, далее, в точках множества уровня E_u , $u \in C_k$, матрица Якоби отображения U не вырождается. Тогда множество уровня E_u состоит из конечного числа m раз дифференцируемых $(n - k)$ -мерных многообразий без края, не выходящих на границу куба C_n , и некоторого множества компонент, выходящих на границу куба C_n .

Доказательство. Предположим противное. Пусть множество уровня E_u содержит бесконечное множество компонент, не выходящих на границу куба C_n .

Распространим отображение U m раз дифференцируемым образом на все R_n . Компоненты множества уровня E_u , содержащиеся внутри куба C_n , останутся при этом без изменения. В силу компактности куба C_n , в нем найдется точка η_0 , в любой окрестности которой содержатся точки бесконечного числа компонент рассматриваемого множества уровня. Последнее, однако, невозможно, так как точка η_0 , будучи предельной для E_u , ему и принадлежит и, следовательно, матрица Якоби в точке η_0 не вырождается.

ТЕОРЕМА 4. Пусть U — $n - k + 1$ раз дифференцируемое отображение n -мерного куба C_n в k -мерный куб C_k . Тогда типичное множество уровня его состоит из конечного числа компонент, являющихся $n - k + 1$ раз дифференцируемыми многообразиями. Компоненты, не выходящие на границу C_n , представляют собой $n - k$ -мерные многообразия без края.

Доказательство. Покажем прежде всего, что при $n = k$ почти для всех точек u , $u \in C_k$, множество E_u состоит из конечного числа точек.

Действительно, пусть для некоторой точки u множество E не содержит особых точек отображения u , в то время как E_u бесконечно. Выберем сходящуюся вдоль некоторого направления l последовательность точек η_s из E_u . Пусть $\eta_s \rightarrow \eta_0$. Тогда $\eta_0 \in E_u$. Очевидно, $\frac{\partial u_i}{\partial l} = 0$ для любого i , т. е.

$$\nu_1 \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + \dots + \nu_n \frac{\partial u_i}{\partial x_n} = 0, \quad (1)$$

где ν_1, \dots, ν_n — направляющие косинусы направления l . В силу (1), матрица Якоби в точке η_0 вырождается. Полученное противоречие и доказывает нашу теорему.

Покажем теперь в общем случае, что для почти всех $u \in C_k$ множество уровня E_u состоит из конечного числа компонент. Доказывать будем методом индукции по числу n .

Пусть первым значением n , для которого теорема не верна, является n_0 , т. е. существует $n_0 - k + 1$ раз дифференцируемое отображение C_{n_0} ,

в C_k , для которого $m_k \mathcal{G} > 0$, где \mathcal{G} состоит из точек C_k , для каждой из которых множество уровня E_u состоит из бесконечного множества компонент. В силу теоремы 3, можно считать, что множества уровня E_u для точек u из \mathcal{G} не содержат особых точек отображения U .

Пусть $u \in \mathcal{G}$. Так как $n - k + 1 > 1$ и множество уровня E_u не содержит особых точек отображения U , то, в силу приведенного выше замечания, E_u состоит из конечного числа компонент, не выходящих на границу C_{n_0} , и бесконечного множества компонент, пересекающихся с границей C_n . Так как вся граница куба C_{n_0} состоит из $2n_0$ граней, то по крайней мере одна из них, C_{n_0-1} , содержит точки бесконечного множества компонент каждого множества уровня E_u , где $u \in \mathcal{G}^*$ и $m_k \mathcal{G}^* > 0$. Рассматривая наше отображение только в точках $(n_0 - 1)$ -мерного куба C_{n_0-1} , получим противоречие с предположением индукции.

Теорема доказана.

Как следует из примера, приведенного в § 2 гл. 2, предпосылки теорем 3 и 4 не могут быть ослаблены.

Приведем ряд теорем, характеризующих топологическую структуру типичного множества уровня дифференцируемого отображения.

ТЕОРЕМА 5. *Типичное множество уровня $n - k$ раз дифференцируемого отображения n -мерного куба C_n в k -мерный куб C_k состоит из локально связанных компонент.*

Прежде чем доказывать теорему, сделаем одно предварительное замечание.

Как известно, точка η , принадлежащая континууму L , является точкой локальной несвязности, если существует последовательность точек η_1, η_2, \dots из L такая, что $\eta_s \rightarrow \eta$, в то время как нижняя грань диаметров связанных подмножеств L , содержащих точки η и η_s , превосходит некоторое фиксированное число δ [см. (7)].

Покажем, что пересечение границы каждой окрестности O_η точки η диаметра, меньшего $\frac{\delta}{3}$, с континуумом L состоит из бесконечного множества компонент. Действительно, обозначим через L^s компоненту множества $L \cdot O_\eta$, содержащую η_s ; L^1 содержит точку η_1 . Так как L^1 не содержит точки η , то найдется точка η_{k_1} , не принадлежащая L , и, следовательно,

$$L^{k_1} \cdot L^1 = 0.$$

Так как η не принадлежит континууму L^{k_1} , то найдется точка η_{k_2} , не принадлежащая ни L' , ни L^{k_1} . Обозначим континуум, содержащий η_{k_2} , через L^{k_2} . Тогда

$$L^1 \cdot L^{k_2} = L^{k_1} \cdot L^{k_2} = 0.$$

Продолжая указанный процесс неограниченно, получим бесконечное множество компонент $\bar{O}_\eta \cdot L$ без общих точек. Так как каждая из этих компонент имеет непустое пересечение с $\bar{O}_\eta - O_\eta$ (в силу теоремы Янишевского (7)), то утверждение доказано.

Доказательство теоремы. Доказательство будем проводить от противного. Пусть при отображении n -мерного куба C_n в k -мерный

Доказательство. Для доказательства заметим, что из равенства $m_\nu A = 0$ следует $\dim A \leq \nu - 1$.

Так как, в силу основной теоремы,

$$m_k E_u \{m_\nu \Gamma_u > 0\} = 0,$$

то и

$$m_k E_u \{\dim \Gamma_u > \nu - 1\} = 0.$$

Последнее равенство доказывает теорему. Как показывает пример, приведенный в § 2 гл. 2, эта теорема также не может быть усилена.

Из топологии известно [см. (8)], что если U есть непрерывное отображение n -мерного куба C_n в k -мерный куб C_k , то множество $E_u \{\dim E_u \geq n - k\}$ всюду плотно на образе куба C_n . Никаких ограничений сверху на размерность множеств уровня непрерывного отображения не существует.

Действительно, пусть $F(x_1, \dots, x_n)$ — произвольная непрерывная функция n переменных, отличная от константы. Покажем, что все ее множества уровня, исключая не более двух, имеют размерность, не меньшую $n - 1$.

Предположим противное. Пусть множества уровня $E_{t'}$, $E_{t''}$ и $E_{t'''}$ имеют размерность, меньшую $n - 1$. Положим $t' < t'' < t'''$. Пусть $\gamma' \in E_{t'}$, а $\gamma''' \in E_{t'''}$. Тогда любой континуум, содержащий эти точки, пересекается с $E_{t''}$, так как непрерывная функция на связном замкнутом множестве принимает все промежуточные значения. Следовательно, множество $E_{t''}$ разделяет точки γ' и γ''' . Это ведет к противоречию, так как замкнутое множество размерности, меньшей $n - 1$, не может разделять куба C_n . Значит, все уровни любой непрерывной функции, исключая не более двух, имеют размерность, не меньшую $n - 1$.

Пусть Δ — отрезок значений, принимаемых функцией F на кубе C_n . Определим на нем k непрерывных функций, задающих кривую Пеано, проходящую через все точки куба C_k . Функции

$$u_1[F(\gamma)]^2, u_2[F(\gamma)], \dots, u_k[F(\gamma)]$$

и задают нам нужное отображение.

Для дифференцируемых отображений имеет место более жесткая характеристика размерности типичного множества уровня.

ТЕОРЕМА 7. Типичное множество уровня дифференцируемого отображения C_n в C_k имеет размерность, не превосходящую $n - k$.

Доказательство. Доказательство проведем от противного индукцией по числу измерений куба C . При $n = k$ и, в частности, при $n = 1$ утверждение теоремы выполняется в силу теоремы 4.

Пусть первое значение n , при котором теорема не верна, есть n_0 . Это значит, что существует дифференцируемое отображение n_0 -мерного куба C_{n_0} в k -мерный куб C_k такое, что

$$m_k E_u \{\dim E_u > n_0 - k\} > 0.$$

Обозначим множество $E \{ \dim E_u > n_0 - k \}$ через \mathcal{E} и рассмотрим множество уровня $E_{\bar{u}}$, $\bar{u} \in \mathcal{E}$. Так как

$$\dim E_{\bar{u}} > n_0 - k,$$

то найдется точка $\eta \in E_{\bar{u}}$, в которой множество $E_{\bar{u}}$ имеет размерность, большую $n_0 - k$. Точку η можно заключить в открытый куб π с рациональными координатами такой, что

$$\dim E_{\bar{u}}(\bar{\pi} - \pi) > n_0 - k - 1.$$

Граница куба π состоит из $2n_0$ граней. Следовательно, можно выделить одну из них, например π' , которая обладает тем свойством, что

$$\dim \pi' \cdot E_{\bar{u}} > n_0 - k - 1.$$

Будем говорить, что грань π' соответствует точке \bar{u} . Проведем аналогичное построение для каждой точки множества \mathcal{E} . Так как при этом выделится лишь счетное множество граней, то среди них найдется по крайней мере одна грань π^* , которая соответствует всем точкам u , $u \in \mathcal{E}^*$, и $m_k \mathcal{E}^* > 0$.

Рассмотрим исходное отображение только в точках $(n-1)$ -мерного куба π^* . Если обозначить множество уровня полученного отображения через E_u^* , то

$$E \{ \dim E_u^* > n_0 - k - 1 \} \supset \mathcal{E}^*.$$

Следовательно,

$$m_k E \{ \dim E_u^* > (n_0 - 1) - k \} > 0,$$

что противоречит предположению индукции.

Теорема доказана.

§ 4. О множествах уровня функций многих переменных

Применим построенную нами теорию для исследования типичных множеств уровня дифференцируемых функций многих переменных.

Так как действительную функцию многих переменных, определенную в C_n , можно рассматривать как отображение n -мерного куба в одномерный, то, полагая в соответствующих предположениях предыдущих разделов $k = 1$, получим следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 8. *ν -мерная мера множества особых точек, расположенных на типичном множестве уровня $n - \nu$ раз дифференцируемой функции n переменных, равна нулю.*

Полагая в примере, приведенном в § 2 гл. 2, $k = 1$, можно получить $n - \nu - 1$ раз дифференцируемую функцию n переменных, содержащую на каждом своем уровне множество особых точек положительной ν -мерной меры. Так как все множества уровня дифференцируемой функции n переменных имеют размерность $n - 1$ (исключая, быть может, счетное число их), то из теоремы 8 вытекает, что почти во всех точках (в смысле $(n - 1)$ -мерной меры) типичного множества уровня дифференциал ее от-

личен от нуля. Для $n = 2$ теорема 8 доказана в работе А. С. Кронрода⁽³⁾.

ТЕОРЕМА 9. *Размерность множества особых точек $n - \nu$ раз дифференцируемой функции n переменных, расположенных на ее типичном множестве уровня, не превосходит $\nu - 1$.*

Следующие предложения, принадлежащие А. С. Кронроду и Е. М. Ландису [см. (1)], получаются при $k = 1$ из теорем 3, 4 и 5.

ТЕОРЕМА 10. *Множество значений, принимаемых n раз дифференцируемой функцией n переменных на множестве нулей ее дифференциала, имеет линейную меру нуль.*

ТЕОРЕМА 11. *Типичное множество уровня $n - 1$ раз дифференцируемой функции n переменных состоит из конечного числа компонент, являющихся n раз дифференцируемыми многообразиями. Компоненты, не выходящие на границу куба C_n , представляют собой $(n - 1)$ -мерные замкнутые многообразия без края.*

(При $n = 1$ компоненты вырождаются в точки.)

ТЕОРЕМА 12. *Типичное множество уровня $n - 1$ раз дифференцируемой функции n переменных состоит из локально связных компонент.*

Поступило
7. V. 1956

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Кронрод А. С. и Ландис Е. М., О множествах уровня функций многих переменных, Доклады Ак. наук СССР, 58 (1947), 1269—1272.
- ² Дубовицкий А. Я., О дифференцируемых отображениях n -мерного куба в k -мерный куб, Матем., сборн., 32(74): 2 (1953), 443—464.
- ³ Кронрод А. С., О функциях двух переменных, Успехи матем. наук, т. V, вып. 1 (35) (1950), 24—134.
- ⁴ Минлос Р. А., Плоская вариация функций двух переменных и цилиндрическая мера множеств в трехмерном пространстве, Доклады Ак. наук СССР, 81 (1951), 733—736.
- ⁵ Besicovitch A. S., On approximation in measure to Borel sets by F_σ sets, London Math. Soc. 29, № 3, (1954), 382—383.
- ⁶ Сакс С., Теория интеграла, М., 1949.
- ⁷ Хаусдорф Ф., Теория множеств, М.—Л., 1937.
- ⁸ Гуревич В. и Волмен Г., Теория размерности, М., 1948.
- ⁹ Whitney H., Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets, Trans. Amer. Math. Soc., 36 (1934), 63—89.

С. И. ЗУХОВИЦКИЙ

О МИНИМАЛЬНЫХ РАСШИРЕНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым)

В работе устанавливаются общие свойства всех минимальных расширений линейных функционалов в пространствах непрерывных функций как действительных, так и комплексных. Даются необходимые и достаточные условия существования максимального элемента у линейного функционала в этих пространствах.

§ 1. Введение

Пусть E — линейное нормированное пространство и G — некоторое его подпространство. По теореме Хана — Банаха [см. (1)], каждый линейный функционал $\varphi(x)$, определенный в G , может быть расширен на все пространство E без увеличения нормы. Такой линейный функционал $f(x)$, определенный в пространстве E , являющийся расширением на E линейного функционала $\varphi(x)$ с сохранением его нормы, будем называть минимальным расширением линейного функционала $\varphi(x)$. В работе (2) [см. также (3)] нами обнаружен один специальный вид минимального расширения в конечномерном пространстве, в $C(a, b)$ и в c , имеющий значение в теории чебышевских приближений. Изучению строения всех минимальных расширений для пространств комплексных числовых последовательностей l_p ($p \geq 1$) и c посвящена работа В. В. Рогозинского (4). В работе (5) тот же автор рассматривает эту задачу для пространства L_p ($p \geq 1$), но следует отметить, что случай L_1 , в основном, был изучен ранее М. Г. Крейном [см. (6), стр. 189—190]. В работах автора (7) и (8) приведены без доказательства теоремы о строении всех минимальных расширений для случая пространства $C(a, b)$ действительных непрерывных на сегменте $[a, b]$ функций*.

В предлагаемой работе, кроме доказательства и дальнейшего развития теорем из работ (7) и (8), мы рассматриваем эту задачу в пространстве комплексных, непрерывных на $[a, b]$ функций и в пространстве $C(Q)$ функций, непрерывных на некотором компакте Q .

* После того как статья была сдана в печать, нам стала известна работа В. Рогозинского [см. (11)], в которой рассмотрена та же задача для случая комплексного и действительного пространства $C(a, b)$. Однако наш метод отличается от метода Рогозинского. (Примеч. при корректуре.)

§ 2. Случай комплексного пространства $C(a, b)$

Элементами пространства $C(a, b)$ являются комплекснозначные функции $x(t)$, непрерывные на сегменте $[a, b]$, с нормой

$$\|x\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|.$$

Общий вид линейного функционала в этом пространстве дается формулой:

$$f(x) = \int_a^b x(t) dg(t),$$

где $g(t)$ — комплекснозначная функция ограниченной вариации на $[a, b]$, причем $g(t) = g(t+0)$ ($a < t < b$) и $\|f\| = \bigvee_a^b(g)$.

Элемент $X(t) \in C(a, b)$ называется максимальным для данного функционала $f(x)$, если $\|X\| = 1$ и $f(X) = \|f\|$.

ТЕОРЕМА 1. Если линейный функционал $\varphi(x)$, определенный в подпространстве $G \subset C(a, b)$, имеет максимальный элемент $X(t)$, то для того чтобы расширение $f(x) = \int_a^b x(t) dg(t)$ функционала $\varphi(x)$ на все пространство $C(a, b)$ было минимальным, необходимо и достаточно, чтобы ядро $g(t)$ этого расширения имело следующее интегральное представление:

$$g(t) = \int_a^t \overline{X(v)} dv(t) + C, \quad (1)$$

где $v(t) = \bigvee_a^t(g)$.

Другими словами, необходимо и достаточно, чтобы $g(t)$ удовлетворяло следующему условию:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta g(t)}{\Delta v(t)} = \overline{X(t)} \text{ почти всюду по мере } dv(t)^*, \quad (1')$$

т. е. чтобы производная от $g(t)$ по отношению к $v(t)$ равнялась $\overline{X(t)}$ почти всюду по мере $dv(t)$.

Доказательство необходимости. Пусть

$$f(x) = \int_a^b x(t) dg(t)$$

— какое-нибудь минимальное расширение функционала $\varphi(x)$. По определе-

* В этом и следующем параграфах «почти всюду по мере $dv(t)$ » означает то же самое, что и «почти всюду по отношению к $v(t)$ » в книге (9), гл. XI.

нию максимального элемента, имеем:

$$f(X) = \int_a^b X(t) dg(t) = \overset{b}{V}_a(g).$$

Убедимся, что для любого $t \in [a, b]$ будет

$$\int_a^t X(t) dg(t) = \overset{t}{V}_a(g). \quad (2)$$

Действительно,

$$\left| \int_a^t X(t) dg(t) \right| \leq \max_{a \leq \tau \leq t} |X(\tau)| \cdot \overset{t}{V}_a(g) \leq \overset{t}{V}_a(g)$$

и потому

$$\begin{aligned} \overset{b}{V}_a(g) &= \int_a^b X(t) dg(t) = \left| \int_a^b X(t) dg(t) \right| = \left| \int_a^t X(t) dg(t) + \int_t^b X(t) dg(t) \right| \leq \\ &\leq \left| \int_a^t X(t) dg(t) \right| + \left| \int_t^b X(t) dg(t) \right| \leq \overset{t}{V}_a(g) + \overset{b}{V}_t(g) = \overset{b}{V}_a(g). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left| \int_a^t X(t) dg(t) + \int_t^b X(t) dg(t) \right| = \left| \int_a^t X(t) dg(t) \right| + \left| \int_t^b X(t) dg(t) \right|$$

и комплексные числа $\int_a^t X(t) dg(t)$ и $\int_t^b X(t) dg(t)$ имеют одинаковые аргументы, а так как их сумма равна $\overset{b}{V}_a(g) > 0$, то они оба положительны.

Далее,

$$\int_a^t X(t) dg(t) + \int_t^b X(t) dg(t) = \overset{t}{V}_a(g) + \overset{b}{V}_t(g)$$

и каждое слагаемое левой части не превышает соответствующего слагаемого правой. Следовательно, они соответственно равны, что доказывает равенство (2).

Наше ядро $g(t)$, как функция ограниченной вариации, является абсолютно непрерывной функцией по отношению к своей вариации $\overset{a}{V}(g) = v(t)$, и потому оно будет неопределенным интегралом Стильтьеса — Лебега по отношению к $v(t)$:

$$g(t) = \int_a^t \alpha(t) dv(t) + C, \quad (3)$$

где $\alpha(t)$ — суммируемая по отношению к $v(t)$ функция [см., например, ⁽⁹⁾, гл. XI].

Далее, имеем:

$$\overset{t}{V}_a(g) = \int_a^t |\alpha(t)| dv(t)$$

и

$$\overset{t}{V}_a(g) = v(t) = \int_a^t dv(t); \quad (4)$$

следовательно,

$$\int_a^t (|\alpha(t)| - 1) dv(t) = 0 \text{ при всех } t,$$

откуда

$$|\alpha(t)| = 1 \text{ почти всюду по мере } dv(t). \quad (5)$$

Подставив выражение для $g(t)$ из (3) в (2), получим:

$$\overset{t}{V}_a(g) = \int_a^t X(t) dg(t) = \int_a^t X(t) \alpha(t) dv(t);$$

сравнив это снова с (4), найдем:

$$X(t) \alpha(t) = 1 \text{ почти всюду по мере } dv(t) \quad (6)$$

и, в силу (5),

$$|X(t)| = 1 \text{ почти всюду по мере } dv(t). \quad (7)$$

Следовательно, множество, состоящее из интервалов сегмента $[a, b]$, где $|X(t)| < 1$, имеет меру нуль по отношению к $v(t)$, т. е. ядра $g(t)$ всех минимальных расширений функционала $\varphi(x)$ постоянны на этих интервалах.

Далее, из (6) и (7) следует:

$$\alpha(t) = \overline{X(t)} \text{ почти всюду по мере } dv(t), \quad (8)$$

что после подстановки в (3) дает:

$$g(t) = \int_a^t \overline{X(t)} dv(t) + C, \quad (1)$$

а это эквивалентно условию:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta g(t)}{\Delta v(t)} = \overline{X(t)} \text{ почти всюду по мере } dv(t), \quad (1')$$

и необходимость доказана.

Доказательство достаточности. Пусть $f(x) = \int_a^b x(t) dg(t)$ является некоторым расширением линейного функционала $\varphi(x)$ и пусть ядро $g(t)$ этого расширения имеет интегральное представление

$$g(t) = \int_a^t \overline{X(t)} dv(t) + C, \quad (1)$$

где $v(t) = \int_a^t (g)$.

Повторяя для $\overline{X(t)}$ рассуждения, проведенные выше для $\alpha(t)$, установим, что $|X(t)| = 1$ почти всюду по мере $dv(t)$.

Далее, имеем:

$$f(X) = \int_a^b X(t) dg(t) = \int_a^b X(t) \overline{X(t)} dv(t) = \int_a^b 1 \cdot dv(t) = \int_a^b (g) = \|f\|,$$

т. е. $X(t)$ — максимальный элемент функционала $f(x)$, а так как $f(X) = \varphi(X)$ и, по условию, $\varphi(X) = \|f\|$, то $\|f\| = \|\varphi\|$, т. е. расширение $f(x)$ является минимальным, и достаточность также доказана.

Замечание. В связи с условием (1'), отметим, что если точка t_0 не является точкой постоянства ядра $g(t)$ минимального расширения (так что $\Delta v(t_0) \neq 0$ и $|X(t_0)| = 1$), то предел $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta g(t_0)}{\Delta v(t_0)}$ существует и равен $\overline{X(t_0)}$.

Действительно, из (1), в силу неубывания $v(t)$, следует:

$$\Delta g(t_0) = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \overline{X(t)} dv(t) = \{R[\overline{X(\tau_1)}] + iI[X(\tau_2)]\} \cdot \Delta v(t_0) \\ (t_0 \leq \tau_1, \tau_2 \leq t_0 + \Delta t)$$

и

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta g(t_0)}{\Delta v(t_0)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \{R[\overline{X(\tau_1)}] + iI[\overline{X(\tau_2)}]\} = \overline{X(t_0)},$$

так как $X(t)$ — непрерывная функция.

В том случае, когда G конечномерно, существование в нем максимального элемента линейного функционала $\varphi(x)$ очевидно. Если $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ — базис подпространства G , то каждый линейный функционал $\varphi(x)$ в G полностью определяется своими значениями $\varphi(x_i) = c_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) на элементах базиса. Нашу задачу можно в этом случае рассматривать как изучение линейного функционала $f(x)$, определенного в $C(a, b)$, удовлетворяющего условиям $f(x_i) = c_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) и имеющего минимальную норму. Глубокие свойства таких функционалов для общего случая любого линейного нормированного пространства рассмотрены М. Г. Крейном [см. (9), стр. 171—199].

В случае бесконечномерного подпространства $G \subset C(a, b)$, в частности, при $G = C(a, b)$, может и не существовать максимального элемента для данного линейного функционала. В связи с этим укажем необходимые и достаточные условия, которым должно удовлетворять ядро $g(t)$ линейного функционала

$$f(x) = \int_a^b x(t) dg(t)$$

в $C(a, b)$, чтобы этот функционал обладал максимальным элементом.

Как уже было указано выше, функция $g(t)$, как функция ограниченной вариации, имеет интегральное представление

$$g(t) = \int_a^t \alpha(t) dv(t) + C, \quad (3)$$

где $\alpha(t)$ — суммируемая относительно $v(t) = \overset{t}{V}(g)$ функция и $|\alpha(t)| = 1$ почти всюду по мере $dv(t)$.

ТЕОРЕМА 2. Для того чтобы линейный функционал $f(x) = \int_a^b x(t) dg(t)$, определенный в $C(a, b)$, имел в этом пространстве максимальный элемент, необходимо и достаточно, чтобы в интегральном представлении (3) его ядра $g(t)$,

$$g(t) = \int_a^t \alpha(t) dv(t) + C, \quad (3)$$

функцию $\alpha(t)$ можно было выбрать непрерывной на $[a, b]$.

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 1, так как если у нашего функционала $f(x)$ существует максимальный элемент $X(t)$, то

$$g(t) = \int_a^t \overline{X(t)} dv(t) + C, \quad (9)$$

а $\overline{X(t)}$ — непрерывная функция на $[a, b]$.

Для доказательства достаточности заметим сначала, что если в формуле (3) функция $\alpha(t)$ непрерывна, то, в случае надобности, ее значения на множестве меры нуль по отношению к $v(t)$ можно изменить, сохранив ее непрерывность, так, чтобы $|\alpha(t)| \leq 1$.

Считая поэтому, что в формуле (3) непрерывная функция $\alpha(t)$ удовлетворяет условию $|\alpha(t)| \leq 1$, положим $X(t) = \overline{\alpha(t)}$. Тогда $\|X(t)\| = 1$ и

$$f(X) = \int_a^b X(t) dg(t) = \int_a^b \overline{\alpha(t)} \alpha(t) dv(t) = \int_a^b 1 \cdot dv(t) = \overset{b}{V}_a(g) = \|f\|,$$

т. е. $X(t)$ — максимальный элемент линейного функционала $f(x)$, и достаточность также доказана.

Замечание. Если $X_1(t)$ и $X_2(t)$ являются максимальными элемен-

тами линейного функционала $f(x) = \int_a^b x(t) dg(t)$, то, как следует из (1'), эти максимальные элементы равны между собой почти всюду по мере $dv(t)$.

§ 3. Случай действительного пространства $C_r(a, b)$

Будем рассматривать в этом параграфе пространство $C_r(a, b)$, элементами которого являются действительные функции, непрерывные на сегменте $[a, b]$.

Все теоремы предыдущего параграфа, конечно, справедливы и для этого случая, но в рассматриваемом пространстве действительных функций их можно усилить и формулировать более наглядно.

ТЕОРЕМА 3. Если линейный функционал $\varphi(x)$, определенный в подпространстве $G \subset C_r(a, b)$, имеет максимальный элемент $X(t)$, то ядра $g(t)$ всех его минимальных расширений $f(x) = \int_a^b x(t) dg(t)$ имеют одинаковую структуру в том смысле, что все $g(t)$ постоянны на одном и том же множестве $M \subset [a, b]$ тех интервалов из $[a, b]$, где $|X(t)| < 1$, не убывают в каждой точке одного и того же замкнутого множества $F^+ \subset [a, b]$, где $X(t) = +1$, и не возрастают в каждой точке одного и того же замкнутого множества $F^- \subset [a, b]$, где $X(t) = -1$.

Доказательство. Если $X(t)$ — максимальный элемент функционала $\varphi(x)$, определенного в $G \subset C_r(a, b)$, то $X(t)$ будет также максимальным элементом для всех его минимальных расширений $f(x)$ на все пространство $C_r(a, b)$, так как все $f(x)$ совпадают с $\varphi(x)$ на G и $\|f\| = \|\varphi\|$.

Доказательство первого утверждения нашей теоремы содержится в доказательстве необходимости теоремы 1, но легко может быть получено и непосредственно.

Пусть $t_0 \in F^+$, так что $X(t_0) = +1$. В силу непрерывности функции $X(t)$, существует некоторая окрестность (t', t'') точки t_0 , в которой $X(t) > 0$. Тогда, по формуле (1),

$$g(t_2) - g(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} X(t) dv(t) \geq 0 \text{ для любого } [t_1, t_2] \subset (t', t''),$$

т. е. ядро $g(t)$ минимального расширения (любого) не убывает в каждой точке t_0 множества F^+ .

Аналогично доказывается утверждение нашей теоремы о множестве F^- .

Замечание. Если линейный функционал $\varphi(x)$ имеет множество максимальных элементов $\{X_\alpha(t)\}$, то под множествами M , F^+ и F^- в предыдущей теореме следует понимать соответственно множества

$$\bigcup_{\alpha} \{t : |X_\alpha(t)| < 1\}, \quad \bigcap_{\alpha} \{t : X_\alpha(t) = +1\} \text{ и } \bigcap_{\alpha} \{t : X_\alpha(t) = -1\}.$$

Теорема 3 допускает следующее обращение:

ТЕОРЕМА 3'. Если ядро $g_1(t)$ некоторого расширения $f_1(x) = \int_a^b x(t) dg_1(t)$ линейного функционала $\varphi(x)$ с максимальным элементом $X(t)$ имеет указанную в теореме 3 структуру, то это расширение является минимальным.

Доказательство. Убедимся, что максимальный элемент $X(t)$ линейного функционала $\varphi(x)$ является также максимальным элементом нашего расширения $f_1(x)$, т. е. что

$$f_1(X) = \int_a^b X(t) dg_1(t) = \bar{V}_a^b(g_1) = \|f_1\|.$$

Допустим противное и предположим, что

$$\int_a^b X(t) dg_1(t) < \bar{V}_a^b(g_1).$$

Тогда будет также

$$\int_{a_1}^{b_1} X(t) dg_1(t) < \bar{V}_{a_1}^{b_1}(g_1),$$

где $[a_1, b_1]$ — одна из половинок сегмента $[a, b]$. Продолжая процесс, получим некоторую последовательность сегментов $\{[a_n, b_n]\}$, стягивающихся к некоторой точке $t_0 \in [a, b]$.

Пусть $t_0 \in M$, т. е. существует некоторый интервал (t', t'') , на котором $g_1(t)$ постоянна. Тогда при достаточно большом n будет $[a_n, b_n] \subset (t', t'')$. Но в каждом сегменте $[a_n, b_n]$, содержащемся в интервале постоянства (t', t'') , будет

$$\int_{a_n}^{b_n} X(t) dg_1(t) = \bar{V}_{a_n}^{b_n}(g_1) = 0,$$

что противоречит построению сегмента $[a_n, b_n]$.

Пусть $t_0 \in F^+$. Тогда t_0 окажется внутри одного из смежных интервалов (α, β) к F^- , внутри которого окажется и сегмент $[a_n, b_n]$ при достаточно большом n . Заметим, что на интервале (α, β) функция $g_1(t)$ не убывает. На множестве $M \cap [a_n, b_n]$, на котором функция $g_1(t)$ постоянна, значения $X(t)$ можно заменить на $+1$, не изменив при этом значения

интеграла $\int_{a_n}^{b_n} X(t) dg_1(t)$. Мы получим:

$$\int_{a_n}^{b_n} X(t) dg_1(t) = \int_{a_n}^{b_n} 1 \cdot dg_1(t) = g_1(b_n) - g_1(a_n) = \bar{V}_{a_n}^{b_n}(g_1),$$

так как на $[a_n, b_n]$ функция $g_1(t)$ не убывает. Но это противоречит построению $[a_n, b_n]$. Аналогично исследуется случай $t_0 \in F^-$. Теорема доказана.

Как было отмечено в предыдущем параграфе, если подпространство G конечномерно, то задача изучения минимальных расширений из G на все пространство $C_r(a, b)$ равносильна задаче изучения линейных функционалов $f(x)$, определенных в $C_r(a, b)$, удовлетворяющих условиям $f(x_i) = c_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) и имеющих минимальную норму [см. (6)]. В работе автора (2) [см. также (3)] показано, что среди этих функционалов с минимальной нормой существует, по крайней мере, один $f_0(x)$, у которого ядро $g_0(t)$ является ступенчатой функцией, имеющей не более чем n скачков, так что

$$f_0(x) = x(t_1)\omega(t_1) + x(t_2)\omega(t_2) + \dots + x(t_r)\omega(t_r),$$

где $r \leq n$, а $\omega(t_i)$ — скачок $g_0(t)$ в точке $t_i \in [a, b]$. Ясно, что среди этих функционалов с минимальной нормой могут быть функционалы и не со ступенчатыми ядрами.

В связи с этим приведем в виде следствия из теоремы 3 условие того, чтобы все минимальные ядра оказались ступенчатыми.

Следствие. Если максимальный элемент $X(t)$ линейного функционала $\varphi(x)$, определенного в G , обладает тем свойством, что равенство $|X(t)| = 1$ имеет место лишь в m точках сегмента $[a, b]$, то все ядра $g(t)$ минимальных расширений функционала $\varphi(x)$ являются ступенчатыми функциями, имеющими скачки лишь в этих точках (но некоторые из этих точек могут не быть точками скачков для того или другого минимального ядра).

Это условие реализуется на примере n -мерного подпространства G , порожденного элементами t, t^2, \dots, t^n , у которого каждый элемент, а значит и максимальный, имеет вид

$$a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n,$$

так что указанное условие выполнено, причем $m \leq n + 1$.

Переходя к вопросу о существовании максимального элемента у линейного функционала в рассматриваемом пространстве $C_r(a, b)$, заметим, что здесь можно повторить все сказанное выше для случая комплексного пространства $C(a, b)$.

Для следующей теоремы нам потребуются такие определения: точка $t_0 \in [a, b]$ называется точкой постоянства функции $g(t)$, если существует интервал $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, в котором $g(t) = g(t_0)$; точка t_0 называется точкой возрастания (убывания) функции $g(t)$, если она не является ее точкой постоянства и существует $\delta > 0$ такое, что она не убывает (не возрастает) на интервале $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

ТЕОРЕМА 4. Для того чтобы линейный функционал $f(x) = \int_a^b x(t) dg(t)$, определенный в $C_r(a, b)$, имел в этом пространстве максимальный элемент, необходимо и достаточно, чтобы его ядро $g(t)$ удовлетворяло следующим условиям:

1) каждая точка сегмента $[a, b]$ должна являться либо точкой возрастания, либо точкой убывания, либо точкой постоянства функции $g(t)$;

2) множества точек возрастания и убывания функции $g(t)$ должны быть замкнутыми (и, очевидно, не пересекаться).

Таким образом, функция $g(t)$ не должна, например, иметь собственных экстремумов и точек колебания на сегменте $[a, b]$.

Доказательство необходимости. Пусть функционал $f(x)$ имеет максимальный элемент $X(t)$. Тогда, в силу теоремы 3, множество F^+ точек неубывания функции $g(t)$ является замкнутым множеством. Множество же точек возрастания функции $g(t)$ также замкнуто, так как оно получается из замкнутого множества F^+ путем удаления интервалов и, возможно, полусегментов $[a, c_1]$ и $(c_2, b]$, на которых $g(t)$ постоянна. Аналогично доказывается замкнутость множества точек убывания функции $g(t)$. Утверждение же 1) непосредственно следует из теоремы 3.

Доказательство достаточности. Пусть ядро $g(t)$ удовлетворяет обоим условиям нашей теоремы. На основании теоремы 2, для доказательства существования максимального элемента, достаточно убедиться в том, что в интегральном представлении (3) ядра $g(t)$:

$$g(t) = \int_a^t \alpha(t) dv(t) + C \quad (3)$$

функция $\alpha(t)$ может быть выбрана непрерывной на сегменте $[a, b]$, и тогда максимальный элемент $X(t)$ будет равен $\alpha(t)$ (так как $\alpha(t)$ — действительная функция, то $\alpha(t) = \alpha(t)$).

Рассмотрим

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta g(t)}{\Delta v(t)}.$$

На замкнутом множестве тех точек из $[a, b]$, где $g(t)$ возрастает, этот предел равен $+1$, а на замкнутом множестве точек, где $g(t)$ убывает, он равен -1 ; в точках же постоянства функции $g(t)$ он не определен. Построим непрерывную на $[a, b]$ функцию $\alpha(t)$, равную $+1$ на первом множестве, равную -1 — на втором и линейную на третьем (мера этого последнего множества относительно $v(t)$ равна нулю). Таким образом,

$$\alpha(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta g(t)}{\Delta v(t)} \text{ почти всюду по мере } dv(t),$$

но тогда

$$g(t) = \int_a^t \alpha(t) dv(t) + C,$$

и достаточность также доказана.

Заметим, что достаточность можно доказать непосредственно, не пользуясь теоремой 2.

§ 4. Случай пространства $C(Q)$

Элементами пространства $C(Q)$ являются комплекснозначные, непрерывные на компакте Q функции $x(q)$ с нормой

$$\|x\| = \max_{q \in Q} |x(q)|.$$

Общий вид линейного функционала в этом пространстве дается формулой

$$f(x) = \int_Q x(q) d\psi,$$

где $\psi(E)$ — конечная вполне аддитивная функция на теле борелевских множеств $B(Q)$, причем

$$\|f\| = \text{var } \psi = V_Q(\psi).$$

Для каждого множества $E \subset Q$ будет

$$|\psi(E)| \leq V_E(\psi) = v(E),$$

и, следовательно, $\psi(E)$ абсолютно непрерывна относительно $v(E)$. По теореме Радона — Никодима [см., например, ⁽¹⁰⁾, стр. 59], функция $\psi(E)$ будет неопределенным интегралом некоторой интегрируемой на Q функции точки $\alpha(q)$:

$$\psi(E) = \int_E \alpha(q) dv,$$

так что каждый линейный функционал $f(x) = \int_Q x(q) d\psi$ в $C(Q)$ может быть представлен в виде

$$f(x) = \int_Q x(q) \alpha(q) dv,$$

где $v(E) = V_E(\psi)$.

Нетрудно убедиться, что утверждения теорем 1 и 2 переносятся и на случай рассматриваемого комплексного пространства $C(Q)$ и имеют место такие теоремы:

ТЕОРЕМА 5. Пусть линейный функционал $\varphi(x)$, определенный в подпространстве $G \subset C(Q)$, имеет максимальный элемент $X(q)$. Тогда для того чтобы расширение

$$f(x) = \int_Q x(q) d\psi = \int_Q x(q) \alpha(q) dv$$

функционала $\varphi(x)$ на все пространство $C(Q)$ было минимальным, необходимо и достаточно, чтобы $\alpha(q) = \overline{X(q)}$ почти всюду по мере $v(E)$.

ТЕОРЕМА 6. Для того чтобы линейный функционал

$$f(x) = \int_Q x(q) d\psi = \int_Q x(q) \alpha(q) dv,$$

определенный в $C(Q)$, имел максимальный элемент, необходимо и достаточно, чтобы функцию $\alpha(q)$ можно было выбрать непрерывной на Q .

Остановимся специально на случае пространства $C_r(Q)$, элементами которого являются действительные, непрерывные на Q функции $x(q)$.

Введем определение: функция множества $\psi(E)$ называется постоянной на множестве $M \subset Q$, если $V_M(\psi) = 0$.

ТЕОРЕМА 7. Если линейный функционал $\varphi(x)$, определенный в подпространстве $G \subset C_r(Q)$, имеет максимальный элемент $X(q)$, то для того чтобы расширение $f(x) = \int_Q x(q) d\psi$ этого функционала на все пространство $C_r(Q)$ было минимальным, необходимо и достаточно, чтобы его ядро $\psi(E)$ было постоянным на множестве $M = \{q : |X(q)| < 1\}$, не убывало на замкнутом множестве $F^+ = \{q : X(q) = +1\}$ и не возрастало на замкнутом множестве $F^- = \{q : X(q) = -1\}$.

Доказательство необходимости. Пусть $X(q)$ — максимальный элемент функционала $\varphi(x)$. Нетрудно убедиться, что для любого множества $E \subset Q$ имеет место формула:

$$\int_E X(q) d\psi = V_E(\psi), \quad (2')$$

аналогичная формуле (2). Далее, имеем:

$$M = \{q : |X(q)| < 1\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{q : |X(q)| \leq 1 - \frac{1}{n}\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n,$$

и если на некотором M_n будет $V_{M_n}(\psi) > 0$, то

$$\int_{M_n} X(q) d\psi \leq \max_{q \in M_n} |X(q)| V_{M_n}(\psi) < V_{M_n}(\psi),$$

что противоречит (2'). Следовательно, на каждом M_n будет $V_{M_n}(\psi) = 0$, откуда, в силу полной аддитивности $V_E(\psi)$ (так как $\psi(E)$ вполне аддитивна), заключаем, что $V_M(\psi) = 0$.

На множестве F^+ имеем:

$$V_{F^+}(\psi) = \int_{F^+} X(q) d\psi = \int_{F^+} d\psi = \psi(F^+),$$

откуда следует, что $\psi(E)$ не убывает на F^+ .

Аналогично доказывается невозрастание $\psi(E)$ на F^- .

Доказательство достаточности. Пусть ядро $\psi(E)$ расширения $f(x) = \int_Q x(q) d\psi$ удовлетворяет условиям теоремы. Как и выше, достаточно убедиться в том, что $X(q)$ является максимальным элементом и для функционала $f(x)$. Действительно, мы имеем:

$$\begin{aligned} f(X) &= \int_Q X(q) d\psi = \int_{F^+} X(q) d\psi + \int_{F^-} X(q) d\psi + \int_M X(q) d\psi = \\ &= \int_{F^+} d\psi + \int_{F^-} -1 \cdot d\psi + \int_M X(q) d\psi = \psi(F^+) - \psi(F^-) + 0 = \\ &= V_{F^+}(\psi) + V_{F^-}(\psi) + V_M(\psi) = V_Q(\psi) = \|f\|, \end{aligned}$$

так как на множествах F^+ и F^- функция $\psi(E)$ монотонна.

В работе (2) нами показано для случая n -мерного подпространства $G \subset C_r(Q)$ существование по крайней мере одного минимального расширения вида

$$f^0(x) = \sum_{i=1}^r x(q_i) \omega_i,$$

где $1 \leq r \leq n$ и $\|f^0\| = \sum_{i=1}^r |\omega_i|$. Из предыдущей теоремы следует, что если линейный функционал $\varphi(x)$, определенный в подпространстве $G \subset C_r(Q)$ (не обязательно конечномерном), имеет максимальный элемент $X(q)$ такой, что равенство $|X(q)| = 1$ имеет место лишь в m точках на Q , то все минимальные расширения функционала $\varphi(x)$ будут вида

$$f(x) = \sum_{i=1}^r x(q_i) \omega_i,$$

где $1 \leq r \leq m$.

ТЕОРЕМА 8. Для того чтобы линейный функционал $f(x) = \int_Q x(q) d\psi$, определенный в $C_r(Q)$, имел максимальный элемент, необходимо и достаточно, чтобы существовали два непересекающихся замкнутых множества $F^+ \subset Q$ и $F^- \subset Q$ таких, чтобы на первом функция $\psi(E)$ не убывала, на втором — не возрастала, а на множестве $M = Q - (F^+ \cup F^-)$ она была постоянной.

Доказательство. Необходимость следует из предыдущей теоремы 7.

Достаточность доказываем так: строим непрерывную функцию $X(q)$ равную $+1$ на F^+ , -1 на F^- и $|X(q)| \leq 1$ на M . Тогда

$$\begin{aligned} f(X) &= \int_Q X(q) d\psi = \int_{F^+} X(q) d\psi + \int_{F^-} X(q) d\psi + \int_M X(q) d\psi = \\ &= \psi(F^+) - \psi(F^-) = V(\psi) = \|f\|. \end{aligned}$$

Замечание. Условие теоремы эквивалентно такому: для того чтобы функционал $f(x) = \int_Q x(q) d\psi$ имел максимальный элемент, необходимо и достаточно, чтобы существовали два непересекающихся замкнутых множества F^+ и F^- таких, что $V(\psi) = \psi(F^+) - \psi(F^-)$.

Поступило
25. IX. 1956

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Банах С., Курс функционального анализа, Київ, 1948.
- 2 Зуховицкий С. И., Про деякі задачі теорії апроксимації, Матем. збірник Київського держуніверситету, № 2 (1948), 169—183.
- 3 Зуховицкий С. И., О приближении действительных функций в смысле П. Л. Чебышева, Успехи матем. наук, т. XI, вып. 2 (68) (1956), 125—159.
- 4 Rogosinski W. W., On finite systems of linear equations with an infinity of unknowns, Math. Zeitschr., Bd. 63, H.1 (1955), 97—108.

- ⁵ Rogosinski W. W., Functionals on subspaces of L_α , Proc. Internat. Congr. Math., II (1954), 161—162.
- ⁶ А х и е з е р Н. и К р е й н М., О некоторых вопросах теории моментов, ГОНТИ, Харьков, 1938.
- ⁷ З у х о в и ц к и й С. И., Об одной минимум-задаче проблемы моментов, Труды третьего Всесоюзного математического съезда, т. 1, АН СССР, Москва, 1956.
- ⁸ З у х о в и ц к и й С. И., Об одной минимум-задаче в пространстве непрерывных функций, Доклады Ак. наук СССР, 108, № 3 (1956), 383—384.
- ⁹ Л е б е г А., Интегрирование и отыскание примитивных функций, М.—Л., ГТТИ, 1934.
- ¹⁰ С а к с С., Теория интеграла, Москва, И. Л., 1949.
- ¹¹ Rogosinski W. W., Continuous linear functionals on subspaces of \mathcal{L}^p and \mathcal{C} , Proc. London Math. Soc., (3) 6 (1956), 175—190.
-

А. А. КОНЮШКОВ

О КЛАССАХ ЛИПШИЦА

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым)

Для функций классов Липшица даются характеристики в терминах коэффициентов Фурье и доказываются аналоги теорем Харди, Белмана и Лу Цзин-цуня о функциях классов L_p .

Будем рассматривать суммируемые периодические функции периода 2π . Из классов $L_p(0, 2\pi)$, $1 \leq p \leq \infty$, выделим подклассы двух типов: $\text{Lip}(\alpha, p)$ и $\text{lip}(\alpha, p)$, $0 < \alpha \leq 1$. Как известно ⁽¹⁾, $f(x) \in \text{Lip}(\alpha, p)$, если

$$\|f(x+h) - f(x)\|_p = O(h^\alpha) \quad (h \rightarrow +0);$$

если же

$$\|f(x+h) - f(x)\|_p = o(h^\alpha),$$

то $f(x) \in \text{lip}(\alpha, p)$.

Работа состоит из трех параграфов. В § 1 дается характеристика классов Липшица в терминах коэффициентов Фурье. В § 2 рассматривается преобразование рядов Фурье функций классов Липшица. В § 3 для классов Липшица доказываются аналоги теорем Белмана, Харди и Лу Цзин-цуня о коэффициентах Фурье классов L_p .

§ 1. О характеристике классов Липшица*

1. Подкласс $\text{lip}(\alpha, p)$ в классе $\text{Lip}(\alpha, p)$ характеризуется следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f(x) \in L(0, 2\pi)$ и

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1.1)$$

— ее ряд Фурье. Для того чтобы $f(x) \in \text{lip}(\alpha, p)$, $0 < \alpha < 1$, $1 \leq p \leq \infty$, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая вогнутая последовательность $\{\Lambda_n\}$ (т. е. у нее $\Delta^2 \Lambda_n \leq 0$, $n = 0, 1, \dots$) с $\Lambda_n > 0$, $\Lambda_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, что ряд

* Теоремы § 1 переносятся на более общие классы, когда вместо $f(x+h) - f(x)$ берется конечная разность k -го порядка, а вместо h — функция $\psi(h)$ класса Ф, удовлетворяющая условиям (B) и (B_k) (по терминологии работы Н. К. Бари и С. Б. Стечкина ⁽¹²⁾). Рассуждения при этом аналогичны приведенным, только при $k > 1$ вместо σ_n следует брать суммы Валье-Пуссена. Такие же обобщения допускают § 2, 3. (Примеч. при корректуре.)

$$\frac{a_0 \Lambda_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_n (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1.2)$$

будет рядом Фурье функции $f^*(x) \in \text{Lip}(\alpha, p)$.

Достаточность условия теоремы 1 будет вытекать из теоремы 2, при доказательстве которой используется следующая лемма.

ЛЕММА 1. 1) Для того чтобы $f(x) \in \text{Lip}(\alpha, p)$, $0 < \alpha < 1$, $1 \leq p \leq \infty$, необходимо, чтобы

$$\|f(x) - \sigma_n(x)\|_p = O(n^{-\alpha}),$$

и достаточно, чтобы

$$\|\sigma_{2^k}(x) - \sigma_{2^{k-1}}(x)\|_p = O(2^{-k\alpha}), \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $\sigma_n(x)$ — первые арифметические средние ряда Фурье для $f(x)$.

2) Для $f(x) \in \text{lip}(\alpha, p)$ имеют место аналогичные необходимые и достаточные условия, получающиеся из указанных выше заменой O на o .

По поводу доказательства предложения 1) см. (2). Предложение 2) устанавливается по существу аналогично.

Всюду в § 1 будем, если нет оговорок, считать $0 < \alpha < 1$, $1 \leq p \leq \infty$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f(x) \in \text{Lip}(\alpha, p)$ и (1.1) — ее ряд Фурье и пусть $\{\lambda_n\}$ — выпуклая последовательность с $\lambda_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда ряд

$$\frac{a_0 \lambda_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1.3)$$

будет рядом Фурье функции класса $\text{lip}(\alpha, p)$.

Доказательство. Обозначим через σ_n и σ_n^* ($n=0, 1, \dots$) соответственно $(C, 1)$ -средние рядов (1.1) и (1.3). Так как $f(x) \in \text{Lip}(\alpha, p)$, то, по лемме 1,

$$\|\sigma_n - f\|_p \leq A(n+1)^{-\alpha}$$

(ниже значок p у нормы будем опускать). Оценим $\|\sigma_n^* - \sigma_m^*\|$ при $n > m$ и $m \rightarrow \infty$. При помощи преобразования Абеля получим [см. (3)]:

$$\begin{aligned} \|\sigma_n^* - \sigma_m^*\| &\leq \sum_{p=1}^m p \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{n+1} \right) (p+1) \|\sigma_p - f\| \Delta^2 \lambda_p + \\ &+ \sum_{p=m+1}^n (p+1) \|\sigma_p - f\| \Delta^2 \lambda_p + \frac{2}{n+1} \sum_{p=0}^{n-1} (p+1) \|\sigma_p - f\| \Delta \lambda_{p+1} + \\ &+ \frac{2}{m+1} \sum_{p=0}^{m-1} (p+1) \|\sigma_p - f\| \Delta \lambda_{p+1} + \|\sigma_n - f\| \lambda_n + \|\sigma_m - f\| \lambda_m + \\ &+ \|\sigma_n - f\| \Delta^2 \lambda_n + \|\sigma_m - f\| \Delta^2 \lambda_m. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Члены правой части (1.4) в направлении слева направо обозначим через K_i ($i=1, \dots, 8$). Так как по условию, $\lambda_n \rightarrow 0$, то K_i , $i=5, \dots, 8$, будут порядка $o(m^{-\alpha})$.

Далее,

$$K_4 \leq \frac{2A}{m+1} \sum_{p=0}^{m-1} (p+1) (p+1)^{-\alpha} \Delta \lambda_{p+1} = o(1) \frac{1}{m+1} \sum_{p=0}^{m-1} (p+1)^{-\alpha},$$

ибо $(p+1) \Delta \lambda_{p+1} \rightarrow 0$ и ряд $\sum_{p=0}^{\infty} (p+1)^{-\alpha}$ расходится.

Так как

$$\sum_{p=0}^{m-1} (p+1)^{-\alpha} = O(m^{-\alpha+1}),$$

то

$$K_4 = o(m^{-\alpha}).$$

Аналогично,

$$K_3 = o(n^{-\alpha}).$$

Мы имеем:

$$K_2 \leq A \sum_{p=m+1}^n (p+1) (p+1)^{-\alpha} \Delta^2 \lambda_p \leq A (m+2)^{-\alpha} \sum_{p=m+1}^n (p+1) \Delta^2 \lambda_p = o(m^{-\alpha}),$$

так как в силу выпуклости $\{\lambda_n\}$ ряд $\sum_{p=0}^{\infty} (p+1) \Delta^2 \lambda_p$ сходится.

K_1 оценим для случая $m = 2^{k-1}$, $n = 2^k$, $k = 1, 2, \dots$. В этом случае

$$\frac{1}{m+1} - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{2^k}$$

и

$$K_1 < \frac{A}{2^k} \sum_{p=1}^{2^{k-1}} (p+1)^{1-\alpha} (p+1) \Delta^2 \lambda_p.$$

Для заданного $\varepsilon > 0$ подберем такое k_0 , чтобы $\sum_{p=2^{k_0}}^{\infty} (p+1) \Delta^2 \lambda_p < \varepsilon$.

Тогда при $k > k_0 + 1$

$$\sum_{p=1}^{2^{k-1}} (p+1)^{1-\alpha} (p+1) \Delta^2 \lambda_p = \sum_{p=1}^{2^{k_0-1}} + \sum_{p=2^{k_0}}^{2^{k-1}} < \sum_{p=1}^{2^{k_0-1}} + \varepsilon \cdot 2^{k(1-\alpha)} = o(2^{k(1-\alpha)})$$

и

$$K_1 = o(2^{-k\alpha}).$$

Итак,

$$\|\sigma_{2^k}^* - \sigma_{2^{k-1}}^*\| = o(2^{-k\alpha}),$$

и, по лемме 1, ряд (1.3) будет рядом Фурье функции класса $\text{lip}(\alpha, p)$.

Доказательство теоремы 1. Докажем достаточность условия. По условию, $f^*(x) \in \text{lip}(\alpha, p)$. Ряд Фурье (1.1) получается из (1.2) почленным умножением на члены последовательности $\{\Lambda_n^{-1}\}$, которая будет выпуклой последовательностью с $\Lambda_n^{-1} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Отсюда, по теореме 2, следует, что $f(x) \in \text{lip}(\alpha, p)$.

Докажем необходимость условия. Так как, по условию, $f(x) \in \text{lip}(\alpha, p)$, то, по лемме 1, $\|f - \sigma_n\| = \varepsilon_n (n+1)^{-\alpha}$, где $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Как показывает доказательство теоремы 2, даже для того чтобы $f^*(x) \in \text{lip}(\alpha, p)$, достаточно выбрать вогнутую последовательность $\{\Lambda_n\}$ с $\Lambda_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ так, чтобы выполнялись условия:

$$\varepsilon_i \Lambda_i \rightarrow 0 \text{ и } (i+1) \Delta \Lambda_{i+1} \varepsilon_i \rightarrow 0 \text{ при } i \rightarrow \infty,$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} (p+1) |\Delta^2 \Lambda_p| \varepsilon_p < \infty.$$

Для этого последовательность $\{\Lambda_n\}$ выбираем так, как указано, например, в работе (3).

Замечание 1. Предыдущие теоремы можно распространить на подклассы $\text{Lip}(\alpha, \Phi)$ и $\text{lip}(\alpha, \Phi)$, $0 < \alpha \leq 1$, класса Орлича $L_{\Phi}^*(0, 2\pi)$ периодических функций периода 2π [о классе L_{Φ}^* см. (4), 4.541]. В этом случае определения подклассов и доказательства теорем аналогичны приведенным выше. По поводу аналога леммы 1 см. работу (2).

В рассматриваемых ниже вопросах без ограничения общности будем считать функции f четными с $\int_0^{2\pi} f dx = 0$. Теоремы для рядов по синусам доказываются аналогично, а также следуют из доказываемых теорем на том основании, что функции, сопряженные к функциям класса $\text{Lip}(\alpha, p)$, $0 < \alpha < 1$, $1 \leq p \leq \infty$, принадлежат тому же классу [см. (5)].

2. ЛЕММА 2*. Для того чтобы суммируемая функция $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ принадлежала к $\text{Lip}(\alpha, p)$, необходимо и достаточно, чтобы: 1) при $1 < p \leq \infty$ для любой функции $g(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos nx$ из класса $L_{p'}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, сумма ряда

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{n+1} a_k c_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k c_k \quad (1.5)$$

была $O(n^{-\alpha})$ при $n \rightarrow \infty$; 2) при $p=1$ для любой функции $g(x) \in C$ (C — класс непрерывных функций периода 2π) сумма ряда (1.5) была $O(n^{-\alpha})$.

Доказательство. Пусть $\sigma_n (n=0, 1, \dots)$ — $(C, 1)$ -средние ряда для $f(x)$. Тогда

$$f - \sigma_n \sim \sum_{k=1}^n \frac{k}{n+1} a_k \cos kx + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \cos kx.$$

По равенству Парсеваля,

* Если вместо σ_n использовать суммы Валье-Пуссена, то получим аналогичную лемму с заменой (1.5) выражением

$$\sum_{k=n+1}^{2n-1} \left(\frac{k}{n} - 1 \right) a_k c_k + \sum_{k=2n}^{\infty} a_k c_k.$$

(Примеч. при корректуре.)

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f - \sigma_n) g dx = \sum_{k=1}^n \frac{k}{m+1} a_k c_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k c_k$$

(при условиях леммы ряд всегда сходится).

Пусть $f \in \text{Lip}(\alpha, p)$. Тогда $\|f - \sigma_n\|_p = O(n^{-\alpha})$ и при $g(x) \in L_{p'}, 1 \leq p \leq \infty$,

$$\left| \int_0^{2\pi} (f - \sigma_n) g dx \right| \leq \|f - \sigma_n\|_p \cdot \|g\|_{p'} = O(n^{-\alpha}).$$

Обратно, пусть $f \in L$ такова, что для каждой $g \in L_{p'}$ при $1 < p \leq \infty$ и каждой $g \in C$ при $p = 1$

$$\int_0^{2\pi} (f - \sigma_n) g dx = O(n^{-\alpha}).$$

Тогда

$$\int_0^{2\pi} n^{\alpha} (f - \sigma_n) g dx = O(1)$$

и, следовательно [см. (4), 4.56],

$$\|n^{\alpha} (f - \sigma_n)\|_p = O(1), \quad \|f - \sigma_n\|_p = O(n^{-\alpha}).$$

Значит, $f \in \text{Lip}(\alpha, p)$.

ТЕОРЕМА 3. Для того чтобы $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ принадлежала к $\text{Lip}(\alpha, p)$, необходимо и достаточно, чтобы при любой выпуклой последовательности $\{\lambda_n\}$ с $\lambda_n \rightarrow 0$ функция $f^* \sim \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n \cos nx$ принадлежала к $\text{Lip}(\alpha, p)$.

Доказательство. Необходимость условия следует из теоремы 2, причем даже $f^* \in \text{lip}(\alpha, p)$. Для доказательства достаточности условия возьмем любую функцию $g \in L_{p'}$ при $1 < p \leq \infty$ и любую $g \in C$ при $p = 1$ и положим

$$g(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos nx.$$

В силу леммы 2, достаточно показать, что сумма (1.5) равна $O(n^{-\alpha})$ ($f \in L: f^* \in L_{1+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ фиксировано и, следовательно, $\|\sigma_n^*\|_{1+\varepsilon}$ ограничены, по теореме Сидона, и $\|\sigma_n\|$ ограничены).

Как следует из работы (3), при заданной $g \in L_{p'}$, $1 < p \leq \infty$, или $g \in C$ существует выпуклая последовательность $\{\lambda_n\}$ с $\lambda_n \rightarrow 0$, $\lambda_n > 0$, такая, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_n} \cos nx$$

является рядом Фурье функции $g^* \in L_{p'}$ или $g^* \in C$ соответственно. Тогда

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{n+1} a_k c_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k c_k = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n+1} \lambda_k a_k \cdot \frac{c_k}{\lambda_k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k a_k \cdot \frac{c_k}{\lambda_k} = O(n^{-\alpha}),$$

в силу леммы 2 (у нас $f^* \in \text{Lip}(\alpha, p)$ и $g^* \in L_{p'}, 1 \leq p \leq \infty$).

Пример. Пусть

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \alpha_n \cos nx,$$

где $0 < \alpha < 1$, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx$ является рядом Фурье — Стильтьеса [см. (4), 1.47]; тогда $f \in \text{Lip}(\alpha, 1)$. Действительно, при любой выпуклой последовательности $\{\lambda_n\}$ с $\lambda_n \rightarrow 0$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \alpha_n \cos nx$ является рядом Фурье

суммируемой функции [см. (4), 4.64], а значит [см. (1)], ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^{\alpha} \alpha_n}{n^{\alpha}} \cos nx$ принадлежит классу $\text{Lip}(\alpha, 1)$. Далее применяем теорему 3. В частности, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \cos nx$ является рядом Фурье функции класса $\text{Lip}(\alpha, 1)$, $0 < \alpha < 1$.

Замечание 2. Аналоги леммы 2 и теоремы 3 имеют место и для классов $\text{Lip}(\alpha, \Phi)$.

3. ТЕОРЕМА 4. Пусть $\{a_n\}$ — монотонно убывающая последовательность.

Тогда для того чтобы функция $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ принадлежала $\text{Lip}(\alpha, p)$,

$0 < \alpha < 1$, $1 < p < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы $a_n = O(n^{\frac{1}{p}-1-\alpha})$.

То же утверждение справедливо для рядов из синусов.

Доказательство. Докажем сначала необходимость условия. Пусть $f(x) \in \text{Lip}(\alpha, p)$, причем $\alpha > \frac{1}{p}$. Тогда, по теореме вложения [см. (5)], $f(x)$ эквивалентна функции из $\text{Lip}(\alpha - \frac{1}{p})$ и так как $a_n \downarrow 0$, то, по теореме Лоренца (8), необходимо

$$a_n = O(n^{-1-(\alpha-\frac{1}{p})}) = O(n^{\frac{1}{p}-1-\alpha}).$$

Пусть теперь $\alpha \leq \frac{1}{p}$. Тогда при достаточно малом $\varepsilon > 0$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(\frac{1}{p}-\alpha+\varepsilon)} a_n \cos nx$$

является рядом Фурье функции класса $\text{Lip}(\alpha + \frac{1}{p} - \alpha + \varepsilon, p) = \text{Lip}(\frac{1}{p} + \varepsilon, p)$ и, следовательно, по доказанному выше,

$$n^{-(\frac{1}{p}-\alpha+\varepsilon)} a_n = O(n^{\frac{1}{p}-1-\frac{1}{p}-\varepsilon}) = O(n^{-1-\varepsilon});$$

значит,

$$a_n = O(n^{-1-\varepsilon+\frac{1}{p}-\alpha+\varepsilon}) = O(n^{\frac{1}{p}-1-\alpha}).$$

Докажем теперь достаточность условия. Пусть сначала $p \geq 2$. Тогда, по теореме Хаусдорфа — Янга [см. (4), 9.4],

$$\|f - s_n\|_p \leq A \left(\sum_{k=n}^{\infty} |a_k|^{p'} \right)^{1/p'} \leq A_1 \left(\sum_{k=n}^{\infty} k^{(\frac{1}{p}-1-\alpha)p'} \right)^{1/p'} = O(n^{-\alpha})$$

[см. также (6), (7)]. Отсюда следует, что $f \in \text{Lip}(\alpha, p)$:

Пусть, далее, $1 < p < 2$. При $0 < x \leq \pi$

$$|f(x) - s_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \cos kx \right| \leq \frac{\pi a_{n+1}}{x}.$$

Тогда при $\frac{\pi}{m+1} < x \leq \pi$, $m = 1, 2, \dots$,

$$|f(x) - s_n(x)| \leq (m+1) a_{n+1} \leq 2ma_{n+1}$$

и, следовательно,

$$\int_{\pi/(n+1)}^{\pi} |f - s_n|^p dx = \sum_{m=1}^n \int_{\pi/(m+1)}^{\pi/m} |f - s_n|^p dx \leq C_1 \sum_{m=1}^n (ma_{n+1})^p m^{-2} =$$

$$= C_1 a_{n+1}^p \sum_{m=1}^n m^{p-2} = O(a_{n+1}^p n^{p-1}) = O(n^{-\alpha p}).$$

Итак,

$$\int_{\pi/(n+1)}^{\pi} |f - s_n|^p dx = O(n^{-\alpha p}). \quad (1.6)$$

Пусть $m \geq n+1$. Тогда

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \cos kx \right| \leq \sum_{k=n+1}^m a_k + \frac{\pi a_m}{x};$$

следовательно, при $\frac{\pi}{m+1} \leq x \leq \pi$

$$|f(x) - s_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^m a_k + 2ma_m$$

и

$$|f(x) - s_n(x)|^p \leq 2^p \left[\left(\sum_{k=n+1}^m a_k \right)^p + (2ma_m)^p \right].$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/(n+1)} |f - s_n|^p dx &= \sum_{m=n+1}^{\infty} \int_{\pi/(m+1)}^{\pi/m} \leq \\ &\leq C_2 \sum_{m=n+1}^{\infty} \left[\left(\sum_{k=n+1}^m k^{\frac{1}{p}-1-\alpha} \right)^p m^{-2} + m^{1-\alpha p} m^{-2} \right]. \end{aligned}$$

Пусть $\alpha > \frac{1}{p}$. Тогда

$$\sum_{k=n+1}^m k^{\frac{1}{p}-1-\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{\frac{1}{p}-1-\alpha} = O(n^{\frac{1}{p}-\alpha})$$

и, следовательно,

$$\int_0^{\pi/(n+1)} |f - s_n|^p dx \leq C_3 \sum_{m=n+1}^{\infty} (n^{\frac{1}{p}-\alpha} m^{-2} + m^{-1-\alpha p}) = O(n^{-\alpha p}). \quad (1.7)$$

Из (1.6) и (1.7) следует, что при $\alpha > \frac{1}{p}$ $f(x) \in \text{Lip}(\alpha, p)$.

Пусть теперь $\alpha \leq \frac{1}{p}$. Рассмотрим при достаточно малом $\varepsilon > 0$ функцию

$$f^*(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(\frac{1}{p}-\alpha+\varepsilon)} a_n \cos nx.$$

Ее коэффициенты Фурье будут

$$O(n^{-\frac{1}{p}+\alpha-\varepsilon+\frac{1}{p}-1-\alpha}) = O(n^{\frac{1}{p}-1-(\frac{1}{p}+\varepsilon)}).$$

Значит, по доказанному выше, $f^*(x) \in \text{Lip}(\frac{1}{p} + \varepsilon, p)$. Функция же $f(x)$ принадлежит к $\text{Lip}(\frac{1}{p} + \varepsilon - \frac{1}{p} + \alpha - \varepsilon, p) = \text{Lip}(\alpha, p)$.

Замечание 3. При $a_n \downarrow 0$ условие

$$a_n = O(n^{\frac{1}{p}-1-\alpha}), \quad 1 < p < \infty,$$

равносильно условию

$$\sum_{k=n}^{\infty} |a_k|^{p'} = O(n^{-\alpha p'}), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \quad (1.8)$$

Следовательно, в силу теоремы 4 и работы (6), при $a_n \downarrow 0$ условие (1.8) необходимо и достаточно для того, чтобы $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ принадлежала к $\text{Lip}(\alpha, p)$, $0 < \alpha < 1$, $1 < p \leq \infty$. В общем случае, без предположения $a_n \downarrow 0$, условие (1.8) при $1 < p \leq 2$ лишь необходимо для того, чтобы $f(x) \in \text{Lip}(\alpha, p)$, а при $2 \leq p \leq \infty$ оно лишь достаточно [см. (6), (7)].

ТЕОРЕМА 5. Пусть $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \in \text{Lip}(\alpha, p)$, $0 < \alpha < 1$, $1 < p \leq 2$,

$\{a_n^*\}$ — последовательность, получающаяся из $\{|a_n|\}$ перестановкой членов в порядке убывания (так что $a_n^* \geq a_{n+1}^*$). Тогда

$$f^*(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* \cos nx \in \text{Lip}(\alpha, p).$$

То же утверждение справедливо для рядов из синусов.

Доказательство. Так как, по условию, $f(x) \in \text{Lip}(\alpha, p)$, то [см. (6), (7)]

$$\sum_{k=n}^{\infty} |a_k|^{p'} = O(n^{-\alpha p'}).$$

Но тогда

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k^{*p'} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{*p'} - \sum_{k=1}^{n-1} a_k^{*p'} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^{p'} - \sum_{k=1}^{n-1} |a_k|^{p'} = \sum_{k=n}^{\infty} |a_k|^{p'}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k^{*p'} = O(n^{-\alpha p'})$$

и, в силу замечания 3, $f^*(x) \in \text{Lip}(\alpha, p)$.

Замечание 4. Для $2 < p \leq \infty$ теорема 5 неверна. Действительно, пусть

$$\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{n} \ln^2(n+1)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Тогда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n^2 \ln^2 n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{n \ln^4(n+1)} < \infty$$

и, по теореме Пейли—Зигмунда [см. (4), 5.61], существует такое распределение знаков \pm , что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pm \alpha_n \cos nx$$

является рядом Фурье функции из класса C . В силу этого, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pm \frac{a_n}{n^\alpha} \cos nx \equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

будет рядом Фурье функции класса $\text{Lip } \alpha$. Имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^* \cos nx \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\alpha} \cos nx.$$

Последний ряд не будет рядом Фурье функции класса $\text{Lip}(\alpha, p)$ ни при каком $p > 2$, ибо

$$\frac{a_n}{n^\alpha} \neq O(n^{\frac{1}{p}-1-\alpha}),$$

так как

$$\alpha_n \neq O(n^{\frac{1}{p}-1}), \quad p > 2.$$

§ 2. Преобразование рядов Фурье функций классов Липшица

1. Пусть ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (2.1)$$

является рядом Фурье функции f , принадлежащей некоторому классу K ; в этом случае условимся говорить, что и сам ряд (2.1) принадлежит классу K [см. (4), 4.3].

Пусть дана числовая последовательность $\{\lambda_n\}$, $n = 0, 1, \dots$. При ее помощи ряд (2.1) преобразуется в ряд

$$\frac{a_0 \lambda_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Для классов K_1 и K_2 тригонометрических рядов через (K_1, K_2) обозначается класс последовательностей $\{\lambda_n\}$, которые каждый ряд класса K_1 преобразуют в ряд класса K_2 .

Пусть $1 \leq p$, $r \leq \infty$, $0 < \alpha \leq 1$. Если $K_1 = \text{Lip}(\alpha, p)$, $K_2 = \text{Lip}(\alpha, r)$, то условимся класс (K_1, K_2) обозначать через $\Lambda_{\alpha; p, r}$. При $p = r$ вместо $\Lambda_{\alpha; p, p}$ будем писать $\Lambda_{\alpha; p}$. Если $K_1 = K_2 = \text{lip}(\alpha, p)$, то вместо (K_1, K_2) будем писать $\lambda_{\alpha; p}$.

Для данных α и p , $0 < \alpha \leq 1$, $1 \leq p \leq \infty$, обозначим через $K_{\alpha; p}$ класс всех тригонометрических рядов

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx),$$

для которых ряды

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$$

принадлежат к $\text{Lip}(\alpha, p)$. Известно, что $L_p \subset K_{\alpha; p}$ при $0 < \alpha < 1$ (включение строгое). Ниже включение множеств обозначается через \subseteq , а строгое включение через \subset .

В доказываемых ниже теоремах всюду предполагается, что $0 < \alpha < 1$. При рассмотрении классов $\Lambda_{\alpha; p}$, $\lambda_{\alpha; p}$, $K_{\alpha; p}$ и других с $0 < \alpha < 1$ без ограничения общности будем ограничиваться случаем рядов по косинусам с нулевым постоянным членом.

ТЕОРЕМА 6. При данном p , $1 \leq p \leq \infty$,

а) $\Lambda_{\alpha; p}$ и $K_{\alpha; p}$ не зависят от α ;

б) $\Lambda_{1; p} \subseteq \Lambda_{\alpha; p}$, $\Lambda_{1; 1} \subset \Lambda_{\alpha; 1}$, $\Lambda_{1; \infty} \subset \Lambda_{\alpha; \infty}$, $\Lambda_{1; 2} = \Lambda_{\alpha; 2}$;

в) $K_{1; p} \subset K_{\alpha; p}$.

Доказательство. а) Возьмем числа α, α' , $0 < \alpha < \alpha' < 1$. Докажем, что $\Lambda_{\alpha; p} = \Lambda_{\alpha'; p}$. Пусть $\{\lambda_n\} \in \Lambda_{\alpha; p}$ и пусть $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda'_n \cos nx$ — любой ряд класса $\text{Lip}(\alpha', p)$. Имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \lambda'_n \cos nx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha' - \alpha}} \lambda'_n n^{\alpha' - \alpha} \lambda'_n \cos nx.$$

Ряд с коэффициентами $n^{\alpha' - \alpha} \lambda'_n$ принадлежит классу $\text{Lip}(\alpha, p)$ [см. (1)] и так как $\{\lambda_n\} \in \Lambda_{\alpha; p}$, то ряд с коэффициентами $\lambda_n n^{\alpha' - \alpha} \lambda'_n$ также принад-

лежит к $\text{Lip}(\alpha, p)$. Наконец, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a'_n \cos nx$ будет принадлежать к $\text{Lip}(\alpha', p)$ [см. (1)]. Тем самым доказано, что $\Lambda_{\alpha; p} \subseteq \Lambda_{\alpha'; p}$. Аналогично, $\Lambda_{\alpha'; p} \subseteq \Lambda_{\alpha; p}$. Независимость $K_{\alpha; p}$ от α доказывается точно так же.

б) Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad (2.2)$$

— любой фиксированный ряд класса $\text{Lip}(\alpha, p)$ и пусть $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos nx$ — любой ряд класса $L_{p'}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Возьмем любую последовательность $\{\lambda_n\} \in \Lambda_{1; p}$. Тогда [см. (1)] $\{\lambda_n\} \in (L_p, L_p)$, а значит, и $\{\lambda_n\} \in (L_{p'}, L_{p'})$ [см. (4), 4.6]. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{n+1} (\lambda_k a_k) c_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} (\lambda_k a_k) c_k. \quad (2.3)$$

Ряд с коэффициентами $\lambda_k c_k$ принадлежит к $L_{p'}$, а тогда, в силу леммы 2, сумма ряда (2.3) будет $O(n^{-\alpha})$, что, по той же лемме, достаточно для того, чтобы ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n \cos nx \quad (2.4)$$

принадлежал к $\text{Lip}(\alpha, p)$. Итак, доказано, что $\Lambda_{1; p} \subseteq \Lambda_{\alpha; p}$.

Рассмотрим последовательность $\{\lambda_n\}$ с $\lambda_{2^k} = \pm 1$, $k = 0, 1, \dots$, $\lambda_n = 0$ при $n \neq 2^k$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cos nx$ при некотором распределении знаков \pm не будет рядом Фурье — Стильтеса [см. (4), 3.8, 5.6] и, следовательно, $\{\lambda_n\} \notin \Lambda_{1; p}$ при $p = 1, \infty$ [см. (4), 4.6]. Но при любом p эта последовательность $\{\lambda_n\}$ принадлежит к каждому $\Lambda_{\alpha; p}$, ибо лакунарный ряд с коэффициентами порядка $n^{-\alpha}$ будет класса $\text{Lip}(\alpha, p)$ [см. (6)].

Для доказательства равенства $\Lambda_{1; 2} = \Lambda_{\alpha; 2}$ достаточно заметить, что $\Lambda_{1; 2}$ и $\Lambda_{\alpha; 2}$ состоят из всех ограниченных последовательностей $\{\lambda_n\}$.

в) Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx \quad (2.5)$$

принадлежит к $K_{1; p}$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n} \cos nx$ принадлежит к $\text{Lip}(1, p)$ и, следовательно [см. (1)], ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^{1-\alpha} \frac{\alpha_n}{n} \cos nx \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n^{\alpha}} \cos nx$ принадлежит к $\text{Lip}(\alpha, p)$. Тем самым показано, что $K_{1; p} \subseteq K_{\alpha; p}$. Чтобы показать, что включение строгое, рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sin nx$, где $\{\lambda_n\}$ — лакунарная

последовательность, определенная выше. Этот ряд, по предыдущему, принадлежит $K_{\alpha; p}$ и не принадлежит к $K_{1; 1}$, ибо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cos nx$ не является рядом Фурье — Стильеса.

ТЕОРЕМА 7.

$$\Lambda_{\alpha; p} = \lambda_{\alpha; p}.$$

Доказательство. Пусть $\{\lambda_n\} \in \Lambda_{\alpha; p}$ и f — любая функция из $\text{lip}(\alpha, p)$ с рядом Фурье (2.2). Покажем, что ряд (2.4) принадлежит к $\text{lip}(\alpha, p)$. Так как $f \in \text{lip}(\alpha, p)$, то, по теореме 1, существует вогнутая последовательность $\{\Lambda_n\}$ с $\Lambda_n \rightarrow \infty$ такая, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_n a_n \cos nx$$

будет класса $\text{Lip}(\alpha, p)$. Но тогда и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_n \lambda_n a_n \cos nx$$

будет класса $\text{Lip}(\alpha, p)$. Из этого следует, что ряд (2.4) будет класса $\text{lip}(\alpha, p)$. Тем самым показано, что $\Lambda_{\alpha; p} \subseteq \lambda_{\alpha; p}$.

Пусть теперь $\{\lambda_n\} \in \lambda_{\alpha; p}$ и f — любая функция из $\text{Lip}(\alpha, p)$ с рядом Фурье (2.2). При любой выпуклой последовательности $\{\omega_n\}$ с $\omega_n \rightarrow 0$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n a_n \cos nx$$

принадлежит $\text{lip}(\alpha, p)$ (теорема 2). Но тогда и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \lambda_n a_n \cos nx$$

принадлежит $\text{lip}(\alpha, p)$. А из этого, по теореме 3, следует, что ряд (2.4) будет класса $\text{Lip}(\alpha, p)$. Этим показано, что $\lambda_{\alpha; p} \subseteq \Lambda_{\alpha; p}$. Теорема доказана.

Замечание 5. Аналогично устанавливается следующее предложение:

Пусть последовательность $\{\lambda_n\}$ преобразует ряды класса $\text{lip}(\alpha, p)$ в ряды класса $\text{Lip}(\beta, q)$, $0 < \alpha, \beta < 1$, $1 \leq p, q \leq \infty$. Тогда она преобразует ряды класса $\text{Lip}(\alpha, p)$ в ряды класса $\text{Lip}(\beta, q)$, причем ряды класса $\text{lip}(\alpha, p)$ преобразуются в ряды класса $\text{lip}(\beta, q)$.

ЛЕММА 3*. Для того чтобы ряд (2.5) принадлежал к $K_{\alpha; p'}$, $1 < p' < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы при любом ряде (2.2) из класса

* Если вместо (2.6) взять

$$\sum_{k=n+1}^{2n-1} \left(\frac{k}{n} - 1 \right) a_k \alpha_k + \sum_{k=2n}^{\infty} a_k \alpha_k = O(n^{-\alpha}), \quad (2.6')$$

то лемма имеет место и при $p' = 1$ и ∞ . (Примеч. при корректуре.)

$$\text{Lip}(\alpha, p), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \alpha_k = O(n^{-\alpha}) \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (2.6)$$

Доказательство. Докажем необходимость (2.6). При $0 < \beta < \alpha$ ряд с коэффициентами $a_k k^\beta$ будет рядом Фурье функции $q(x) \in \text{Lip}(\alpha - \beta, p)$ с частными суммами $\gamma_n(x)$ [см. (1)]. В силу определения $K_{\alpha; p'}$, ряд с коэффициентами $\alpha_k k^{-\beta}$ будет рядом Фурье функции $\varphi(x) \in \text{Lip}(\beta, p')$ с частными суммами $\tau_n(x)$. Мы имеем:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \alpha_k \right| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k k^\beta \cdot \alpha_k k^{-\beta} \right| = \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{2\pi} (q - \gamma_n)(\varphi - \tau_n) dx \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi} \|q - \gamma_n\|_n \cdot \|\varphi - \tau_n\|_{p'} = O(n^{-(\alpha-\beta)-\beta}) = O(n^{-\alpha}). \end{aligned}$$

Докажем достаточность условия (2.6). Пусть ряд (2.5) таков, что при каждой $f \in \text{Lip}(\alpha, p)$ выполняется (2.6). Следовательно,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k k^\alpha \cdot \alpha_k k^{-\alpha} = O(n^{-\alpha}).$$

Ряды с коэффициентами $a_k k^\alpha$ принадлежат к классу $K_{\alpha; p} \supset L_p$. Поэтому из (2.6) следует, что ряд с коэффициентами $\alpha_k k^{-\alpha}$ есть ряд класса $L_{p'}$ [см. (4), 4.63)], и более того, класса $\text{Lip}(\alpha, p')$ (лемма 2). А это означает, что ряд (2.5) принадлежит к $K_{\alpha; p'}$.

ТЕОРЕМА 8.* При $1 < p, r < \infty$ $\Lambda_{\alpha; p, r} = \Lambda_{\alpha; r', p'}$, в частности, $\Lambda_{\alpha; p} = \Lambda_{\alpha; p'}$.

Доказательство. Пусть $\{\lambda_n\} \in \Lambda_{\alpha; p, r}$, f — любая функция из $\text{Lip}(\alpha, p)$ с рядом Фурье (2.2) и пусть (2.5) — любой ряд из $K_{\alpha; r'}$. Так как ряд с коэффициентами $\lambda_k a_k$ принадлежит $\text{Lip}(\alpha, r)$, то, по предыдущей лемме,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} (\lambda_k a_k) \alpha_k = O(n^{-\alpha})$$

или

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k (\lambda_k \alpha_k) = O(n^{-\alpha}).$$

А тогда, по лемме, ряд с коэффициентами $\lambda_k \alpha_k$ принадлежит $K_{\alpha; p'}$. Но это означает, что $\{\lambda_n\} \in \Lambda_{\alpha; r', p'}$. Аналогично доказывается, что $\Lambda_{\alpha; r', p'} \subseteq \Lambda_{\alpha; p, r}$.

* Теорема верна и при $p, r = 1$ или ∞ . Доказательство основывается на равенстве (2.6').

ТЕОРЕМА 9. * Для того чтобы последовательность $\{\lambda_n\} \in \Lambda_{\alpha; p, \infty}$, $0 < \alpha < 1$, $1 < p < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cos nx \in K_{\alpha; p'}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Доказательство. Докажем достаточность условия. Пусть ряд (2.2) — любой ряд класса $\text{Lip}(\alpha, p)$ и пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cos nx \in K_{\alpha; p'}.$$

Докажем, что тогда ряд (2.4) принадлежит $\text{Lip} \alpha$. Для этого возьмем

любой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos nx$ класса L и рассмотрим ряд

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} (\lambda_k a_k) c_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k (\lambda_k c_k).$$

Так как последовательность $\{c_n\} \in (L_{p'}, L_{p'})$ [см. (4), 4.62], то ряд с коэффициентами $c_k \lambda_k$, по теореме 6, принадлежит к $K_{\alpha; p'}$. Из этого, по лемме 3, следует, что сумма ряда есть $O(n^{-\alpha})$ и, следовательно, ряд (2.4) принадлежит $\text{Lip} \alpha$, причем даже

$$|f^* - s_n^*| = O(n^{-\alpha}).$$

Докажем необходимость условия. Пусть $\{\lambda_n\} \in \Lambda_{\alpha; p, \infty}$. Тогда при любом ряде (2.2) из $\text{Lip}(\alpha, p)$ ряд (2.4) принадлежит $\text{Lip} \alpha$. Последнее означает, что равенство (2.3) выполняется при любом ряде $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos nx \in L$. Таким образом, имеем:

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{n+1} a_k (\lambda_k c_k) + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k (\lambda_k c_k) = O(n^{-\alpha}).$$

Отсюда следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n c_n \cos nx \in K_{\alpha; p'}$. Здесь последовательность $\{c_n\}$ может быть, в частности, любой выпуклой последовательностью с $c_n \rightarrow 0$. Поэтому и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cos nx \in K_{\alpha; p'}$.

ТЕОРЕМА 10. Для каждого $p \neq 2$, $1 \leq p \leq \infty$, существуют такие последовательности $\{\lambda_n\}$, что $\lambda_n \rightarrow 0$, $\{|\lambda_n|\}$ — выпуклая последовательность и $\{\lambda_n\} \in \Lambda_{\alpha; p}$.

Доказательство. Для данного $1 \leq p < 2$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{p}-1-\alpha} \cos nx$$

* Теорема верна и при $p = 1$ или ∞ . (Примеч. при корректуре.)

принадлежит $\text{Lip}(\alpha, p)$, $0 < \alpha < 1$ (см. теорему 4). Но при $\frac{1}{p} - 1 - \alpha \geq -\frac{1}{2}$ (т. е. $\alpha \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$) он не принадлежит к L_2 . В силу этого, существует такое распределение знаков \pm , что ряд

$$\sum \pm n^{\frac{1}{p}-1-\alpha} \cos nx$$

не будет принадлежать L и тем более $\text{Lip}(\alpha, p)$. Из этого следует существование такой выпуклой последовательности $\{\omega_n\}$ с $\omega_n \rightarrow 0$, что ряд

$$\sum \pm \omega_n n^{\frac{1}{p}-1-\alpha} \cos nx \notin \text{Lip}(\alpha, p).$$

Следовательно, $\{\lambda_n\} \equiv \{\pm \omega_n\}$ не принадлежит $\Lambda_{\alpha, p}$.

В замечании 4 приводился ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \pm \frac{\alpha_n}{n^{\alpha}} \cos nx$, принадлежащий $\text{Lip} \alpha$,

для которого ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n^{\alpha}} \cos nx$ не принадлежит $\text{Lip}(\alpha, p)$ ни при каком

$p > 2$. Далее рассуждаем аналогично предыдущему.

ТЕОРЕМА 11. Для того чтобы последовательность $\{\lambda_n\}$ преобразовывала любой ряд Фурье—Стилтьеса

$$dF(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (2.7)$$

в ряд

$$\frac{a_0 \lambda_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (2.8)$$

класса $\text{Lip}(\alpha, p)$, $0 < \alpha < 1$, $1 \leq p \leq \infty$, необходимо и достаточно, чтобы ряд

$$\frac{\lambda_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cos nx \quad (2.9)$$

принадлежал $\text{Lip}(\alpha, p)$.

Доказательство. Докажем необходимость условия. Рассмотрим ряд $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$, являющийся рядом Фурье—Стилтьеса. При помощи $\{\lambda_n\}$ он преобразуется в ряд

$$\frac{\lambda_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cos nx,$$

который, следовательно, должен принадлежать $\text{Lip}(\alpha, p)$.

Докажем достаточность условия. Пусть $\sigma_n(x)$, $\sigma_n^*(x)$ и $l_n(x)$ — соответственно $(C, 1)$ -средние рядов (2.7), (2.8) и (2.9).

Мы имеем:

$$\sigma_n^*(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} l_n(x-t) dF(t).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \| \sigma_n^* - \sigma_m^* \|_p &= \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} dx \left[\int_0^{2\pi} |l_n(x-t) - l_m(x-t)| dF(t) \right]^p \right\}^{1/p} \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |dF(t)| \left[\int_0^{2\pi} |l_n(x-t) - l_m(x-t)|^p dx \right]^{1/p} = A \| l_n(x) - l_m(x) \|_p. \end{aligned}$$

Таким образом, из принадлежности (2.9) к $\text{Lip}(\alpha, p)$ следует принадлежность (2.8) к $\text{Lip}(\alpha, p)$.

Следствие. Для того чтобы последовательность $\{\lambda_n\}$ преобразовывала любой ряд класса $\text{Lip}(1, 1)$ в ряд класса $\text{Lip}(\alpha, p)$, $0 < \alpha < 1$, $1 \leq p \leq \infty$, необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n} \cos nx$ принадлежал $\text{Lip}(\alpha, p)$.

§ 3. Об аналогах теорем Белмана, Харди и Лу Цзин-цуня.

1. Докажем следующую теорему:

ТЕОРЕМА 12. 1) Пусть $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ принадлежит $\text{Lip}(\alpha, p)$,

$0 < \alpha < 1$, $1 < p < \infty$, и пусть $F(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx$, где $A_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k k^{-1}$.

Тогда и $F(x) \in \text{Lip}(\alpha, p)$.

2) То же утверждение справедливо для рядов из синусов.

Эта теорема является аналогом теоремы Белмана [см. (8)], в которой f и F принадлежат L_p , $1 < p < \infty$. При доказательстве теоремы 12 будет использована следующая лемма:

ЛЕММА 4. Для того чтобы суммируемая функция $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ принадлежала к $\text{Lip}(\alpha, p)$, $0 < \alpha < 1$, $1 < p < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы для любой функции $g(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos nx$ из класса $L_{p'}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$,

$$\sum_{l=2^{k-1}+1}^{2^k} a_l c_l = O(2^{-k\alpha}) \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 2 и может быть опущено.

Доказательство теоремы 12. а) Пусть $2 \leq p < \infty$. Как известно [см. (6), (7)], в этом случае для доказательства того, что функция $F(x) \in \text{Lip}(\alpha, p)$, достаточно показать, что

$$A_n = O(n^{\frac{1}{p}-1-\alpha}).$$

Мы имеем:

$$A_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k k^{\frac{1}{p'}-1-\frac{1}{p}}.$$

По условию теоремы, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ с частными суммами s_n принадлежит $\text{Lip}(\alpha, p)$. В силу теоремы 4, ряд $\varphi(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ с частными суммами t_n принадлежит $\text{Lip}(\frac{1}{p'}, p')$. Но тогда, по равенству Парсеваля,

$$|A_n| = \left| \sum_{k=n}^{\infty} a_k k^{\frac{1}{p'}-1-\frac{1}{p'}} \right| = \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{2\pi} (f - s_{n-1})(\varphi - t_{n-1}) dx \right| \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{\pi} \|f - s_{n-1}\|_p \cdot \|\varphi - t_{n-1}\|_{p'} = O(n^{-\alpha-\frac{1}{p'}}) = O(n^{\frac{1}{p}-1-\alpha}).$$

Отметим, что оценка для A_n получена для любого $1 < p < \infty$.

б) Пусть $1 < p < 2$. Возьмем любую функцию $g(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos nx$ из класса $L_{p'}$. Мы имеем:

$$\sum_{l=2^{k-1}+1}^{2^k} A_l c_l = \sum_{l=2^{k-1}+1}^{2^k} c_l \sum_{m=l}^{\infty} a_m m^{-1} = \sum_{m=2^{k-1}+1}^{\infty} a_m m^{-1} \sum_{l=2^{k-1}+1}^{\min(m, 2^k)} c_l = \\ = \sum_{m=2^{k-1}+1}^{2^k} a_m m^{-1} \sum_{l=2^{k-1}+1}^m c_l + \sum_{m=2^k+1}^{\infty} a_m m^{-1} \sum_{l=2^{k-1}+1}^{2^k} c_l \equiv I_1 + I_2.$$

Так как $g \in L_{p'}$, то [см. (8)]

$$\sum_{l=2^{k-1}+1}^{2^k} c_l = O(2^{\frac{k}{p'}}).$$

В силу доказанного в п. а),

$$\sum_{m=2^{k-1}+1}^{\infty} a_m m^{-1} = O\left(2^k \left(\frac{1}{p}-1-\alpha\right)\right) = O\left(2^k \left(-\frac{1}{p'}-\alpha\right)\right).$$

Отсюда следует, что

$$I_2 = O(2^{-k\alpha}).$$

Оценим I_1 . Так как $g \in L_{p'}$, то

$$\sum_{l=2^{k-1}+1}^m c_l = O(2^{\frac{k}{p'}}).$$

Далее,

$$\sum_{m=2^{k-1}+1}^{2^k} |a_m| m^{-1} = O\left(2^k \left(\frac{1}{p}-1-\alpha\right)\right),$$

что можно получить при помощи неравенства Гёльдера и теоремы Хаусдорфа — Янга (см. замечание 3).

Итак, при любой $g \in L_{p'}$

$$\sum_{l=2^{k-1}+1}^{2^k} A_l c_l = O(2^{-k\alpha}).$$

Отсюда, по лемме 4, следует, что $F \in \text{Lip}(\alpha, p)$.

Утверждение 2) следует из 1).

ТЕОРЕМА 13. Пусть

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \in \text{Lip}(\alpha, p), \quad 0 < \alpha < 1, \quad 1 < p \leq 2,$$

и пусть

$$F_1(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=n}^{\infty} |a_k| k^{-1} \right) \cos nx, \quad F_2(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k^* k^{-1} \right) \cos nx,$$

где $\{a_n^*\}$ получается из $\{|a_n|\}$ перестановкой членов в порядке убывания. Тогда $F_1(x)$ и $F_2(x)$ также принадлежат $\text{Lip}(\alpha, p)$. При $p > 2$ эти утверждения неверны.

Доказательство. Из условия $f \in \text{Lip}(\alpha, p)$ следует [см. (6), (?)], что

$$\sum_{k=n}^{\infty} |a_k|^{p'} = O(n^{-\alpha p'}).$$

Оценим коэффициенты у $F_1(x)$. Мы имеем:

$$\sum_{k=n}^{\infty} |a_k| k^{-1} \leq \left(\sum_{k=n}^{\infty} |a_k|^{p'} \right)^{1/p'} \left(\sum_{k=n}^{\infty} k^{-p} \right)^{1/p} = O(n^{-\alpha + (-p+1)/p}).$$

Из полученной оценки коэффициентов и их монотонного убывания, по теореме 4, следует, что $F_1 \in \text{Lip}(\alpha, p)$. Так как $f \in \text{Lip}(\alpha, p)$, то, по теореме 5, и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^* \cos nx \in \text{Lip}(\alpha, p),$$

а тогда принадлежность $F_2(x)$ к $\text{Lip}(\alpha, p)$ будет вытекать из предыдущей теоремы.

Как показано в замечании 4*, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pm \frac{1}{n^{\frac{1}{2} + \alpha} \ln^2(n+1)} \cos nx \equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

при некотором распределении знаков \pm принадлежит $\text{Lip}(\alpha, p)$ при каждом $p > 2$. Но

$$\sum_{k=n}^{\infty} |a_k| k^{-1} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\frac{1}{2}+\alpha} \ln^2(k+1)} \neq O\left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{1-\frac{1}{p}+1+\alpha}}\right)$$

при каждом $p > 2$. Следовательно, $\sum_{k=n}^{\infty} |a_k| k^{-1}$ не будет порядка $n^{\frac{1}{p}-1-\alpha}$,

и в этом случае $F_1 \notin \text{Lip}(\alpha, p)$, $p > 2$.

2. Докажем следующую теорему:

ТЕОРЕМА 14. 1) Пусть $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \in \text{Lip}(\alpha, p)$, $1 < p \leq 2$,

$0 < \alpha < \frac{1}{p}$, и пусть $\tilde{\varphi}(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n \cos nx$, где $\tilde{a}_n = n^{-1} \sum_{k=1}^n |a_k|$. Тогда и

$\tilde{\varphi} \in \text{Lip}(\alpha, p)$. При $\alpha \geq \frac{1}{p}$ это утверждение неверно.

2) То же справедливо для рядов из синусов.

Доказательство. Из условия $f \in \text{Lip}(\alpha, p)$ следует, по теореме 5, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^* \cos nx \in \text{Lip}(\alpha, p)$$

и, следовательно,

$$a_n^* = O(n^{\frac{1}{p}-1-\alpha}).$$

Оценим $\sum_{k=1}^n |a_k|$. При $\alpha < \frac{1}{p}$ имеем:

$$\sum_{k=1}^n |a_k| \leq \sum_{k=1}^n a_k^* \leq A \sum_{k=1}^n k^{\frac{1}{p}-1-\alpha} = O(n^{\frac{1}{p}-\alpha}).$$

Возьмем любую функцию $g(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos nx$ из класса $L_{p'}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

При $k = 2, 3, \dots$ имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{l=2^{k-1}+1}^{2^k} \tilde{a}_l c_l &= \sum_{l=2^{k-1}+1}^{2^k} c_l l^{-1} \sum_{m=1}^l |a_m| = \sum_{m=1}^{2^{k-1}+1} |a_m| \sum_{l=2^{k-1}+1}^{2^k} c_l l^{-1} + \\ &+ \sum_{m=2^{k-1}+2}^{2^k} |a_m| \sum_{l=m}^{2^k} c_l l^{-1}. \end{aligned}$$

Так как $g \in L_{p'}$, то, как следует из работы (8), при $N > 2^{k-1}$

$$\sum_{l=2^{k-1}+1}^N c_l l^{-1} = O(2^{-\frac{k}{p}}).$$

Далее, используя оценку для $\sum_{k=1}^n |a_k|$, получим:

$$\sum_{l=2^{k-1}+1}^{2^k} \tilde{\alpha}_l c_l = O\left(2^k \left(\frac{1}{p} - \alpha\right) - \frac{k}{p}\right) = O(2^{-k\alpha}).$$

Отсюда, по лемме 4, следует, что $\tilde{\varphi} \in \text{Lip}(\alpha, p)$.

Покажем, что при $\alpha \geq \frac{1}{p}$ утверждение неверно. Пусть $f(x) = \cos x$. Тогда

$$\tilde{\varphi} \sim \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \cos nx \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{p}-1-\frac{1}{p}} \cos nx.$$

По теореме 4, $\tilde{\varphi} \in \text{Lip}\left(\frac{1}{p}, p\right)$, $\tilde{\varphi} \notin \text{Lip}\left(\frac{1}{p} + \varepsilon, p\right)$, $\varepsilon > 0$. Но функция f принадлежит $\text{Lip}(1, p)$. Мы показали, что теорема 14 неверна при $\alpha > \frac{1}{p}$.

Пусть теперь $f \sim \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \cos nx$. Она принадлежит $\text{Lip}\left(\frac{1}{p}, p\right)$. Для нее

$$\tilde{\alpha}_n > \frac{\ln n}{n} \quad \text{и} \quad \sum_{k=n}^{\infty} \tilde{\alpha}_k^{p'} \neq O(n^{-\frac{p'}{p}}).$$

Следовательно, $\tilde{\varphi} \notin \text{Lip}\left(\frac{1}{p}, p\right)$.

Замечание 6. При $p > 2$ предыдущая теорема неверна. Пусть $0 < \alpha < \frac{1}{p}$. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pm \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\alpha} \ln^2(n+1)} \cos nx \equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

при некотором распределении знаков \pm принадлежит $\text{Lip}(\alpha, p)$ при каждом $p > 2$. Но

$$n^{-1} \sum_{k=1}^n |a_k| = n^{-1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{\frac{1}{2}+\alpha} \ln^2(k+1)} \neq O\left(n^{-1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{1-\frac{1}{p}+\alpha}}\right)$$

при каждом $p > 2$. Следовательно, $n^{-1} \sum_{k=1}^n |a_k|$ не будет порядка $n^{\frac{1}{p}-1-\alpha}$.

Так как $|a_n|$ монотонно убывают, то и $n^{-1} \sum_{k=1}^n |a_k|$ монотонно убывают.

Отсюда, по теореме 4, следует, что $\tilde{\varphi} \notin \text{Lip}(\alpha, p)$, $p > 2$.

ТЕОРЕМА 15.*1) Пусть $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \in \text{Lip}(\alpha, p)$, $1 \leq p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{1}{p}$, и пусть $\varphi(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx$, где $\alpha_n = n^{-1} \sum_{k=1}^n a_k$. Тогда и $\varphi \in \text{Lip}(\alpha, p)$. При $\alpha \geq \frac{1}{p}$ это утверждение неверно.

То же справедливо для рядов из синусов.

Эта теорема является аналогом теоремы Харди [см. (9)], в которой и φ принадлежат L_p , $1 \leq p < \infty$.

Доказательство. Наряду с $\varphi(x)$ рассмотрим

$$\frac{\varphi^*}{2} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^* \cos nx,$$

где $\alpha_n^* = \alpha_n - \frac{a_n}{2n}$. Функции φ и φ^* могут принадлежать $\text{Lip}(\alpha, p)$ лишь одновременно, ибо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2n} \cos nx \in \text{Lip}(\alpha, p)$$

вместе с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$. Поэтому ниже мы будем доказывать, что

$\varphi^* \in \text{Lip}(\alpha, p)$ при $0 < \alpha < \frac{1}{p}$. Согласно работе (9), четная функция $\varphi^*(x)$ при $0 < x \leq \pi$ выражается формулой

$$\varphi^*(x) = \int_x^{\pi} \frac{f(u)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} u} du.$$

В достаточно малой окрестности $x = \pi$ $\varphi^* \in \text{Lip}(1, p)$, ибо в ней подынтегральная функция принадлежит L_p .

При $h > 0$ и $x > 0$, $x + h \leq \pi$

$$\varphi^*(x) - \varphi^*(x+h) = \int_x^{x+h} \frac{f(u)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} u} du.$$

Сначала докажем теорему для $p = 1$. Мы имеем:

* При обобщении теорем 14 и 15 на случай $\psi(h)$ (вместо h^α) ограничение $\alpha < \frac{1}{p}$ заменяется условием:

$$\sum_{m=1}^n m^{\frac{1}{p}-1} \psi\left(\frac{1}{m}\right) = O\left[n^{\frac{1}{p}} \psi\left(\frac{1}{n}\right)\right]. \quad \left(\frac{B_1}{p}\right)$$

Ему эквивалентны условия, вводимые по аналогии со случаем, когда берется (B_k) с натуральным k . (Примеч. при корректуре.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi-h} |\varphi^*(x) - \varphi^*(x+h)| dx &= \int_0^{\pi-h} dx \left| \int_x^{x+h} \frac{f(u)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} u} du \right| \leq 2 \int_0^h \frac{|f(u)|}{u} du \int_0^u dx + \\ &+ 2 \int_h^\pi \frac{|f(u)|}{u} du \int_{u-h}^u dx = 2 \int_0^h |f(u)| du + 2h \int_h^\pi \frac{|f(u)|}{u} du. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Как известно [см. (10)], из условия $f \in \operatorname{Lip}(\alpha, 1)$ следует, что

$$\int_0^h |f(u)| du = O(h^\alpha) \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

Оценим $\int_h^\pi \frac{|f(u)|}{u} du$. По формуле интегрирования по частям, получим:

$$\int_h^\pi \frac{|f(u)|}{u} du = \frac{\int_0^u |f(t)| dt}{u} \Big|_h^\pi + \int_h^\pi \frac{\int_0^u |f(t)| dt}{u^2} du.$$

Второе слагаемое $\leq A \int_h^\pi u^{-2+\alpha} du = O(h^{-1+\alpha})$. Значит,

$$\int_h^\pi \frac{|f(u)|}{u} du = O(h^{-1+\alpha}) \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

Из (3.1) следует, что

$$\int_0^{\pi-h} |\varphi^*(x) - \varphi^*(x+h)| dx = O(h^\alpha)$$

и, следовательно, $\varphi^* \in \operatorname{Lip}(\alpha, 1)$.

Пусть теперь $1 < p < \infty$. Имеем:

$$\begin{aligned} \left(\int_0^{\pi-h} |\varphi^*(x) - \varphi^*(x+h)|^p dx \right)^{1/p} &= \left(\int_0^{\pi-h} dx \left| \int_x^{x+h} \frac{f(u)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} u} du \right|^p \right)^{1/p} \leq \\ &\leq 2 \int_0^h \frac{|f(u)|}{u} du \left(\int_0^u dx \right)^{1/p} + 2 \int_h^\pi \frac{|f(u)|}{u} du \left(\int_{u-h}^u dx \right)^{1/p} = \\ &= 2 \int_0^h |f(u)| u^{-1+\frac{1}{p}} du + 2h^{\frac{1}{p}} \int_h^\pi \frac{|f(u)|}{u} du \equiv 2(I_1 + h^{\frac{1}{p}} I_2). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Известно [см. (10)], что из условия $f \in \operatorname{Lip}(\alpha, p)$, $\alpha < \frac{1}{p}$, следует:

$$\int_0^u |f(t)|^p dt = O(u^{\alpha p}).$$

В силу этого,

$$\int_0^u |f(t)| dt \leq \left(\int_0^u |f(t)|^p dt \right)^{1/p} u^{\frac{1}{p'}} = O(u^{\alpha + \frac{1}{p'}}).$$

Оценивая интегрированием по частям

$$\int_{\varepsilon}^h |f(u)| u^{-1 + \frac{1}{p'}} du$$

при $0 < \varepsilon < h$, убедимся, что интеграл I_1 конечен и имеет порядок $O(h^{\alpha})$ при $h \rightarrow 0$. Член $h^{\frac{1}{p'}} I_2$ также порядка $O(h^{\alpha})$, что устанавливается аналогично случаю $p = 1$. Таким образом, из (3.2) следует, что $\varphi^* \in \text{Lip}(\alpha, p)$. Теорема доказана. Утверждение теоремы неверно при $\alpha \geq \frac{1}{p}$, как следует из доказательства предыдущей теоремы.

3. Лу Цзин-цунь ⁽¹¹⁾ распространил теорему Белмана на некоторые функции класса L и на класс L_{∞} . Докажем аналоги этих теорем для классов $\text{Lip}(\alpha, 1)$ и $\text{Lip} \alpha$, $0 < \alpha < 1$. При этом формулировать и доказывать теоремы достаточно лишь для рядов из синусов, так как функции, сопряженные к функциям класса $\text{Lip}(\alpha, p)$, $0 < \alpha < 1$, принадлежат тому же классу.

ТЕОРЕМА 16. Пусть $g(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ принадлежит $\text{Lip}(\alpha, 1)$, $0 < \alpha < 1$, и пусть $G(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx$, где $B_n = \sum_{k=n}^{\infty} b_k k^{-1}$. Тогда и $G(x) \in \text{Lip}(\alpha, 1)$.

Доказательство. Наряду с $G(x)$ рассмотрим $G^*(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \sin nx$, где $B_n^* = B_n - \frac{b_n}{2n}$.

Как и в предыдущей теореме, достаточно доказать, что $G^* \in \text{Lip}(\alpha, 1)$. Согласно работе ⁽¹¹⁾, нечетная функция $G^*(x)$ при $0 < x \leq \pi$ выражается формулой

$$G^*(x) = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{1}{2} x \int_0^x g(t) dt.$$

В достаточно малой окрестности $x = \pi$ $G^* \in \text{Lip}(1, 1)$. Далее, при $0 < x < x + h \leq \pi$

$$\begin{aligned} G^*(x+h) - G^*(x) &= \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x+h}{2} \int_0^{x+h} g(t) dt - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \int_0^x g(t) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^x g(t) dt \left(\operatorname{ctg} \frac{x+h}{2} - \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x+h}{2} \int_x^{x+h} g(t) dt. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi-h} |G^*(x+h) - G^*(x)| dx &\leq \frac{1}{2} \int_0^{\pi-h} \left(\operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} \frac{x+h}{2} \right) dx \int_0^x |g(t)| dt + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^{\pi-h} \operatorname{ctg} \frac{x+h}{2} dx \int_x^{\pi-h} |g(t)| dt \equiv \frac{1}{2} (I_1 + I_2). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Оценим I_2 :

$$I_2 \leq \int_0^h |g(t)| dt \int_0^t \frac{dx}{\operatorname{tg} \frac{x+h}{2}} + \int_h^\pi |g(t)| dt \int_{t-h}^{\min(t, \pi-h)} \frac{dx}{\operatorname{tg} \frac{x+h}{2}} \equiv I_3 + I_4. \quad (3.4)$$

Мы имеем:

$$I_3 \leq \int_0^h |g(t)| dt \cdot h \cdot \frac{1}{h/2} = O(h^2),$$

так как из $g \in \operatorname{Lip}(\alpha, 1)$ следует [см. (10)], что $\int_0^h |g(t)| dt = O(h^\alpha)$.

Далее,

$$I_4 \leq \int_h^\pi |g(t)| \frac{h}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt \leq 2h \int_h^\pi \frac{|g(t)|}{t} dt.$$

При доказательстве предыдущей теоремы было показано, что из условия $g \in \operatorname{Lip}(\alpha, 1)$ следует, что

$$\int_h^\pi \frac{|g(t)|}{t} dt = O(h^{-1+\alpha}).$$

Поэтому

$$I_4 = O(h^2).$$

Из соотношения (3.4) следует, что и

$$I_2 = O(h^2).$$

Оценим I_1 :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^h \left(\operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} \frac{x+h}{2} \right) dx \int_0^x |g(t)| dt + \\ &+ \int_h^{\pi-h} \left(\operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} \frac{x+h}{2} \right) dx \int_0^x |g(t)| dt \equiv I_5 + I_6. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Как отмечалось выше, $\int_0^x |g(t)| dt \leq Cx^\alpha$. Поэтому имеем:

$$I_5 = \int_0^h \frac{\sin \frac{h}{2}}{\sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{x+h}{2}} dx \int_0^x |g(t)| dt \leq \int_0^h \frac{Cx^\alpha}{\frac{2}{\pi} \cdot \frac{x}{2}} dx = \\ = O\left(\int_0^h x^{-1+\alpha} dx\right) = O(h^\alpha).$$

Далее,

$$I_6 = \int_h^{\pi-h} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{x+h}{2}} dx \int_0^x |g(t)| dt \leq \frac{h}{2} \int_h^{\pi-h} \frac{Cx^\alpha}{\frac{2}{\pi} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x+h}{2}} dx = \\ = O\left(h \int_h^{\pi-h} x^{-2+\alpha} dx\right) = O(h^\alpha).$$

Из равенства (3.5) следует, что

$$I_1 = O(h^\alpha).$$

Окончательно, из соотношения (3.3) заключаем, что $G^* \in \text{Lip}(\alpha, 1)$. Теорема доказана.

Докажем аналог теоремы Лу Цзин-цуня для $\text{Lip } \alpha$.

ТЕОРЕМА 17. Пусть $g(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ принадлежит $\text{Lip } \alpha$, $0 < \alpha < 1$,

и пусть $G(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx$, где $B_n = \sum_{k=n}^{\infty} b_k k^{-1}$. Тогда и $G(x) \in \text{Lip } \alpha$.

Доказательство. Как и в предыдущей теореме, достаточно доказать, что $G^* \in \text{Lip } \alpha$. При $0 \leq x < x+h \leq \pi$ имеем:

$$G^*(x+h) - G^*(x) \leq \frac{1}{2} \left(\text{ctg } \frac{x}{2} - \text{ctg } \frac{x+h}{2} \right) \int_0^x |g(t)| dt + \\ + \frac{1}{2} \text{ctg } \frac{x+h}{2} \int_x^{x+h} |g(t)| dt \equiv \frac{1}{2} (J_1 + J_2). \quad (3.6)$$

Так как $g \in \text{Lip } \alpha$ и $g(0) = 0$, то $|g(t)| \leq Ct^\alpha$.

Оценим J_2 :

$$J_2 \leq h \frac{C(x+h)^\alpha}{\frac{x+h}{2}} = 2Ch(x+h)^{-1+\alpha} \leq 2Ch \cdot h^{-1+\alpha} = O(h^\alpha).$$

Мы имеем:

$$J_1 = \frac{\sin \frac{h}{2}}{\sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{x+h}{2}} \int_0^x |g(t)| dt.$$

Отсюда при $0 < x \leq h$ следует:

$$J_1 \leq \frac{x \cdot Cx^\alpha}{\frac{2}{\pi} \cdot \frac{x}{2}} = C\pi x^\alpha \leq C\pi h^\alpha.$$

При $h < x \leq \pi - h$

$$J_1 \leq \frac{h}{2} \frac{x \cdot Cx^\alpha}{\frac{2}{\pi} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x+h}{2}} \leq \frac{\pi^2}{2} h C x^{-1+\alpha} \leq \frac{C\pi^2}{2} h^\alpha.$$

Следовательно,

$$J_2 = O(h^\alpha).$$

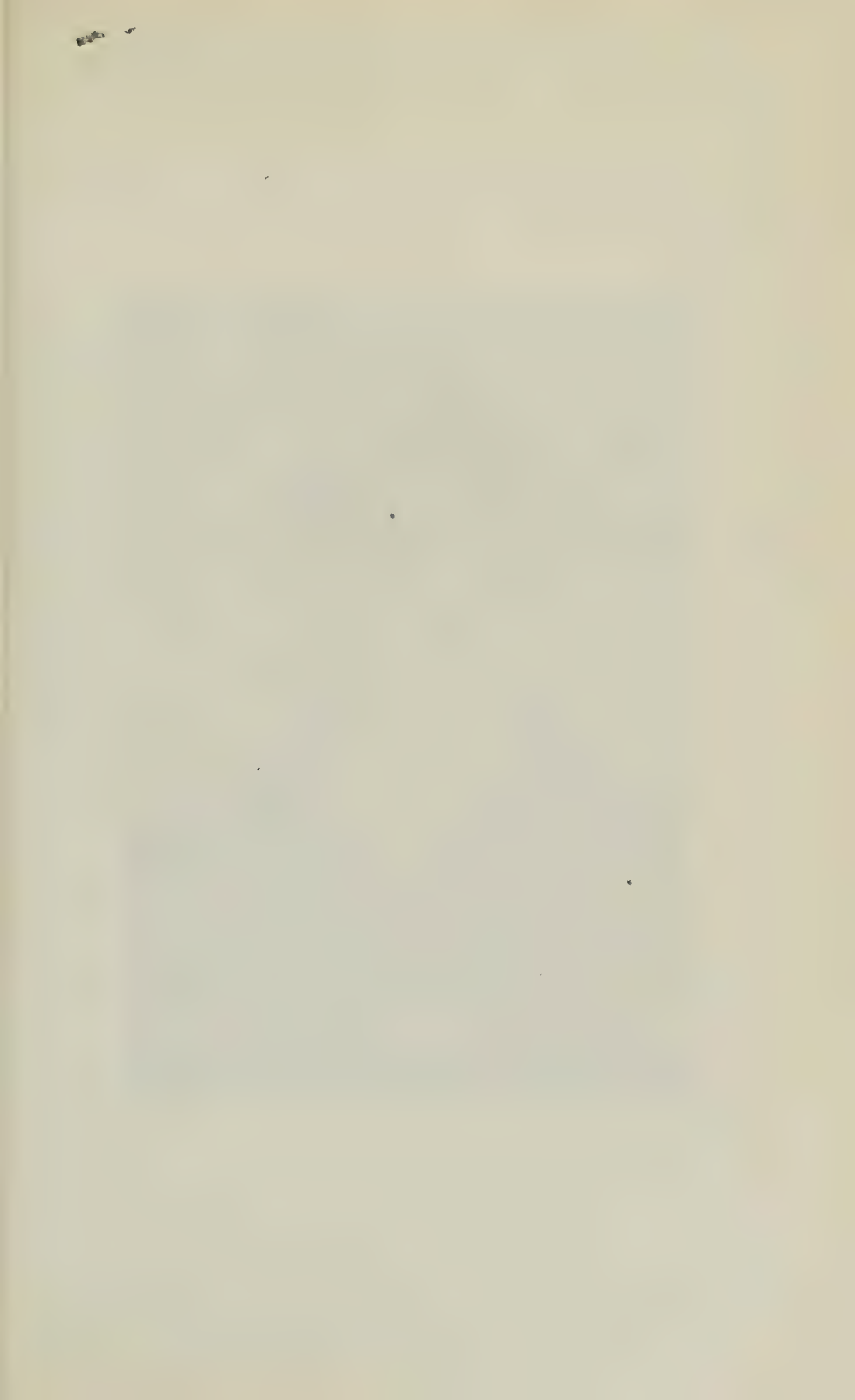
Из соотношения (3.6) выводим, что $G^* \in \text{Lip } \alpha$. Теорема доказана.

Поступило

21. V. 1956

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Hardy G. H., Littlewood J. E., Some properties of fractional integrals. I, Math. Z., 27 (1928), 565—606.
- ² Quade E. S., Trigonometric approximation in the mean, Duke Math. J., 3, № 3 (1937), 529—543.
- ³ Salem R., Sur les transformations des séries de Fourier, Fundam. math., 33 (1945), 108—114.
- ⁴ Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М.—Л., ГОНТИ, 1939.
- ⁵ Hardy G. H., Littlewood J. E., A convergence criterion for Fourier series, Math. Z., 28 (1928), 612—634.
- ⁶ Lorentz G. G., Fourier-Koeffizienten und Funktionenklassen, Math. Z., 51, № 2 (1948), 135—149.
- ⁷ Тиман А. Ф., Тиман М. Ф., Обобщенный модуль непрерывности и наилучшее приближение в среднем, Доклады Ак. Наук СССР, 71 (1950), 17—20.
- ⁸ Bellman R., A note on a theorem of Hardy on Fourier constants, Bull. Amer. Math. Soc., 50 (1944), 741—744.
- ⁹ Hardy G. H., Notes on some points in the integral calculus, Messenger Math., 58 (1928), 50—52.
- ¹⁰ Kuttner B., Some theorems on fractional derivatives, Proc. London Math. Soc., 3 (1953), 480—497.
- ¹¹ Lo Ching-Tsün, Note on the properties of Fourier coefficients, Amer. J. Math., 71 (1949), 269—282.
- ¹² Бари Н. К. и Стечкин С. Б., Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций, Труды Моск. матем. об-ва, 5 (1956), 483—522.





С. Л. СОБОЛЕВ

К СЕМИДЕСЯТИЛЕТИЮ ВЛАДИМИРА ИВАНОВИЧА СМИРНОВА

10 июня 1957 года исполнилось 70 лет со дня рождения академика Владимира Ивановича Смирнова.

Воспитанник Петербургского университета, Владимир Иванович Смирнов в своем творчестве непосредственно продолжает традиции Чебышева, Ляпунова и своего прямого учителя В. А. Стеклова. Характерные черты деятельности этих замечательных ученых, ясность мысли, конкретность содержания, связь с прикладными ветвями математики отличают в равной мере и труды Владимира Ивановича. Однако при всем этом с первых шагов своего научного пути он начинает двигаться в направлении, новом для традиций Петербургской школы, избрав для себя теорию функций комплексного переменного, к тому времени очень слабо у нас разрабатывавшуюся.

Окончив университет в 1910 году, Владимир Иванович занимается классическим вопросом обращения дифференциального уравнения второго порядка с четырьмя особыми точками. Задача эта состоит в изучении независимого переменного как функции от частного двух интегралов, зависящей от параметров. Такими параметрами служат основной параметр, входящий в уравнение, а также четвертая особая точка.

В своей магистерской диссертации, защищенной в 1918 году, Владимир Иванович полностью решает задачу обращения и дает глубокое исследование ее; к этой задаче приводится, между прочим, ряд спектральных проблем теории дифференциальных операторов рассматриваемого типа. Исследуя группу уравнений как функции параметров, В. И. Смирнов указывает спектр обращения. Владимир Иванович с успехом проводит исследование группы движений плоскости Лобачевского. Как известно, плоскость Лобачевского в интерпретации Пуанкаре представляет собою полуплоскость, в которой прямым соответствуют полуокружности с центром на границе этой полуплоскости. Группа движений этой плоскости в такой интерпретации оказывается непосредственно группой комплексных преобразований, и ее изучение связано с изучением функций, инвариантных при некоторых таких преобразованиях. Это приводит Владимира Ивановича к глубоким результатам в теории автоморфных функций. В частности, ему удается построить пример органиченной автоморфной функции.

Большая группа работ В. И. Смирнова относится к теории параметрического представления классов функций комплексного переменного и теории ортогональных полиномов по замкнутой кривой Жордана.

С 1930 года Владимир Иванович начинает цикл исследований по уравнениям математической физики. Им, совместно с С. Л. Соболевым, построен класс функционально-инвариантных решений волнового уравнения и при помощи этого уравнения разрешены в замкнутой форме задачи отражения упругих волн от плоских границ. Продолжая изыскания по волновому уравнению, Владимир Иванович вводит новый метод неполного разделения переменных, дающий возможность решить несколько трудных задач. Необходимо упомянуть также работы Владимира Ивановича по функционально-инвариантным решениям уравнений с переменными коэффициентами, существенно дополняющие его прежние исследования.

Наряду с научной деятельностью и даже, быть может, прежде всего Владимир Иванович — блестящий педагог, воспитатель новых поколений ученых. Начав свою педагогическую деятельность с преподавания в средней школе (с 1910 по 1912 г.), Владимир Иванович уже с 1912 года работает в высших учебных заведениях и с 1915 года — в Петербургском университете. С этого времени им воспитано очень много талантливых математиков; среди них академики, члены-корреспонденты Академии наук СССР, профессора, доктора наук, кандидаты наук.

В. И. Смирнову принадлежит великолепная советская энциклопедия математического анализа — «Курс высшей математики», переведенный на многие иностранные языки.

Самоотверженно, не жалея сил, Владимир Иванович оказывает помощь на тех участках университетской работы, где она более всего нужна. При этом ему приходилось иметь дело и с анализом, и с теорией функций, и с теорией упругости, всюду внося свой стиль принципиальности и горячую любовь к делу.

Владимир Иванович Смирнов заслуженно пользуется любовью и уважением не только всех советских математиков, но и каждого, кому приходилось общаться с ним.

СПИСОК ТРУДОВ В. И. СМЕРНОВА

1913

1. К вопросу о колебательном разряде конденсатора (*ЖРФХО, отд. физ.*, т. 45, в. 5, стр. 276—282; совместно с А. Фридманом).

1918

2. Задачи обращения линейного дифференциального уравнения второго порядка с четырьмя особыми точками (Пг., 307 стр. Стеклогр. изд.).
3. Приложения принципа сходимости к теории униформизации (*Сообщ. Харьк. матем. об-ва*, серия 2, т. 16, вып. 1—2, стр. 39—54).

1920

4. Sur quelques points de la théorie des équations différentielles linéaires de second ordre et des fonctions automorphes (*Comptes rendus, Paris*, t. 171, p. 510—512).

1921

5. Памяти двух великих русских ученых второй половины XIX столетия: П. Л. Чебышева и А. М. Ляпунова.— В кн. Записки математического кабинета Крымского (б. Таврического) университета им. М. В. Фрунзе. Приложение к Известиям Университета, т. 3, Симферополь, стр. XXII—LIV; совместно с Н. М. Крыловым).
6. Sur quelques points de la théorie des équations différentielles linéaires de second ordre et des fonctions automorphes.— В кн. Записки математического кабинета Крымского (б. Таврического) университета им. М. В. Фрунзе, т. 3, Симферополь, стр. 20—24.
7. О конформном преобразовании односвязной области в себя.— В кн. Записки математического кабинета Крымского (б. Таврического) университета им. М. В. Фрунзе, т. 3, Симферополь, стр. 145—152.
8. Sur les équations différentielles linéaires de second ordre et la théorie des fonctions automorphes (*Bull. Sci. math.*, t. 45, p. 93—120; 126—135).

1924

9. Курс высшей математики для техников и физиков, т. 1, Пг., «Сеятель», 480 стр.

1926

10. Курс высшей математики для техников и физиков, т. 2, Л., Гос. изд., 415 стр.
11. В. А. Стеклов как ученый (*Научн. работник*, № 5—6, стр. 12—21; совместно с др.).
12. Памяти академика В. А. Стеклова (1863—1926) (*Электричество*, № 7, стр. 301—304).
13. Sur les séries de polynomes (*Comptes rendus, Paris*, t. 183, p. 1014—1015).

1927

14. Курс высшей математики для техников и физиков, т. 1, изд. 2, просм. и доп., М.—Л., Гос. изд., 461 стр.
15. Курс высшей математики для техников и физиков, т. 2, изд. 2, просм. и доп., М.—Л., Гос. изд., 415 стр.
16. О фундаментальной области групп движения на плоскости Лобачевского — Болиаи.— В кн. In memoriam N. S. Lobatschevskij, v. 2, Казань, Главнаука, стр. 103—118.
17. О рациональных преобразованиях линейных дифференциальных уравнений второго порядка (*Матем. сборн.*, т. 34, вып. 2, стр. 101—106).
18. Sur quelques séries de polynomes (*Ж. Лен. физ.-матем. об-ва*, т. 1, вып. 2, стр. 155—179).

1928

19. Sur la théorie des polynomes orthogonaux à une variable complexe (*Ж. Лен. физ.-матем. об-ва*, т. 2, вып. 1, стр. 155—179).
20. Sur quelques polynomes aux propriétés extrémales (*Сообщ. Харьк. матем. об-ва*, серия 4, т. 2, стр. 67—72).
21. Sur les polynomes orthogonaux à une variable complexe (*Comptes rendus, Paris*, t. 186, p. 21—23).
22. Владимир Андреевич Стеклов, Биографический очерк. В кн. Памяти В. А. Стеклова, Л., АН СССР, стр. 15—22.

1929

23. Курс высшей математики для техников и физиков, т. 1, изд. 3, просм., М.—Л., Гос. изд., 461 стр.
24. Sur les valeurs limites des fonctions régulières à l'intérieur d'un cercle (*Ж. Лен. физ.-матем. об-ва*, т. 2, вып. 2, стр. 22—37).
25. Sur les valeurs limites des fonctions analytiques (*Comptes rendus, Paris*, t. 188, p. 131—133).

1930

26. Курс высшей математики для техников и физиков, т. 1, изд. 4, просм. и доп., М.—Л., Гос. изд., 467 стр.

1931

27. Курс высшей математики для техников и физиков, т. 2, изд. 2, просм. и доп., М.—Л., ГНТИ, 519 стр.
28. О новом методе решения плоской задачи упругих колебаний (тезисы доклада). В кн. Международная сессия научного совета Сейсмологического института Академии наук СССР (Бюл. № 1, Л., АН СССР, стр. 14—15; совместно с С. Л. Соболевым) (*Тр. Сейсм. ин-та*, № 16).

1932

29. Курс высшей математики для техников и физиков, т. 1, изд. 5, Л.—М., ГТТИ, 436 стр.
30. Курс высшей математики для техников и физиков, т. 1, изд. 6, Л.—М., ГТТИ, 436 стр.
31. Курс высшей математики для техников и физиков, т. 2, изд. 3, просм. и доп., М.—Л., ГТТИ, 519 стр.
32. Теория определителей и ее приложения (часть курса математики, прочитанного на физическом отделении ЛГУ), Л., Кубуч, 87 стр., литогр. изд.
33. Sur une méthode nouvelle dans le problème plan des vibrations élastiques, Л., АН СССР, 37 стр. (совместно с С. Л. Соболевым) (*Тр. Сейсм. ин-та*, № 20).
34. Sur les formules de Cauchy et de Green et quelques problèmes, qui s'y rattachent (*Изв. АН СССР*, ОМЕН, № 3, стр. 337—372).
35. Sur le problème plan des vibrations élastiques (*Comptes rendus, Paris*, t. 194, p. 1437—1439; совместно с С. Л. Соболевым).
36. Sur quelques problèmes des vibrations élastiques (*Comptes rendus, Paris*, t. 194, p., 1797—1799; совместно с С. Л. Соболевым).

1933

37. Курс высшей математики для техников и физиков, т. 1, изд. 6, Л.—М., ГТТИ, 442 стр.
38. Курс высшей математики для техников и физиков, т. 2, изд. 4, просм., М.—Л., ГТТИ, 521 стр.

39. Курс высшей математики для техников и физиков, т. 3, М.—Л., ГТТИ, 736 стр.
40. Вариационное исчисление, Л. Кубуч, 204 стр. (совместно с В. И. Крыловым и Л. В. Канторовичем).
41. Sur l'application de la méthode nouvelle à l'étude des vibrations élastiques dans l'espace à symétrie axiale, Л., АН СССР, 49 стр. (совместно с С. Л. Соболевым) (*Тр. Сейсм. ин-та*, № 29).
42. Über die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung (*Math. Ann.*, Bd., 107, S. 313—323).

1934

43. Курс высшей математики для техников и физиков, т. 1, изд. 7, М.—Л., ГТТИ, 442 стр.
44. Курс высшей математики для техников и физиков, т. 2, изд. 5, просм. и доп., М.—Л., ГТТИ, 532 стр.
45. Курс высшей математики для техников и физиков, т. 3, изд. 2, испр. и доп., М.—Л., ГТТИ, 764 стр.
46. Некоторые работы в области анализа и его приложений в Ленинграде (тезисы доклада). В кн. Бюллетень Второго Всесоюзного съезда математиков в Ленинграде 24—30 июня 1934 г., Л., АН СССР, стр. 11.
47. Однородные решения волнового уравнения и уравнений упругости с осевой симметрией (тезисы доклада). В кн. Бюллетень Второго Всесоюзного съезда математиков в Ленинграде 24—30 июня 1934 г., Л., АН СССР, стр. 86.
48. Второй Всесоюзный математический съезд (*Фр. науки и техн.*, № 8, стр. 51—55).
49. С математического съезда (*Известия*, 29/VI, № 150).
50. Ред.: Lappo - Danilevskij, I. A. Mémoires sur la théorie des systèmes des équations différentielles linéaires, v. I, Л.—М., АН СССР, 256 стр. (совместно с Н. Е. Кочиным) (*Тр. Физ.-матем. ин-та*, т. 6).
51. Ред.: Бюллетень Второго Всесоюзного съезда математиков в Ленинграде 24—30 июня 1934 г., Л., АН СССР, 106 стр.

1935

52. Курс высшей математики для техника и физика, т. 1, Минск, Дзярж. выд. Беларусі, 491 стр.
53. Подготовка съезда. В кн. Труды Второго Всесоюзного математического съезда, Ленинград, 24—30 июня 1934 г., т. 1, Л.—М., АН СССР, стр. 3—6.
54. Некоторые ленинградские работы в области анализа и его приложений. В кн. Труды Второго Всесоюзного математического съезда. Ленинград, 24—30 июня 1934 г., т. 1, Л.—М., АН СССР, стр. 109—141.
55. О работах теоретического отдела Сейсмологического института. В кн. Сборник статей и рефератов, М.—Л., АН СССР, стр. 3—7 (совместно с С. Л. Соболевым) (*Тр. Сейсм. ин-та*, № 67).
56. Ред.: Труды Второго Всесоюзного математического съезда, Ленинград, 24—30 июня 1934 г., т. 1, Л.—М., АН СССР, 371 стр.
57. Ред.: Lappo - Danilevskij, I. A. Mémoires sur la théorie des systèmes des équations différentielles linéaires, v. 2, Л.—М., АН СССР, 208 стр. (совместно с Н. Е. Кочиным) (*Тр. Физ.-матем. ин-та*, т. 7).

1936

58. Курс высшей математики для техника и физика, т. 2, Минск, Дзярж. выд. Беларусі, 543 стр.
59. Sur les solutions singulières de l'équation d'onde et des équations d'élasticité, М.—Л., АН СССР, 30 стр. (*Тр. Сейсм. ин-та*, № 78).

60. Однородные решения волнового уравнения. В кн. Труды Второго Всесоюзного математического съезда, Ленинград, 24—30 июня 1934 г., т. 2, М.—Л., АН СССР, стр. 365.
61. Исправление мемуара И. А. Лаппо-Давилевского (*Матем. сборн.*, 1 (43): 6, стр. 967—968; совместно с Н. Е. Кочиным).
62. Ред.: Труды Второго Всесоюзного математического съезда. Ленинград, 24—30 июня 1934 г., т. 2, М.—Л., АН СССР, 468 стр.
63. Ред.: Lappo-Danilevskij, I. A. Mémoires sur la théorie des systèmes des équations différentielles linéaires, v. 3, Л.—М., АН СССР, 206 стр. (совместно с Н. Е. Кочиным) (*Тр. Физ.-матем. ин-та им. В. А. Стеклова, отд. мат.*, т. 8).

1937

64. Курс высшей математики, т. 1, изд. 8, перераб., Л.—М., Гл. ред. общетехн. лит., 435 стр.
65. Курс высшей математики, т. 2, изд. 6, перераб., Л.—М., Гл. ред. техн.-теор. лит., 500 стр.
66. Решение предельной задачи для волнового уравнения в случае круга и сферы (*Доклады АН СССР*, т. 14, № 1, стр. 13—16).
67. Решение предельных задач теории упругости в случае круга и сферы (*Доклады АН СССР*, т. 14, № 2, стр. 69—72).
68. Предисловие.— В кн. Конформное отображение односвязных и многосвязных областей, М.—Л., ОНТИ, Гл. ред. техн.-теор. лит., стр. 3—4.

1938

69. Курс высшей математики, т. 1, изд. 9, испр., М.—Л., Гл. ред. техн.-теор. лит., 410 стр.
70. Курс высшей математики, т. 2, изд. 2, изд. 7, испр., Л.—М. Гл. ред. техн.-теор. лит., 500 стр.

1939

71. Курс высшей математики, т. 3, изд. 3, перераб., М.—Л., Гл. ред. техн.-теор. лит., 796 стр.

1940

72. Курс высшей математики, т. 1, изд. 10, М.—Л., Гос. изд. техн.-теор. лит., 408 стр.
73. Курс высшей математики, т. 2, изд. 8, М.—Л., Гос. изд. техн.-теор. лит., 528 стр.

1941

74. Курс высшей математики, т. 4, Л.—М., ГТТИ, 620 стр.
75. Николай Максимович Гюнтер (1871—1941) (*Известия Ака. наук СССР, серия матем.*, т. 5, № 3, стр. 193—197; совместно с С. Л. Соболевым).

1945

76. Русская математика XIX и XX веков (*Природа*, № 3, стр. 17—23).

1946

77. Научное творчество Алексея Николаевича Крылова (*Усп. матем. наук*, т. 1, вып. 3—4, стр. 3—12).
78. Владимир Андреевич Стеклов (к 20-летию со дня смерти) (*Усп. матем. наук*, т. 1, вып. 3—4, стр. 17—22).

1947

79. Курс высшей математики, т. 5, М.—Л., Гостехиздат, 584 стр.
80. Работы В. А. Стеклова о разложениях по ортогональным функциям. В кн. Юби-

лейный сборник, посвященный тридцатилетию Великой Октябрьской социалистической революции, ч. 1, М.—Л., АН СССР, стр. 186—213.

81. Ред.: Гаспар Монж. Сборник статей к двухсотлетию со дня рождения. 1746—1946, Л., АН СССР, 84 стр.

1948

82. Курс высшей математики, т. 2, изд. 9, Л.—М., Гостехиздат, 622 стр.
83. Ленинградский университет за советские годы. 1917—1947. Очерки, Л., ЛГУ, 383 стр. (совместно с др.).
84. Интегральные уравнения. В кн. Математика в СССР за тридцать лет. 1917—1947, М.—Л., Гос. изд. техн.-теор. лит., стр. 593—607.
85. Биография А. М. Ляпунова. В кн. Ляпунов А. М., Избранные труды, Л., АН СССР, стр. 325—340.
86. Очерк научных трудов А. М. Ляпунова. В кн. Ляпунов А. М., Избранные труды, Л., АН СССР, стр. 341—450.
87. Очерк жизни А. М. Ляпунова (*Прикл. матем. и мех.*, т. 12, вып. 5, стр. 469—478).
88. Обзор научного творчества А. М. Ляпунова (*Прикл. матем. и мех.*, т. 12, вып. 5, стр. 479—560).
89. Владимир Андреевич Стеклов (1864—1926). В кн. Люди русской науки. Очерки о выдающихся деятелях естествознания и техники, т. 1, М.—Л., ОГИЗ, Гос. изд. техн.-теор. лит., стр. 235—240.
90. Н. М. Гюнтер (*Учен. зап. ЛГУ, серия матем. наук*, вып. 15, стр. 5—22).
91. Григорий Михайлович Фихтенгольц (к шестидесятилетию со дня рождения) (*Усп. матем. наук*, т. 3, вып. 5, стр. 179—181; совместно с Л. В. Канторовичем и И. П. Натансоном).
92. Григорий Михайлович Фихтенгольц (*Вестн. ЛГУ*, № 6, стр. 133—135).
93. Лауреат Сталинской премии 1948 г. проф. Г. М. Голузин (*Вестн. ЛГУ*, № 8, стр. 119).
94. Ред.: Ляпунов А. М., Избранные труды, Л., АН СССР, 540 стр.

1949

95. Курс высшей математики, т. 3, ч. 1, изд. 4, Л.—М., Гос. изд. техн.-теор. лит., 336 стр.
96. Курс высшей математики, т. 3, ч. 2, изд. 4, Л.—М., Гос. изд. техн.-теор. лит., 672 стр.
97. Жизнь и деятельность А. М. Ляпунова. В кн. Вопросы истории отечественной науки. Доклады на общем собрании АН СССР 5—11 января 1949 г., М.—Л., стр. 100—113.

1951

98. Курс высшей математики, т. 3, изд. 5, М.—Л., Гос. изд. техн.-теор. лит., 340 стр.
99. Курс высшей математики, т. 4, изд. 2, М.—Л., Гос. изд. техн.-теор. лит.

1952

100. Курс высшей математики, т. 1, изд. 13, М.—Л., Гос. изд. техн.-теор. лит., 472 стр.
101. Геннадий Михайлович Голузин (некролог) (*Усп. матем. наук*, т. VII, вып. 3 (49), стр. 97—102; совместно с А. Ф. Бермантом).

1953

102. Курс высшей математики, т. 1, изд. 14, М., Гос. изд. техн.-теор. лит., 472 стр.
103. Курс высшей математики, т. 2, изд. 12, М., Гос. изд. техн.-теор. лит., 628 стр.
104. О сопряженных функциях, II (*Вестн. ЛГУ*, № 11, стр. 3—12).

1954

105. Курс высшей математики, т. 2, изд. 13, М., Гостехиздат, 628 стр.
106. Михаил Софронов — русский математик середины XVIII века, М., изд. АН СССР, 55 стр. (совместно с Е. С. Кулябко).
107. О сопряженных функциях в многомерном евклидовом пространстве, III (*Вестник ЛГУ*, № 5, стр. 3—18).

1956

108. Курс высшей математики, т. 1, изд. 16, испр., М., Гостехиздат.
109. Курс высшей математики, т. 2, изд. 14, испр., М., Гостехиздат, 628 стр.
-

А. В. МАЛЫШЕВ

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЦЕЛЫХ ТОЧЕК
НА НЕКОТОРЫХ ЭЛЛИПСОИДАХ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым)

Рассматривается вопрос о представлении больших чисел m положительными ternary квадратичными формами $f(x, y, z)$ и о распределении представлений по эллипсоиду $f(x, y, z) = m$.

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Постановка задачи. История вопроса. Основной результат

1. Постановка задачи. В предлагаемой работе рассматривается вопрос о представлении чисел квадратичными формами. Пусть дана квадратичная форма

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$$

с целыми коэффициентами a_{ij} . Известны [см., например, (1)] алгоритмы, позволяющие решить, представимо ли заданное число m этой формой f , т. е. разрешимо ли уравнение

$$f(x_1, \dots, x_n) = m$$

в целых числах x_1, \dots, x_n , или нет; в первом случае находятся все представления числа m формой f . Известно также, что все числа m , удовлетворяющие простым необходимым условиям, представимы хотя бы одной из форм данного рода; при этом дается и формула для количества таких представлений [см. (1)].

Однако интересный вопрос о совокупности чисел, представимых данной, отдельно взятой формой, выходит за рамки указанных классических исследований. Прежде всего отметим, что этот вопрос для неопределенных форм ($n \geq 3$) почти полностью решается известными теоремами Мейера [см. (2), (3)], показывающими, что в весьма широких предположениях каждый род неопределенных квадратичных форм содержит только один класс. К сожалению, для положительных форм род, как правило, содержит несколько классов. В. А. Тартаковский (4), применяя методы аналитической теории чисел, изучил совокупность чисел, представимых данной положительной квадратичной формой с числом переменных $n \geq 4$; при этом оказалось, что условия представимости достаточно больших

чисел отдельными формами — те же, что и условия представимости их родом; была найдена асимптотическая формула для количества представлений числа формой. С другой стороны, для бинарных форм (как положительных, так и неопределенных) вряд ли возможно просто охарактеризовать совокупность чисел, представимых ими.

Таким образом, наиболее интересным оказывается случай положительных тернарных квадратичных форм. Задача состоит в том, чтобы: 1) охарактеризовать совокупность чисел m , представимых такой формой $f(x, y, z)$; при этом интересно изучить свойства самих представлений, в частности, 2) найти распределение представлений (x, y, z) по поверхности эллипсоида $f(x, y, z) = m$.

2. История вопроса. Полное решение задачи, сформулированной в предыдущем абзаце (скажем, в том плане, в каком была решена Тартаковским аналогичная задача для форм с четырьмя и более переменными), по-видимому, представляет исключительные трудности. Имеющиеся аналитические методы [Клостерман ⁽⁵⁾] к ней не приложимы. Более того, примеры тернарных форм с четными инвариантами, приводимые Джонсом и Поллом ⁽⁶⁾, показывают, что теорема, аналогичная теореме Тартаковского, для $n = 3$ просто не верна. Однако есть надежда, что примеры Джонса и Полла являются в некотором смысле исключительными.

Этому вопросу посвятил ряд работ Ю. В. Линник [см. ⁽⁷⁾, ⁽⁸⁾, ⁽⁹⁾, ⁽¹⁰⁾, ⁽¹¹⁾]. Из них главной является работа ⁽¹¹⁾. В ней изучаются формы нечетных инвариантов $[\Omega, 1]$, принадлежащие роду $\mathfrak{G}_{[\Omega, 1]}$ с характеристиками

$$\left(\frac{-f}{p}\right) = 1, \quad p \nmid \Omega,$$

даются условия представимости больших чисел формой f и выводится оценка для количества $t(f, m)$ представлений числа m формой f :

$$t(f, m) > c_{\Omega} \frac{h(-m)}{\ln m \ln \ln m},$$

где $h(-m)$ — количество классов целочисленных собственно примитивных положительных бинарных квадратичных форм определителя m . Для получения этих результатов Ю. В. Линник разработал своеобразный метод, существенно использующий исследования Б. А. Венкова ⁽¹²⁾ по арифметике кватернионов и теорему Зигеля ⁽¹³⁾ об оценке $h(-m)$:

$$x_e m^{\frac{1}{2}-\varepsilon} < h(-m) < x'_e m^{\frac{1}{2}+\varepsilon}. \quad (1)$$

Метод Ю. В. Линника имеет приложение и в других вопросах теории *, а также допускает обобщения.

В работах автора ⁽¹⁴⁾, ⁽¹⁵⁾ даны некоторые обобщения указанного результата Линника, уточнены оценки $t(f, m)$ и упрощены доказательства. В совместном обзоре ⁽¹⁶⁾ изложен метод Линника с указанными упрощениями и уточнениями. Наконец, в работе ⁽¹⁷⁾ найдена асимптотически верная формула для количества представлений $t(f, m)$.

* См., например, его работы об области приведения положительных бинарных квадратичных форм: Ю. В. Линник, Вестник ЛГУ, № 2 (1955), 3—23; № 5 (1955), 3—32; № 8 (1955), 15—27.

Другой цикл исследований открывается работой Ю. В. Линника и А. В. Малышева ⁽¹⁸⁾ *, где изучается распределение целых точек по сфере $x^2 + y^2 + z^2 = m$, т. е. распределение представлений (x, y, z) числа m простейшей формой $f = x^2 + y^2 + z^2$. Дальнейшее развитие идей этой работы с привлечением некоторых соображений работы ⁽¹⁷⁾ позволило Ю. В. Линнику ⁽¹⁹⁾ доказать асимптотическую равномерность распределения целых точек по сфере.

3. Содержание статьи. Основной результат. Эта статья является итоговой. В ней мы завершаем изучение форм рода $\mathfrak{G}_{[\Omega, 1]}$, полностью решая для них задачи, поставленные в конце п. 1. Основным результатом является теорема 1 (гл. II, § 1), утверждающая, что представления числа m родом $\mathfrak{G}_{[\Omega, 1]}$ асимптотически равномерно (при $m \rightarrow \infty$) распределены по его классам, причем для отдельной формы f представления (x, y, z) асимптотически равномерно (в смысле эллиптической метрики) распределены по поверхности эллипсоида $f(x, y, z) = m$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f(x, y, z)$ — положительная тернарная целочисленная собственно примитивная квадратичная форма нечетных инвариантов $[\Omega, 1]$, принадлежащая роду $\mathfrak{G}_{[\Omega, 1]}$ с характеристиками $\left(\frac{-f}{p}\right) = 1$ для всех простых $p \nmid \Omega$. Пусть g — целое нечетное число с условием $\Omega g \not\equiv 1$. Наконец, пусть \mathfrak{E} — коническая область с вершиной в начале координат и f -эллиптическим** телесным углом $\lambda > 0$. Рассмотрим целое число m , взаимно простое с Ωg , и целые числа x_0, y_0, z_0 , удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0, z_0) &\equiv m \pmod{8\Omega g}, \text{ о. н. } \partial. (x_0, y_0, z_0, 2) = 1, \\ \left(\frac{-m}{p}\right) &= 1 \text{ для всех простых } p \nmid g. \end{aligned} \quad (2)$$

Обозначим через $t(f, \mathfrak{E}, g; m)$ количество целых примитивных точек (x, y, z) эллипсоида $f(x, y, z) = m$, лежащих в конусе \mathfrak{E} и сравнимых с (x_0, y_0, z_0) по модулю g . Тогда при $m \rightarrow \infty$ и фиксированных f, \mathfrak{E}, g

$$t(f, \mathfrak{E}, g; m) \sim \frac{\lambda}{4\pi} \frac{2^k}{\Omega g^2 \prod_{p \nmid \Omega g} \left(1 + \frac{1}{p}\right)} t(m), \quad (3)$$

где $t(m)$ — количество примитивных представлений числа суммой трех квадратов, k — количество простых делителей Ω , не входящих в g ; произведение в знаменателе (3) берется по всем различным простым делителям числа Ωg .

В гл. III даны некоторые обобщения этой теоремы. Предварительные результаты были приведены в работе ⁽²⁰⁾. Отдельные частные случаи этой теоремы включают в себя основные результаты работ ⁽⁷⁾, ⁽⁹⁾ — ⁽¹¹⁾, ⁽¹⁴⁾ — ⁽²⁰⁾.

* Замечу, что основная идея доказательства главного результата работы ⁽¹⁸⁾ принадлежит Ю. В. Линнику.

** Мы говорим, что \mathfrak{E} имеет f -эллиптический телесный угол λ , если в результате линейного однородного преобразования, переводящего f в $x^2 + y^2 + z^2$, \mathfrak{E} преобразуется в коническую область с (обыкновенным) телесным углом λ . Легко видеть, что λ не зависит от способа преобразования f в сумму трех квадратов.

Для доказательства этих результатов нами используется метод Линника ⁽¹¹⁾ с уточнениями и обобщениями, содержащимися в работах ⁽¹⁷⁾ и ⁽¹⁹⁾. В частности, рассуждения базируются на основной лемме из аналитической арифметики кватернионов (ей целиком посвящена гл. I работы), являющейся обобщением и уточнением соответствующей леммы Линника [см., например, ⁽¹⁶⁾].

Следует отметить, что нами рассматриваются лишь формы специального вида — формы рода $\mathfrak{G}_{[2,1]}$. Однако обобщение применяемых здесь рассуждений позволяет рассмотреть и формы общего вида (но нечетных взаимно простых инвариантов). Я предполагаю в дальнейшем посвятить этому вопросу специальную статью.

§ 2. Некоторые сведения из арифметики кватернионов

1. Предварительные замечания. В нашей работе существенно используется арифметика кватернионов, развитая Липшицем ⁽²¹⁾, Гурвицем ⁽²²⁾ и Венковым ⁽¹²⁾. Мы изложим необходимые нам сведения из арифметики кватернионов, отсылая за доказательствами и подробностями к работам ⁽²²⁾, ⁽¹²⁾, ⁽²³⁾. Читатель, знакомый с арифметикой кватернионов, может опустить этот параграф.

2. Алгебра кватернионов. Рассмотрим алгебру $\mathfrak{A} = [1, i, j, k]$ ранга 4 над полем вещественных чисел с вещественной единицей 1 и следующей таблицей умножения мнимых единиц i, j, k :

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j. \quad (4)$$

Элементы этой алгебры,

$$X = \xi_0 + \xi_1 i + \xi_2 j + \xi_3 k, \quad (5)$$

где $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ — вещественные числа, называются *кватернионами*. При этом $\xi_0 = \text{Sc}(X)$ называется *скалярной частью* кватерниона X , а $\xi_1 i + \xi_2 j + \xi_3 k = \text{Ve}(X)$ — его *векторной частью*. Если $\text{Sc}(X) = 0$, то X назовем *вектором*.

Кватернион

$$\bar{X} = \text{Sc}(X) - \text{Ve}(X) = \xi_0 - \xi_1 i - \xi_2 j - \xi_3 k$$

называется *сопряженным* кватерниону

$$X = \text{Sc}(X) + \text{Ve}(X) = \xi_0 + \xi_1 i + \xi_2 j + \xi_3 k.$$

Вещественное число

$$N(X) = \bar{X} \cdot X = X \bar{X} = \xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$$

называется *нормой* кватерниона X . Легко проверяются следующие свойства.

- 1) $\bar{\bar{X}} = X$, $\overline{X + Y} = \bar{X} + \bar{Y}$, $\overline{XY} = \bar{Y} \bar{X}$;
- 2) если X — вектор, то $\bar{X} = -X$;
- 3) $N(\bar{X}) = N(X)$;
- 4) $N(X) \geq 0$; $N(0) = 0$; если $X \neq 0$, то $N(X) > 0$;
- 5) если λ — вещественное число, то $N(\lambda X) = \lambda^2 N(X)$;
- 6) $N(X + Y) = N(X) + N(Y) + 2\text{Sc}(\bar{X}Y)$;

- 7) $N(XY) = N(X)N(Y)$;
 8) $|\operatorname{Sc}(XY)| \leq \sqrt{N(X)N(Y)}$;
 9) если $X \neq 0$, то $X^{-1} = \frac{1}{N(X)} \bar{X}$;

10) для того чтобы кватернион X был вектором, необходимо и достаточно, чтобы $X^2 = -\lambda$, где λ — вещественное число; при этом $\lambda = N(X)$;

11) если X не есть вещественное число, то для того чтобы $XY = YX$, необходимо и достаточно, чтобы $Y = \lambda + \mu X$, где λ и μ — вещественные числа.

3. Целые кватернионы. Единицы. Ассоциированные кватернионы. Примарные кватернионы. Кватернион

$$A = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$$

называется *целым*, если или a_0, a_1, a_2, a_3 суть целые числа (собственно целый кватернион), или же $2a_0, 2a_1, 2a_2, 2a_3$ суть целые нечетные числа (несобственно целый кватернион). Норма целого кватерниона есть целое число. Целые кватернионы образуют относительно сложения и умножения кольцо. В дальнейшем, если не оговорено особо, мы будем рассматривать только целые кватернионы.

Кватернион $E \neq 0$ называется *единицей*, если как E , так и E^{-1} суть целые кватернионы. Целый кватернион E является единицей тогда и только тогда, когда $N(E) = 1$. Всего имеется 24 единицы:

$$E = \pm 1, \pm i, \pm j, \pm k, \frac{\pm 1 \pm i \pm j \pm k}{2}. \quad (6)$$

Говорят, что кватернион A *ассоциирован справа* с кватернионом B , если найдется единица E , для которой $B = AE$. Аналогично определяется ассоциированность слева.

Собственно целый кватернион $A = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$ нечетной нормы называется *примарным* [см. Гурвиц ⁽²²⁾, Венков ⁽¹²⁾], если

$$\begin{aligned} a_0 + 1 &\equiv a_1 \equiv a_2 \equiv a_3 \pmod{2}, \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 &\equiv 1 \pmod{4}. \end{aligned} \quad (7)$$

Произведение двух примарных кватернионов есть примарный кватернион [см. Гурвиц ⁽²²⁾]. Основное свойство примарных кватернионов — следующее [см. Гурвиц ⁽²²⁾; там же см. доказательство]:

Замечание 1. Среди двадцати четырех ассоциированных справа кватернионов нечетной нормы всегда найдется один и только один примарный. То же справедливо для ассоциированности слева.

4. Делимость целых кватернионов. Алгоритм Эвклида. Мы говорим, что кватернион A *делится справа* на кватернион B , если AB^{-1} — целый кватернион; аналогично, мы говорим, что кватернион A *делится слева* на кватернион B , если $B^{-1}A$ — целый кватернион. Простейшие свойства делимости кватернионов аналогичны соответствующим свойствам делимости целых чисел. Отношение делимости справа не нарушается, если кватернионы заменить на ассоциированные им слева.

В кольце целых кватернионов имеет место алгоритм Эвклида [Гурвиц ⁽²²⁾]:

Замечание 2. Если A и $B \neq 0$ — целые кватернионы, то найдутся такие целые кватернионы Q и R , что

$$A = QB + R, \quad N(R) < N(B). \quad (8)$$

лелепипеда решетки \mathfrak{G} . Класс вычетов $A \pmod{M}$ справа) есть решетка \mathfrak{G}_M , сдвинутая на $A = (a_0, a_1, a_2, a_3)$. Поэтому

$$c_{\Pi}(M) = [N(M)]^2.$$

Аналогично рассматривается $c_{\Pi}(M)$.

Замечание доказано.

6. Прimitивные кватернионы. Основная теорема арифметики кватернионов. Простые кватернионы. Наибольшее целое число a , делящее кватернион A , называется его *делителем*. Если делитель кватерниона A равен 1, то A называется *прimitивным* *. Мы имеем однозначное представление: $A = aA_0$, где A_0 — прimitивный кватернион; при этом a — делитель A . Если делитель кватерниона A взаимно прост с некоторым числом m , то A называется *прimitивным \pmod{m}* .

Имеет место следующее предложение, основное в арифметике кватернионов [Гурвиц ⁽²²⁾].

Замечание 5. Пусть целый кватернион A прimitивен \pmod{r} , где r — нечетное число. Тогда если $N(A)$ делится на r , то найдется один и только один примаpный кватернион R нормы r , делящий A справа: $A = A_1 R$.

Следствие 1. Пусть A — целый прimitивный кватернион и $N(A) = r_1 r_2 \dots r_k$, где r_1, r_2, \dots, r_k — целые положительные числа, быть может, равные между собой. Тогда найдутся целые кватернионы R_1, R_2, \dots, R_k , где $N(R_1) = r_1, N(R_2) = r_2, \dots, N(R_k) = r_k$, такие, что

$$A = R_1 R_2 \dots R_k. \quad (12)$$

При этом если и

$$A = R'_1 R'_2 \dots R'_k, \quad N(R'_1) = r_1, N(R'_2) = r_2, \dots, N(R'_k) = r_k,$$

то

$$R'_1 = R_1 E_1, R'_2 = E_1^{-1} R_2 E_2, \dots, R'_{k-1} = E_{k-2}^{-1} R_{k-1} E_{k-1}, R'_k = E_{k-1}^{-1} R_k, \quad (13)$$

где E_1, E_2, \dots, E_k — единицы. Если A — примаpный кватернион, то однозначно найдется разложение (12), где R_1, R_2, \dots, R_k — примаpные кватернионы.**

Следствие 2. Если AB — прimitивный кватернион, AB делится справа на C , причем $N(B)$ делится на $N(C)$, то B делится справа на C .

Кватернион P называется *простым*, если он не имеет справа никаких делителей, кроме тривиальных: E и EP .

Следствие 3. Всякий прimitивный кватернион A разлагается на простые кватернионы:

$$N(A) = p_1 p_2 \dots p_k, \quad A = P_1 P_2 \dots P_k, \quad (14)$$

$$N(P_1) = p_1, N(P_2) = p_2, \dots, N(P_k) = p_k,$$

где p_1, p_2, \dots, p_k — простые числа.

* Собственно целый кватернион $A = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ прimitивен тогда и только тогда, когда о. н. д. $(a_0, a_1, a_2, a_3) = 1$ и не все a_0, a_1, a_2, a_3 нечетны. Несобственно целый кватернион $A = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ прimitивен тогда и только тогда, когда о. н. д. $(2a_0, 2a_1, 2a_2, 2a_3) = 1$.

** Случай четной нормы A не исключается. Но при этом должно быть $N(A) \equiv \equiv 2 \pmod{4}$.

Простой кватернион характеризуется тем свойством, что его норма есть простое число.

Из замечания 5 довольно легко может быть выведено следующее предложение, полезное в дальнейшем.

Замечание 6. Пусть A и B — примитивные кватернионы, из которых хотя бы один — нечетной нормы. Тогда найдется такой кватернион C , что A и BC взаимно просты справа.

7. Три замечания из теории делимости кватернионов, имеющие приложения в дальнейшем. Следующее, просто доказываемое замечание играет существенную роль в доказательстве основной теоремы статьи.

Замечание 7. Пусть целый вектор L делится справа на R_1 , а слева — на R_2 , где R_1 и R_2 — целые кватернионы нормы r , причем произведение $R_1 R_2$ примитивно. Тогда вектор L делится на число r .

Доказательство. В силу условий теоремы, имеем:

$$L = A_1 R_1 = -\bar{R}_1 \bar{A}_1 = R_2 A_2, \quad (15)$$

где A_1 и A_2 — целые кватернионы. Так как $R_1 R_2$ примитивен, то R_1 и R_2 просты справа, а потому (см. замечание 2, следствие) найдутся целые кватернионы X и Y , для которых

$$XR_1 + Y\bar{R}_2 = 1. \quad (16)$$

Учитывая (15) и (16), будем иметь:

$$\begin{aligned} L = 1 \cdot L &= (XR_1 + Y\bar{R}_2)L = (XR_1)(-\bar{R}_1 \bar{A}_1) + (Y\bar{R}_2)(R_2 A_2) = \\ &= r(-X\bar{A}_1 + YA_2). \end{aligned}$$

Замечание доказано.

Второе замечание, по существу, принадлежит Гурвицу⁽²²⁾. Мы даем более простое доказательство.

Замечание 8. Пусть t — целое число, A и B — кватернионы, примитивные $(\text{mod } t)$, и пусть AB делится на t . Тогда найдется такой целый кватернион T нормы t , что

$$A = A_1 T, \quad B = \bar{T} B_1, \quad (17)$$

где A_1 и B_1 — целые кватернионы.

Доказательство. Пусть $AB \equiv 0 \pmod{t}$. Тогда $N(B)A = (AB)\bar{B} \equiv 0 \pmod{t}$ и так как A примитивен $(\text{mod } t)$, то $t \mid N(B)$.

Обозначим $D = \text{o. н. д. справа } (A, \bar{B})$. Тогда (см. замечание 2, следствие) найдутся X и Y , для которых

$$D = XA + Y\bar{B}.$$

Умножив это равенство на B справа и на \bar{D} слева, получаем:

$$N(D)B = \bar{D}X(AB) + DY\bar{N}(B) \equiv 0 \pmod{t},$$

и так как B примитивен, то $t \mid N(D)$. Поэтому (замечание 5, следствие 1) найдется такой целый кватернион T нормы t , который делит D , а следовательно, и A и \bar{B} , справа:

$$A = A_1 T, \quad \bar{B} = \bar{B}_1 T, \quad B = \bar{T} B_1.$$

Замечание доказано.

Следствие 1. Пусть A и B примитивны $(\text{mod } t)$. Для того чтобы существовал их общий делитель справа нормы t , необходимо и достаточно, чтобы $A\bar{B} \equiv 0 \pmod{t}$.

Следствие 2. Если целое число делится на примитивный кватернион, то оно делится и на его норму.

Следствие 3. Пусть R — примитивный кватернион нормы r . Тогда если RA делится на R справа, то

$$2 \operatorname{Sc}(\bar{R}A) \equiv 0 \pmod{r}. \quad (18)$$

Последнее замечание принадлежит Поллу⁽²⁴⁾:

Замечание 9. Пусть A — примитивный $(\text{mod } t)$ кватернион, где t — нечетное число, делящее $N(A)$. Тогда для того чтобы кватернион B имел общие с A делители нормы t и справа и слева, необходимо и достаточно, чтобы нашлось целое число u , для которого

$$B \equiv uA \pmod{t}. \quad (19)$$

Доказательство. Достаточность очевидна. Докажем необходимость. По условию,

$$A\bar{B} \equiv 0 \pmod{t}, \quad \bar{B}A \equiv 0 \pmod{t}.$$

Полагая

$$A = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k, \quad B = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k,$$

распишем эти сравнения в координатах, откуда легко получим:

$$2(a_m b_n - a_n b_m) \equiv 0 \pmod{t} \quad (0 \leq m < n \leq 3).$$

Но эта система сравнений, если учесть примитивность $A \pmod{t}$, равносильна (19).

Замечание доказано.

8. Теорема лучей классов вычетов. Количество кватернионов данной нормы. Сейчас мы изложим «теорию лучей», принадлежащую, главным образом, Ю. В. Линнику [см. (8), (23)], и выведем формулу для количества примитивных кватернионов данной нормы.

Замечание 10 *. Пусть R и R' — целые примитивные кватернионы одинаковой нечетной нормы r . Сравнение

$$R'X \equiv 0 \pmod{R \text{ справа}} \quad (20)$$

всегда разрешимо, причем найдется решение $X = X_0$, взаимно простое справа с R . Общее решение сравнения (20) имеет вид:

$$X \equiv uX_0 \pmod{R \text{ справа}}, \quad (21)$$

* См. Ю. В. Линник⁽²³⁾; мы даем более простое доказательство.

где u — произвольное целое число, а X_0 — любое частное решение (20), взаимно простое справа с R . Иначе говоря, решения сравнений (20) образуют луч $\mathfrak{E}_{R,R'}$ классов вычетов $(\text{mod } R \text{ справа})$, определяемый кватернионами R и R' .

Доказательство. 1) Непосредственно видно, что кватернион $X_0 = \bar{R}'T$, где T — произвольный целый кватернион, удовлетворяет сравнению (20). Но мы можем (см. замечание 6) подобрать T так, чтобы о. н. д. справа $(R, X_0) = 1$.

2) Докажем (21). Пусть нам дано:

$$R'X_0 \equiv 0, \quad R'X \equiv 0 \pmod{R \text{ справа}}, \quad \text{о. н. д. справа } (R, X_0) = 1.$$

Тогда

$$R'X_0 \equiv X'_0R, \quad X_0\bar{R} = \bar{R}'X'_0, \quad R'X = X'R, \quad X\bar{R} = \bar{R}'X.$$

Так как $X_0\bar{R}$ примитивен, а кватернионы $X_0\bar{R}$ и $X\bar{R}$ делятся справа на \bar{R} , а слева — на \bar{R}' и так как $N(\bar{R}) = N(\bar{R}') = r$, то (см. замечание 9)

$$X\bar{R} \equiv uX_0\bar{R} \pmod{r}, \quad r = R\bar{R}, \quad X \equiv uX_0 \pmod{R \text{ справа}},$$

где u — целое число.

Замечание доказано.

Замечание 11. Количество лучей классов вычетов $(\text{mod } R \text{ справа})$, простых справа с R , где R — примитивный кватернион нечетной нормы r , равно

$$r \prod_{p \nmid r} \left(1 + \frac{1}{p}\right), \quad (22)$$

где произведение берется по всем простым делителям числа r .

Доказательство. Наметим основные пункты доказательства, опуская подробности.

1) Аналогично доказательству формулы для количества классов $\varphi(n)$ приведенной системы числовых вычетов докажем, что количество классов вычетов $(\text{mod } R \text{ справа})$, простых справа с R , равно

$$[N(R)]^2 \prod_{p \nmid N(R)} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right). \quad (23)$$

2) Пусть X_0 прост справа с R . Для того чтобы вычет $uX_0 \pmod{R \text{ справа}}$ был прост справа с R , необходимо и достаточно, чтобы о. н. д. $(u, N(R)) = 1$. Поэтому количество классов вычетов в луче $(\text{mod } R \text{ справа})$, простых справа с R , равно

$$\varphi(N(R)) = N(R) \prod_{p \nmid N(R)} \left(1 - \frac{1}{p}\right). \quad (24)$$

3) Классы вычетов ($\text{mod } R$ справа), простые справа с R , распределяются по лучам. Количество лучей классов вычетов равно

$$\frac{[N(R)]^2 \prod_{p \setminus N(R)} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)}{N(R) \prod_{p \setminus N(R)} \left(1 - \frac{1}{p}\right)} = N(R) \prod_{p \setminus N(R)} \left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

Замечание доказано.

Замечание 12. Пусть дан примитивный примарный кватернион R нечетной нормы r и произвольный луч \mathfrak{E} классов вычетов $X \pmod{R}$ справа, простых справа с R . Тогда найдется один и только один примитивный примарный кватернион R' нормы r такой, что классы вычетов $X \pmod{R}$ справа луча \mathfrak{E} удовлетворяют сравнению:

$$R'X \equiv 0 \pmod{R \text{ справа}}.$$

Простое доказательство этого замечания мы опускаем. Замечания 11 и 12 позволяют вывести формулу для количества примитивных кватернионов данной нормы [см. Липшиц ⁽²¹⁾; по существу, формула принадлежит Якоби]:

Следствие 1. Количество примитивных примарных кватернионов данной нечетной нормы r равно

$$\sigma(r) = r \prod_{p \setminus r} \left(1 + \frac{1}{p}\right). \quad (25)$$

Общее количество примитивных кватернионов нормы r или нормы $2r$, где r — нечетное число, равно

$$\sigma'(r) = 24r \prod_{p \setminus r} \left(1 + \frac{1}{p}\right). \quad (26)$$

Нет примитивных кватернионов, норма которых делилась бы на 4.

Следствие 2. Если $N(A)$ делится на нечетное число r , то найдется примитивный примарный кватернион R нормы r , делящий A справа.

9. Сопоставление парам векторов (целым поворотам) классов бинарных квадратичных форм. При доказательстве основной теоремы работы мы существенно базируемся на исследованиях Б. А. Венкова о связи между парами примитивных векторов (L_1, L_2) нормы m («целыми поворотами») и классами идеалов квадратичного поля $O(\sqrt{-m})$. Мы изложим нужные нам результаты Б. А. Венкова, заменяя идеалы классами бинарных квадратичных форм и не предполагая m бесквадратным (при этом некоторые доказательства упрощены).

Замечание 13. Пусть L и L' — любые примитивные векторы нормы m , а r — любое наперед заданное нечетное число. Тогда можно найти такой целый примитивный кватернион C , что

$$CLC^{-1} = L', \quad (27)$$

причем если $m \equiv 1$ или $2 \pmod{4}$, то о. н. д. $(N(C), 2r) = 1$, а если $m \equiv 3 \pmod{8}$; то о. н. д. $(N(C), r) = 1$.

Это основное в теории целых поворотов предложение принадлежит Б. А. Венкову [см. (12), там же см. его доказательство].

Замечание 14. Пусть L и L' — любые примитивные векторы нормы m . Тогда найдутся такие целые кватернионы A и C и целое число b , что

$$CLC^{-1} = L', \quad b + L = AC, \quad b + L' = CA. \quad (28)$$

Доказательство. По предыдущему замечанию, найдется такой целый примитивный кватернион C , что

$$CLC^{-1} = L',$$

причем если $m \not\equiv 3 \pmod{8}$, то норма $N(C)$ нечетна. Рассмотрим два случая:

1) Пусть норма $N(C)$ нечетна. Тогда, так как $CL = L'C$, $C \cdot 1 = 1 \cdot C$, о. н. д. справа $(C, 1) = 1$, найдется (см. замечание 10) такое целое число $(-b)$, что

$$L \equiv (-b) \cdot 1 \pmod{C \text{ справа}}, \quad b + L = AC, \quad b + L' = CA.$$

2) Пусть норма $N(C)$ четна. Тогда $m \equiv 3 \pmod{8}$. Можно положить $C = (1 + i)C_1$, где C_1 — целый кватернион нечетной нормы (см. замечание 5, следствие 1). Имеем:

$$C_1 L C_1^{-1} = L', \quad L' = (1 + i)^{-1} L' (1 + i), \quad C_1 L = L' C_1, \\ b + L = A_1 C_1, \quad b + L' = C_1 A_1.$$

Будем считать b нечетным, заменяя в противном случае b на $b + N(C_1)$, A — на $A_1 + \bar{C}_1$. Но тогда норма $N(A_1)$ четна, $A_1 = A(1 + i)$. Отсюда следует:

$$b + L' = C_1 A_1, \quad b + L' = [(1 + i)C_1][A_1(1 + i)^{-1}] = CA, \quad b + L = A_1 C_1 = AC.$$

Замечание доказано.

Пусть L и L' — примитивные векторы нормы m . По предыдущему замечанию, повороту (т. е. упорядоченной паре векторов) (L, L') мы можем сопоставить такие целые кватернионы A нормы a , C нормы c и целое число b , что

$$CLC^{-1} = L', \quad b + L = AC, \quad b + L' = CA. \quad (29)$$

Будем говорить в этом случае, что бинарная квадратичная форма

$$(a, b, c) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = (\bar{A}x + Cy)(Ax + \bar{C}y) \quad (30)$$

управляет поворотом (L, L') .

Теперь мы можем формулировать предложение об управлении целых поворотов бинарными квадратичными формами, которое и используется в работе.

Замечание 15 *. Пусть L и L' — любые примитивные векторы нормы m . Тогда найдется приведенная примитивная положительная би-

* Соответствующее предложение в терминах теории идеалов имеется у Б. А. Венкова в работе (12).

нарная квадратичная форма (a, b, c) , $2|b| \leq a \leq c$, определителя m , управляющая поворотом (L, L') , т. е.

$$b + L = AC, \quad CLC^{-1} = L', \quad b + L' = CA, \quad N(A) = a, \quad N(C) = c. \quad (31)$$

Доказательство. По предыдущему замечанию, найдется форма (a_1, b_1, c_1) , управляющая поворотом (L, L') :

$$b_1 + L = A_1 C_1, \quad C_1 L C_1^{-1} = L', \quad b_1 + L' = C_1 A_1, \quad N(A_1) = a_1, \quad N(C_1) = c_1.$$

Легко видеть, что (a_1, b_1, c_1) есть примитивная положительная форма определителя m . Пусть посредством унимодулярной целочисленной подстановки $\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$ форма (a_1, b_1, c_1) переходит в приведенную форму (a, b, c) , $2|b| \leq a \leq c$. Определим кватернионы A и C равенствами:

$$\bar{A} = \bar{A}_1 g_{11} + C_1 g_{21},$$

$$C = \bar{A}_1 g_{12} + C_1 g_{22}.$$

Без труда найдем:

$$Sc(AC) = b, \quad Ve(AC) = L, \quad CLC^{-1} = L', \quad AC = b + L, \quad CA = b + L'.$$

Замечание доказано.

ГЛАВА I. ОСНОВНАЯ ЛЕММА

В этой главе мы формулируем (§ 1) и доказываем (§ 2—5) лемму, которая (помимо самостоятельного интереса) будет служить основой доказательства главного результата работы — теоремы 1 (гл. II). В § 6 дана удобная для наших применений формулировка этой леммы.

§ 1. Формулировка леммы. Предварительные замечания

1. Формулировка. Следующая основная лемма является существенным обобщением результата работы⁽¹⁷⁾:

ЛЕММА 1. Пусть дан целый примитивный кватернион R нечетной нормы $r > 1$ и целое число m , взаимно простое с r . Пусть l — целое число, удовлетворяющее сравнению

$$l^2 + m \equiv 0 \pmod{r}. \quad (1)$$

Пусть, наконец, \mathfrak{E} — трехмерная квадратуемая коническая область с вершиной в начале координат $(0, 0, 0)$ и телесным углом $\lambda > 0$. Обозначим через $t(R, \mathfrak{E}, l; m)$ количество целых примитивных векторов L нормы m , которые лежат в области \mathfrak{E}^* и для которых кватернион $l + L$ делится справа на R . Тогда при $m \rightarrow \infty$

$$t(R, \mathfrak{E}, l; m) \sim \frac{\lambda}{4\pi} \frac{1}{r \prod_{p \nmid r} \left(1 + \frac{1}{p}\right)} t(m), \quad (2)$$

где $t(m)$ — количество целых примитивных векторов нормы m ; постоянные, входящие в асимптотическое равенство (2), зависят лишь от r и \mathfrak{E} .

* Вектор $L = xi + yj + zk$ мы отождествляем с точкой (x, y, z) пространства. Мы говорим, что $L \in \mathfrak{E}$, если $(x, y, z) \in \mathfrak{E}$.

2. Предварительные замечания. Прежде, чем приступить к доказательству леммы 1, сделаем некоторые замечания, поясняющие и уточняющие ее формулировку.

1°. Асимптотическое равенство (2) следует понимать так, что по любому $\varepsilon > 0$ можно найти такое число m_0 , зависящее только от ε , r и \mathfrak{C} , что при $m > m_0$

$$(1 - \varepsilon) \frac{\lambda}{4\pi} \frac{t(m)}{r \prod_{p \nmid r} \left(1 + \frac{1}{p}\right)} \leq t(R, \mathfrak{C}, l; m) \leq (1 + \varepsilon) \frac{\lambda}{4\pi} \frac{t(m)}{r \prod_{p \nmid r} \left(1 + \frac{1}{p}\right)}.$$

Отметим, что мы допускаем и тот случай, когда $\lambda = 4\pi$ и \mathfrak{C} совпадает со всем пространством; от конической области \mathfrak{C} требуется лишь, чтобы она была квадратируемой по Жордану. Далее, замечаем (ср. введение, § 2), что

$$r \prod_{p \nmid r} \left(1 + \frac{1}{p}\right) = \sigma(r),$$

где произведение берется по всем простым делителям p числа r , есть количество примитивных примарных кватернионов нормы r . Поэтому для любых двух примитивных кватернионов R' и R'' нормы r при $m \rightarrow \infty$

$$t(R', \mathfrak{C}, l; m) \sim t(R'', \mathfrak{C}, l; m).$$

Делимость $l + L$ справа на R означает наличие следующего равенства в кватернионах:

$$l + L = UR, \quad (3)$$

где U — целый кватернион.

2°. Если R' и R'' ассоциированы слева, а $l \equiv l'' \pmod{r}$, то

$$t(R', \mathfrak{C}, l', m) = t(R'', \mathfrak{C}, l'', m). \quad (4)$$

Поэтому мы можем считать кватернион R примарным, а число l выбрать подходящим образом по модулю r .

3°. Асимптотическое равенство (2) нетривиально лишь в случае, когда действительно имеются примитивные векторы нормы m , т. е. [см., например, (25)] в случае, когда $m > 0$ и

$$m \equiv 1 \text{ или } 2 \pmod{4} \text{ или } m \equiv 3 \pmod{8}; \quad (5)$$

при этом, по теореме Гаусса (см. там же),

$$t(m) = \begin{cases} 12h(-m), & \text{если } m \equiv 1 \text{ или } 2 \pmod{4}, \\ 8h(-m), & \text{если } m \equiv 3 \pmod{8}, \end{cases} \quad (6)$$

где $h(-m)$ есть количество классов целочисленных собственно примитивных положительных бинарных квадратичных форм определителя m . В дальнейшем мы будем предполагать условие (5) выполненным. Тогда, по теореме Зигеля [см. введение, формула (1)],

$$x_\varepsilon m^{\frac{1}{2} - \varepsilon} < t(m) < x'_\varepsilon m^{\frac{1}{2} + \varepsilon}, \quad (7)$$

где $x_\varepsilon > 0$ и $x'_\varepsilon > 0$ — постоянные, зависящие лишь от произвольного $\varepsilon > 0$.

4°. Наконец, заметим следующее. В формулируемой лемме конус \mathfrak{C} предполагается фиксированным и не зависящим от m *. Однако мы фактически будем доказывать более сильное утверждение, допуская некоторую зависимость $\mathfrak{C}^{(m)}$ (с данным телесным углом $\lambda > 0$), но такую, что все $\mathfrak{C}^{(m)}$ равномерно относительно m квадратуемы, т. е. площадь покрытия границы $\mathfrak{C}^{(m)}$ в стандартном разбиении пространства равномерно относительно m стремится к нулю вместе с рангом разбиения. В частности, этому условию удовлетворяет случай, когда $\mathfrak{C}^{(m)}$ получается из $\mathfrak{C}^{(0)}$ вращением около вершины. Этому же условию удовлетворяет случай, когда $\mathfrak{C}^{(m)}$ есть выпуклый конус (или даже разбивается на ограниченное количество выпуклых конусов).

§ 2. Основные кватернионные равенства

1. Разбиение трехмерного пространства на элементарные конические области. Основные кватернионные равенства. Зададимся малым числом $\varepsilon_1 > 0$ и рассмотрим разбиение трехмерного пространства на непересекающиеся конические области $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \dots, \mathfrak{C}_n$ с вершинами в начале координат $(0, 0, 0)$ и угловыми диаметрами $\leq \varepsilon_1$. Такое разбиение, например, легко производится областями, проходящими через параллели и меридианы единичного шара. Мы можем считать, что число n ограничивается сверху постоянной, зависящей лишь от ε_1 .

Пусть s — целое число, определяемое неравенствами:

$$(16r) \sqrt{m} \leq r^s \leq (16r^2) \sqrt{m}. \quad (8)$$

Подберем целое число l_1 так, чтобы

$$l_1^2 + m \equiv 0 \pmod{r^s}, \quad l_1 \equiv l \pmod{r}, \quad \text{о. н. д.} \left(\frac{l_1^2 + m}{r^s}, r \right) = 1, \quad |l_1| < r^{s+1}. \quad (9)$$

В силу условия (1), это возможно. Пусть

$$L_1^{(k)}, L_2^{(k)}, \dots, L_{t_k}^{(k)} \quad (10)$$

суть все целые примитивные векторы нормы m , лежащие в области \mathfrak{C}_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Ясно, что

$$t_1 + t_2 + \dots + t_n = t(m). \quad (11)$$

Для некоторых k возможно, что $t_k = 0$. Так как целый кватернион $l_1 + L_i^{(k)}$ примитивен \pmod{r} и

$$N(l_1 + L_i^{(k)}) = l_1^2 + m \equiv 0 \pmod{r^s},$$

* Легко видеть, что если допускать произвольную зависимость \mathfrak{C} от m , то лемма будет просто не верна: по любому $\lambda < 4\pi$ можно построить область $\mathfrak{C}^{(m)}$, вовсе не содержащую точек L .

то (замечание 5) однозначно найдется примитивный примарный кватернион $B_i^{(k)}$ нормы r^s , делящий $l_1 + L_i^{(k)}$ справа:

$$l_1 + L_i^{(k)} = V_i^{(k)} B_i^{(k)} \quad (i = 1, 2, \dots, t_k; \quad k = 1, 2, \dots, n), \quad (12)$$

где $V_i^{(k)}$ — целый кватернион, простой по норме с $B_i^{(k)}$. Можно записать:

$$B_i^{(k)} = R_{is}^{(k)} R_{is-1}^{(k)} \dots R_{i_2}^{(k)} R_{i_1}^{(k)}, \quad (13)$$

где $R_{ij}^{(k)}$ — примитивные примарные кватернионы нормы r , однозначно определяемые кватернионами $B_i^{(k)}$.

2. Четырехмерные области операторов. Каждой трехмерной области векторов \mathfrak{E}_k ($k = 1, 2, \dots, n$) нашего разбиения мы сопоставляем четырехмерную область кватернионов Ω_k следующим образом. Внутри каждой из областей $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \dots, \mathfrak{E}_n$ фиксируем какие-либо оси, например, проходящие через их центры тяжести. Пусть M_k — вектор (не обязательно целый), лежащий на оси области \mathfrak{E}_k . Совокупность кватернионов X (не обязательно целых), для которых $XM_k X^{-1} \in \mathfrak{E}$, мы назовем областью Ω_k . Ясно, что Ω_k есть коническая область в четырехмерном пространстве.

Пусть ω_k — четырехмерный телесный угол области Ω_k (легко доказать, что она квадратуема), $\omega_0 = 2\pi^2$ — телесный угол всего четырехмерного пространства, λ — трехмерный телесный угол области \mathfrak{E} , $\lambda_0 = 4\pi$ — телесный угол всего трехмерного пространства. Тогда

$$\frac{\omega_k}{\omega_0} = \frac{\lambda}{\lambda_0}, \quad \omega_k = \frac{\pi}{2} \lambda. \quad (14)$$

На нетрудном доказательстве этого предложения из геометрической теории кватернионов мы не останавливаемся.

3. Формулировка утверждения о кватернионных равенствах (12). Главная трудность доказательства основной леммы заключается в доказательстве следующего утверждения (А): пусть $\nu_{k,s'}$ — количество индексов i ($i = 1, 2, \dots, t_k$) в равенствах (12), для которых $R_{i,s'+1}^{(k)} = R$, а кватернион $B_{is'}^{(k)} = R_{is'}^{(k)} \dots R_{i_1}^{(k)}$ принадлежит области Ω_k . Тогда найдется такое s_0 ($1 \leq s_0 < s$), что для каждого k или $t_k < \frac{t(m)}{\ln m}$, или при $m \rightarrow \infty$ и фиксированных $R, \Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$

$$\nu_{k,s_0} \sim \frac{\lambda}{4\pi} \frac{1}{\sigma(r)} t_k \quad \left(t_k \geq \frac{t(m)}{\ln m} \right). \quad (15)$$

Доказав утверждение (А), мы уже без труда выведем из него в § 5 основную лемму.

4. Вспомогательное предложение о целых точках на четырехмерной сфере. Нам потребуется следующее предложение, доказываемое известными средствами аналитической теории чисел [см. (26)].

Замечание 16. Пусть Ω — четырехмерная квадратуемая коническая область с вершиной в начале координат $(0, 0, 0, 0)$ и телесным углом $\omega > 0$; u — нечетное число. Пусть A и B — примитивные кватернионы

с условием $N(A)N(B) \setminus u$. Обозначим через $\sigma(\Omega, A, B; u)$ количество примитивных примарных кватернионов нормы u , лежащих в области Ω и делящихся на A слева и на B — справа. Тогда при $u \rightarrow \infty$ и фиксированных Ω, A, B

$$\sigma(\Omega, A, B; u) \sim \frac{u}{N(A)N(B)} \frac{\omega}{2\pi^2} \prod \left(1 + \frac{1}{p}\right), \quad (16)$$

где произведение берется по всем простым p , делящим u , но не делящим $N(A)N(B)$.

Применяя замечание 16 и учитывая (14), мы, по $\varepsilon_2 > 0$, найдем такое j_0 , зависящее только от $\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_n$, что для $j \geq j_0$

1) количество примитивных примарных кватернионов $R_j R_{j-1} \dots R_1$, где R_1, \dots, R_j — примарные кватернионы нормы r , с условиями $R_j = R, R_{j-1} \dots R_1 \in \Omega_k$, равно

$$\frac{\lambda}{4\pi} \frac{1}{\sigma(r)} r^j \prod_{p \nmid r} \left(1 + \frac{1}{p}\right) (1 + \varepsilon_2 \theta), \quad |\theta| \leq 1; \quad (17_1)$$

количество таких кватернионов с дополнительным условием, что $R_j \dots R_1 R_0$ примитивен, где R_0 — фиксированный примитивный кватернион нормы r , равно

$$\frac{\lambda}{4\pi} \frac{1}{\sigma(r)} r^j (1 + \varepsilon_2 \theta), \quad |\theta| \leq 1; \quad (17_2)$$

2) количество примитивных примарных кватернионов $R_j R_{j-1} \dots R_1$ с условием $R_j \neq R$ или $R_{j-1} \dots R_1 \notin \Omega_k$ равно

$$\left(1 - \frac{\lambda}{4\pi} \frac{1}{\sigma(r)}\right) r^j \prod_{p \nmid r} \left(1 + \frac{1}{p}\right) (1 + \varepsilon_2 \theta), \quad |\theta| \leq 1; \quad (17_3)$$

количество таких кватернионов с дополнительным условием, что $R_j \dots R_1 R_0$ примитивен, равно

$$\left(1 - \frac{\lambda}{4\pi} \frac{1}{\sigma(r)}\right) r^j (1 + \varepsilon_2 \theta), \quad |\theta| \leq 1. \quad (17_4)$$

5. Выбор группы равенств $l_1 + L = VB$. Приступим к доказательству утверждения (A). Пусть оно не верно. Тогда хотя бы для одного k_0 из $1, 2, \dots, n$ с условием $t_{k_0} \geq \frac{t(m)}{\ln m}$ найдется такое $\eta > 0$, не зависящее от m , что для некоторых $s_1 = \left\lceil \frac{s}{2n(j_0 + 1)} \right\rceil$ фиксированных вторых индексов $j_1 < j_2 < \dots < j_{s_1}$, где

$$j_1 \geq j_0, \quad j_2 - j_1 \geq j_0, \quad \dots, \quad j_{s_1} - j_{s_1-1} \geq j_0, \quad s - j_{s_1} \geq j_0,$$

имеют место неравенства:

$$v_{k, j_w} < (1 - \eta) \frac{\lambda}{4\pi} \frac{1}{\sigma(r)} t_{k_0} \quad (w = 1, 2, \dots, s_1) \quad (18a)$$

(для всех j_1, \dots, j_{s_1} одновременно), или имеют место неравенства:

$$v_{k, j_w} > (1 + \eta) \frac{\lambda}{4\pi} \frac{1}{\sigma(r)} t_{k_0} \quad (w = 1, 2, \dots, s_1) \quad (18b)$$

(опять-таки для всех j_1, \dots, j_{s_1}), когда m пробегает некоторую возрастающую до бесконечности последовательность (далее на протяжении

личество всех примитивных кватернионов B нормы r^s с единственным условием (17). В § 4, используя лишь (22), мы оценим снизу количество различных кватернионов B_i в равенствах (20). Окажется, что эти две оценки для больших m несовместимы. Это и докажет утверждение. Наконец, в § 5 мы выведем из утверждения (A) основную лемму.

§ 3. Оценка сверху для количества различных кватернионов B

1. Формулировка результата. Пусть w_1 — количество примитивных кватернионов нормы r^s :

$$B_i = R_{i_s} R_{i_{s-1}} \dots R_{i_1},$$

где R_{j_i} — примитивные примарные кватернионы нормы r , причем для каждого i количество индексов j из ранее фиксированного набора j_1, j_2, \dots, j_{s_i} , для которых $B_{ij} = R_{ij} R_{ij-1} \dots R_{i_1} \in \Omega_{k_s}$ и $R_{ij+1} = R$, будет меньше

$$\left(1 - \frac{\eta}{2}\right) \frac{\lambda}{4\pi} \frac{1}{\sigma(r)} s_1.$$

В этом параграфе мы докажем, что для достаточно малых $\varepsilon_2 > 0$ (см. § 2, п. 4)

$$w_1 < \kappa_p m^{\frac{1}{2} - \rho}, \quad (23)$$

где $\rho > 0$ — постоянная, зависящая лишь от $\gamma_1, \dots, \gamma_n, r$ и η , $\kappa_p > 0$ — постоянная, зависящая лишь от ρ .

2. Доказательство оценки (23). Каждый кватернион

$$B_i = R_{i_s} \dots R_{i_1}$$

состоится из частей

$$R_{i_1, j_1+1} \dots R_{i_1}, \quad R_{i_2, j_2+1} \dots R_{i_2, j_1+2}, \dots, R_{i_{j_{s_1}+1}} \dots R_{i_{j_{s_1-1}+2}},$$

$$R_{i_s} \dots R_{i_{j_{s_1}+2}}.$$

Поэтому, в силу оценок (17), количество кватернионов $B_i = R_{i_s} \dots R_{i_1}$ у которых на s_2 заданных местах из числа j_1, \dots, j_{s_1} выполняется условие

$$R_{ij_{l+1}} = R, \quad B_{ij_l} \in \Omega_{k_s},$$

а на остальных $(s_1 - s_2)$ местах из числа j_1, \dots, j_{s_1} это условие не выполняется, равно

$$\left(\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{\sigma(r)}\right)^{s_1} \left(1 - \frac{\lambda}{4\pi} \frac{1}{\sigma(r)}\right)^{s_1 - s_2} r^s \prod_{p \nmid r} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \cdot (1 + \theta_1 \varepsilon_2) \dots (1 + \theta_{s_1} \varepsilon_2).$$

Поэтому

$$w_1 \leq \left\{ \sum_{s_2 \leq \left(1 - \frac{\eta}{2}\right) \frac{\lambda}{4\pi} \frac{1}{\sigma(r)} s_1} \frac{s_1!}{s_2! (s_1 - s_2)!} \left(\frac{\lambda}{4\pi} \cdot \frac{1}{\sigma(r)}\right)^{s_1} \left(1 - \frac{\lambda}{4\pi} \frac{1}{\sigma(r)}\right)^{s_1 - s_2} \right\} \cdot \left\{ r^s \prod_{p \nmid r} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \right\} (1 + \varepsilon_2)^{s_1}. \quad (24)$$

Теперь из (24) мы уже без труда получим (23). Обозначим, ради краткости,

$$\frac{\lambda}{4\pi} \frac{1}{\sigma(r)} = \beta, \quad s_1 = \gamma_1 \ln m, \quad s_2 = \gamma_2 \ln m.$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} & \frac{s_1!}{s_2! (s_1 - s_2)!} \left(\frac{\lambda}{4\pi} \frac{1}{\sigma(r)} \right)^{s_2} \left(1 - \frac{\lambda}{4\pi} \frac{1}{\sigma(r)} \right)^{s_1 - s_2} = \\ & = \frac{(\gamma_1 \ln m)!}{(\gamma_2 \ln m)! (\gamma_1 \ln m - \gamma_2 \ln m)} \beta^{\gamma_2 \ln m} (1 - \beta)^{\gamma_1 \ln m - \gamma_2 \ln m}, \end{aligned}$$

где, в силу $s_2 \leq \left(1 - \frac{\eta}{2}\right) \frac{\lambda}{4\pi} \frac{1}{\sigma(r)} s_1$,

$$\gamma_2 < \left(1 - \frac{\eta}{2}\right) \beta \gamma_1.$$

Применим формулу Стирлинга в простейшем виде:

$$\left(\frac{v}{e}\right)^v < v! < 2\sqrt{2\pi v} \left(\frac{v}{e}\right)^v;$$

тогда после легких выкладок получим:

$$\begin{aligned} & \frac{s_1!}{s_2! (s_1 - s_2)!} \left(\frac{\lambda}{4\pi} \frac{1}{\sigma(r)} \right)^{s_2} \left(1 - \frac{\lambda}{4\pi} \frac{1}{\sigma(r)} \right)^{s_1 - s_2} < \\ & < 2\sqrt{2\pi\gamma_1 \ln m}^{\gamma_1 \ln \gamma_1 - (\gamma_1 - \gamma_2) \ln (\gamma_1 - \gamma_2) - \gamma_2 \ln \gamma_2 + \gamma_2 \ln \beta + (\gamma_1 - \gamma_2) \ln (1 - \beta)}. \end{aligned}$$

Функция

$$f(\gamma_2) = \gamma_1 \ln \gamma_1 - (\gamma_1 - \gamma_2) \ln (\gamma_1 - \gamma_2) - \gamma_2 \ln \gamma_2 + \gamma_2 \ln \beta + (\gamma_1 - \gamma_2) \ln (1 - \beta)$$

такова, что $f(\beta\gamma_1) = 0$ и $f'(\gamma_2) > 0$, если $0 < \gamma_2 < \beta\gamma_1$. Поэтому

$$f(\gamma_2) \leq f\left(\left(1 - \frac{\eta}{2}\right) \beta \gamma_1\right) < 0.$$

Обозначая

$$-f\left(\left(1 - \frac{\eta}{2}\right) \beta \gamma_1\right) = 3\rho > 0,$$

мы будем иметь:

$$\frac{s_1!}{s_2! (s_1 - s_2)!} \left(\frac{\lambda}{4\pi} \frac{1}{\sigma(r)} \right)^{s_2} \left(1 - \frac{\lambda}{4\pi} \frac{1}{\sigma(r)} \right)^{s_1 - s_2} < 2\sqrt{2\pi\gamma_1 \ln m} m^{-3\rho}. \quad (25)$$

Далее, в силу (8),

$$r^s \prod_{p \setminus r} \left(1 + \frac{1}{p}\right) < \kappa_4 \sqrt{m}. \quad (26)$$

Наконец, для достаточно малых $\varepsilon_2 > 0$

$$(1 + \varepsilon_2)^{s_1} = m^{\gamma_1 \ln (1 + \varepsilon_2)} \leq m^\rho. \quad (27)$$

Поэтому неравенство (24) дает:

$$w_1 \leq \left(1 - \frac{\eta}{2}\right) \frac{\lambda}{4\pi} \frac{1}{\sigma(r)} s_1 \cdot 2\sqrt{2\pi\gamma_1 \ln m} \cdot m^{-3\rho} \cdot \kappa_4 \sqrt{m} \cdot m^\rho \leq \kappa_5 m^{\frac{1}{2} - \rho}$$

для достаточно больших m . Тем самым оценка (23) доказана.

§ 4. Оценка снизу для количества различных кватернионов B

1. Формулировка результата. Пусть w — количество различных кватернионов B_i в равенствах (20). Основной целью этого параграфа является получение следующей оценки снизу:

$$w > \kappa_6^{(\varepsilon)} m^{\frac{1}{2} - \varepsilon}, \quad (28)$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольно малое число, а $\kappa_6^{(\varepsilon)} > 0$ — постоянная, зависящая только от ε . При этом мы воспользуемся лишь тем свойством равенств (20), что их количество t' оценивается формулой (22) или даже неравенством

$$t' > \kappa_7^{(\varepsilon)} m^{\frac{1}{2} - \varepsilon}$$

2. Два вспомогательных предложения из теории бинарных квадратичных форм. Для доказательства оценки (28) нам понадобятся следующие два простых замечания.

Замечание 17. Пусть $\varphi(x, y) = \delta(\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2)$ — положительная целочисленная бинарная квадратичная форма определителя d и делителя δ . Тогда количество представлений $\varphi(x, y)$ суммой трех целочисленных квадратов, $\varphi(x, y) = \sum_{j=1}^3 (a_j x + b_j y)^2$, будет

$$< \kappa_8^{(\varepsilon)} d^\varepsilon \sqrt{\text{о. н. д.} \left(\frac{d}{8^2}, \delta \right)}, \quad (29)$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольно малое число, а $\kappa_8^{(\varepsilon)} > 0$ — постоянная, зависящая только от ε *

Доказательство. Используем метод Гаусса для нахождения не примитивных представлений формы $\varphi(x, y)$ суммой трех квадратов (см., например, (25), стр. 141—142; при доказательстве этого замечания мы пользуемся применяемыми там обозначениями). Обозначим

$$e = \text{о. н. д.} (a_2 b_3^* - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Заметим, что $\delta \setminus e$ и что $e^2 \setminus d$.

Прежде всего мы видим, что нам достаточно оценить количество представлений, принадлежащих к данному делителю e и с данным $\kappa = \text{о. н. д.} (a_1, a_2, a_3)$, $\kappa \mu = e$, ибо количество пар (κ, μ) , $\kappa \mu = e$, $e^2 \setminus d$, будет $< \kappa_9^{(\varepsilon)} d^\varepsilon$.

Но количество последних не более, чем количество чисел λ из ряда $0, 1, \dots, \mu - 1$, для которых форма

$$\varphi' = \varphi \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\kappa} & -\frac{\lambda}{e} \\ 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix}$$

целочисленна, умноженное на количество примитивных представлений формы φ' суммой трех квадратов. Так как количество примитивных пред-

* Более точный результат можно получать, пользуясь методом Зигеля [см. (27), (28)]. Здесь мы даем элементарное доказательство нужной нам оценки (29).

ставлений φ' суммой трех квадратов $< \kappa_{10}^{(e)} d^e$, то нам достаточно оценить количество таких λ .

Не нарушая общности, считаем, что α взаимно просто с $\frac{d}{\delta^2}$ (в противном случае форму φ заменим ей эквивалентной). При условии представимости коэффициенты формы φ' :

$$\frac{\delta\alpha}{\kappa^2}, \quad \frac{\delta}{e\kappa}(-\alpha\lambda + \beta\kappa), \quad \frac{\delta}{e^2\alpha}\left[(-\alpha\lambda + \beta\kappa)^2 + \frac{\kappa^2 d}{\delta^2}\right]$$

должны быть целыми числами, т. е. λ , $0 \leq \lambda < \mu$, должно удовлетворять сравнениям:

$$\delta(-\alpha\lambda + \beta\kappa) \equiv 0 \pmod{e\kappa},$$

$$\delta\left[(-\alpha\lambda + \beta\kappa)^2 + \frac{\kappa^2 d}{\delta^2}\right] \equiv 0 \pmod{\alpha e^2}.$$

Так как $\delta \nmid e$, то мы можем положить $e = \delta e_1$, где e_1 — целое число, и

$$-\alpha\lambda + \beta\kappa \equiv 0 \pmod{e_1\kappa},$$

$$(-\alpha\lambda + \beta\kappa)^2 + \frac{\kappa^2 d}{\delta^2} \equiv 0 \pmod{\alpha e_1^2 \delta}.$$

Пусть $-\alpha\lambda + \beta\kappa = e_1 \kappa t$, где t , в силу первого сравнения, — целое число. Тогда второе сравнение дает:

$$t^2 \equiv -\frac{d}{e_1^2 \delta^2} \pmod{\frac{\alpha \delta}{\kappa^2}}.$$

Количество различных $t \pmod{\frac{\delta}{\kappa^2}}$ будет

$$< \kappa_{11}^{(z)} \left(\frac{\delta}{\kappa^2}\right)^e \sqrt{\text{о. н. д.} \left(\frac{d}{\delta^2}, \frac{\delta}{\kappa^2}\right)} \leq \kappa_{11}^{(e)} d^e \sqrt{\text{о. н. д.} \left(\frac{d}{\delta^2}, \delta\right)}.$$

Но если $t' \equiv t'' \pmod{\frac{\delta}{\kappa^2}}$, то, определяя λ' и λ'' из уравнений

$$-\alpha\lambda' + \beta\kappa = e_1 \kappa t', \quad -\alpha\lambda'' + \beta\kappa = e_1 \kappa t'',$$

будем иметь:

$$\lambda' \equiv \lambda'' \pmod{\frac{\delta}{\kappa^2} e_1 \kappa}, \quad \frac{\delta}{\kappa^2} e_1 \kappa = \mu.$$

Поэтому классу $t \pmod{\frac{\delta}{\kappa^2}}$ отвечает не более одного λ из промежутка $0, 1, \dots, \mu - 1$.

Замечание доказано.

Замечание 18. Количество классов положительных бинарных квадратичных форм определителя d с данным $\min \varphi$

$$< \kappa_{12}^{(e)} d^e \sqrt{\text{о. н. д.} (d, \min \varphi)}, \quad (30)$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольно малое число, а $\kappa_{12}^{(e)} > 0$ — постоянная, зависящая только от ε .

Доказательство. Действительно, пусть (a, b, c) , $2 \mid b \mid \leq a \leq c$, — приведенная бинарная квадратичная форма определителя $d = ac - b^2$, причем $\min \varphi = a$. Тогда количество таких форм (а следовательно, и количество классов) не превосходит количества решений сравнения

$$b^2 \equiv -d \pmod{a}.$$

Но количество решений последнего оценивается неравенством (30).

Замечание доказано.

3. Сопряженные пары. Сопоставление им классов положительных бинарных квадратичных форм. Пару (L_1, L_2) двух целочисленных примитивных векторов L_1 и L_2 нормы m мы будем называть сопряженной, если $l_1 + L_1$ (где l_1 — фиксированное в § 2 число) делится справа на некоторый (примитивный) кватернион B нормы r^s , а $l_1 + L_2$ делится справа на сопряженный ему кватернион \bar{B} . Оценим сверху количество таких пар.

Каждой сопряженной паре (L_1, L_2) мы будем сопоставлять (см. введение, § 2) приведенную целочисленную положительную бинарную квадратичную форму $\varphi = (a, b, c)$, $2 \mid b \mid \leq a \leq c$, определителя $m = ac - b^2$, управляющую поворотом (L_1, L_2) :

$$b + L_1 = AC, \quad A^{-1}L_1A = L_2, \quad b + L_2 = CA, \quad (31)$$

где A и C — целые кватернионы, причем $N(A) = a$, $N(C) = c$.

4. Оценка количества сопряженных пар. Докажем, что количество сопряженных пар

$$< x_{13}^{(\varepsilon)} m^{\frac{1}{2} + \varepsilon}, \quad (32)$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольно малое число, а $x_{13}^{(\varepsilon)} > 0$ — постоянная, зависящая только от ε .

1) Прежде всего мы докажем, что количество сопряженных пар (L_1, L_2) , управляемых заданной формой (a, b, c) , $2 \mid b \mid \leq a \leq c$, $\det(a, b, c) = m$, при условиях

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{4}{3}} m^{\frac{1}{2} - \nu} < a \leq \sqrt{\frac{4}{3}} m^{\frac{1}{2} - \nu}, \quad \text{о. н. д. } (m, a) = e, \quad (33)$$

где ν удовлетворяет неравенству

$$1 \leq \sqrt{\frac{4}{3}} m^{\frac{1}{2} - \nu} \leq \sqrt{\frac{4}{3}} m,$$

оценивается сверху неравенством:

$$< x_{14}^{(\varepsilon)} m^{\frac{\nu}{2} + \varepsilon} \sqrt{e}. \quad (34)$$

а) Учитывая (31), имеем:

$$l_1 + L_1 = W_1 B, \quad l_1 + L_2 = W_2 \bar{B}, \\ A^{-1}(l_1 + L_1)A = l_1 + L_2, \quad W_1 B A = A W_2 \bar{B},$$

и так как, в силу (9), о. н. д. $(N(\bar{B}), N(W_1)) = 1$, то

$$BA \equiv 0 \pmod{\bar{B} \text{ справа}}.$$

Отсюда (см. замечание 8, следствие 3)

$$2\text{Sc}(BA) = 2\text{Sc}(AB) \equiv 0 \pmod{r^s}. \quad (35)$$

Аналогично,

$$\bar{C}^{-1}(l_1 + L_1)\bar{C} = l_1 + L_2, \quad W_1 B \bar{C} = \bar{C} W_2 \bar{B}, \quad B \bar{C} \equiv 0 \pmod{\bar{B} \text{ справа}}, \\ 2\text{Sc}(B \bar{C}) = 2\text{Sc}(\bar{B} C) \equiv 0 \pmod{r^s}. \quad (36)$$

б) Далее, учитывая (8) и (33), по неравенству Коши (см. введение, § 2, п. 2), имеем:

$$2 | \text{Sc}(AB) | \leq 2 \sqrt{N(B)N(A)} \leq 2 \sqrt{16r^2 m^{\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{4}{3} m^{\frac{1}{2}}} < 16rm^{\frac{1}{2}}, \quad (37)$$

$$2 | \text{Sc}(\bar{B}C) | \leq 2 \sqrt{N(B)N(C)} = 2 \sqrt{r^s \frac{l^2 + m}{c}} < 16rm^{\frac{1}{2} + \frac{\nu}{2}}.$$

Но (35), (37) и (8) дают: $\text{Sc}(AB) = 0$, и мы можем положить:

$$H_1 = AB = -g'_1 i - g'_2 j - g'_3 k,$$

$$H_2 = \bar{B}C = \frac{1}{2} (dr^s + g''_1 i + g''_2 j + g''_3 k),$$

где $d, g'_1, g'_2, g'_3, g''_1, g''_2, g''_3$ суть целые числа. В силу (37),

$$|d| \leq m^{\frac{\nu}{2}}. \quad (38)$$

в) Каждой паре кватернионов H_1 и H_2 отвечает не более двенадцати сопряженных пар (L_1, L_2) : так как $H_1 H_2 = r^s AC = r^s (b + L_1)$ и так как r^s и b заданы, то L_1 определяется однозначно; кватернион A данной нормы a определяется из равенства $b + L_1 = AC$ однозначно с точностью до ассоциированных справа; $L_2 = A^{-1} L_1 A$.

г) При данном d оценим количество пар кватернионов H_1, H_2 . Для этого рассмотрим форму

$$N(\bar{H}_1 x + H_2 y) = \left(\frac{dr^s}{2} y\right)^2 + \left(g'_1 x + \frac{g''_1}{2} y\right)^2 + \left(g'_2 x + \frac{g''_2}{2} y\right)^2 + \left(g'_3 x + \frac{g''_3}{2} y\right)^2.$$

Так как, с другой стороны,

$$\begin{aligned} N(\bar{H}_1 x + H_2 y) &= N(\bar{H}_1 x) + N(H_2 y) + 2\text{Sc}(H_1 x \cdot H_2 y) = \\ &= r^s (ax^2 + 2bxy + cy^2), \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} r^s [(4a)x^2 + 2(4b)xy + (4c - dr^s)y^2] &= \\ = (2g'_1 x + g''_1 y)^2 + (2g'_2 x + g''_2 y)^2 + (2g'_3 x + g''_3 y)^2, \end{aligned} \quad (39)$$

и мы имеем представление бинарной формы

$$\psi = r^s (4a, 4b, 4c - dr^s)$$

определителя

$$\det \psi = r^{2s} (16m - 4adr^s)$$

суммой трех линейных целочисленных квадратов. Пусть

$$\text{о. н. д. } (4a, 4b, 4c - dr^s) = e_1.$$

Тогда $e_1 \setminus 4m, e_1 \setminus 4a, e_1 \setminus 4c$. Поэтому количество таких представлений (при данном d), т. е. количество чисел $g'_1, g'_2, g'_3, g''_1, g''_2, g''_3$ будет (замечание 17)

$$< \kappa_8^{(e)} (\det \psi)^{\frac{e}{2}} \sqrt{\text{о. н. д. } \left(\frac{\det \psi}{r^{2s} e_1^2}, e_1 r^s \right)} =$$

$$= \kappa_8^{(\varepsilon)} [r^{2s} (16m - 4adr^s)]^{\frac{\varepsilon}{2}} \sqrt{0. \text{ н. д. } \left(\frac{16m - 4adr^s}{e_1^2}, e_1 r^s \right)} < \\ < \kappa_{15}^{(\varepsilon)} m^{\varepsilon} e_1^{\frac{1}{2}} \leq 4\kappa_{15}^{(\varepsilon)} m^{\varepsilon} e^{\frac{1}{2}}, \quad (40)$$

либо 0. н. д. $(16m - 4adr^s, r^s) = 0. \text{ н. д. } (16m, r^s) = 1$.

д) Количество различных d оценивается неравенством (38). Оценка (34) следует из (40), (38) и пункта в) *.

2) Теперь мы можем вывести неравенство (32). Для этого разобьем промежуток от 0 до $\sqrt{\frac{4}{3}}m$ на частичные промежутки точками

$$\sqrt{\frac{4}{3}}m^{\frac{1}{2}-v_1} = \sqrt{\frac{4}{3}}m, \quad \sqrt{\frac{4}{3}}m^{\frac{1}{2}-v_2} = \\ = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{3}}m^{\frac{1}{2}-v_1}, \quad \sqrt{\frac{4}{3}}m^{\frac{1}{2}-v_3} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{3}}m^{\frac{1}{2}-v_2}, \dots \\ \dots, \quad \sqrt{\frac{4}{3}}m^{\frac{1}{2}-v_v} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{3}}m^{\frac{1}{2}-v_{v-1}},$$

где $\frac{1}{2} \leq \sqrt{\frac{4}{3}}m^{\frac{1}{2}-v_v} < 1$.

Количество a с данным 0. н. д. $(a, m) = e$ в промежутке

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{3}}m^{\frac{1}{2}-v_t} < a \leq \sqrt{\frac{4}{3}}m^{\frac{1}{2}-v_t} \quad (t = 1, 2, \dots, v)$$

будет

$$< \frac{1}{e}\sqrt{\frac{4}{3}}m^{\frac{1}{2}-v_t}.$$

Поэтому, согласно замечанию 18, количество форм (a, b, c) определителя $m, 2 \mid b \mid < a \leq c$,

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{3}}m^{\frac{1}{2}-v_t} < a \leq \sqrt{\frac{4}{3}}m^{\frac{1}{2}-v_t}, \text{ 0. н. д. } (a, m) = e,$$

будет

$$< \frac{1}{e}\sqrt{\frac{4}{3}}m^{\frac{1}{2}-v_t} \kappa_{12}^{(\varepsilon)} m^{\varepsilon} e^{\frac{1}{2}} = \kappa_{16}^{(\varepsilon)} m^{\frac{1}{2}-v_t+\varepsilon} \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}.$$

Значит, в силу (34), количество сопряженных пар, управляемых такими формами, будет

$$< \kappa_{14}^{(\frac{\varepsilon}{2})} m^{\frac{v_t}{2}+\frac{\varepsilon}{2}} e^{\frac{1}{2}} \cdot \kappa_{16}^{(\frac{\varepsilon}{2})} m^{\frac{1}{2}-v_t+\frac{\varepsilon}{2}} \frac{1}{e} = \kappa_{17}^{(\varepsilon)} m^{\frac{1}{2}-\frac{v_t}{2}+\varepsilon} \leq \kappa_{17}^{(\varepsilon)} m^{\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$

* Используя условие, налагаемое на $d: 4c - dr^s \equiv 0 \pmod{e_1}$, мы легко докажем,

что в неравенстве (34) множитель $e^{\frac{1}{2}}$ можно опустить.

§ 5. Завершение доказательства леммы

1. Доказательство утверждения (А). Так как, очевидно, $w \leq w_1$, то для подходяще подобранного $\varepsilon > 0$ и достаточно больших m оценки (23) и (28) несовместимы. Тем самым мы привели к противоречию сделанное в § 2 предположение о том, что утверждение (А) не верно. Итак, утверждение (А) доказано.

2. Вывод основной леммы из утверждения (А). Так как область \mathfrak{E} quadriруема, то по $\varepsilon_3 > 0$ можно найти такое $\varepsilon_1 > 0$, что угловая ε_1 -окрестность $\mathfrak{E}^{(\varepsilon_1)}$ границы области \mathfrak{E} будет иметь телесный угол, меньший $\varepsilon_3 \lambda$. Рассмотрим коническую область $\mathfrak{E}' = \mathfrak{E} / \mathfrak{E}^{(\varepsilon_1)}$, состоящую из точек области \mathfrak{E} , не входящих в $\mathfrak{E}^{(\varepsilon_1)}$. Ее телесный угол $> (1 - \varepsilon_3) \lambda$. Построим разбиение $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ коническими областями с угловым диаметром $\leq \varepsilon_1$ и применим к \mathfrak{E}' (вместо \mathfrak{G}) утверждение (А). Тогда для некоторого фиксированного s_0 по $\varepsilon_4 > 0$ можно найти такое m_0 , что при $m \geq m_0$ или $t_k < \frac{t(m)}{\ln m}$, или

$$\nu_{k, s_0} > (1 - \varepsilon_4) \frac{(1 - \varepsilon_3) \lambda}{4\pi} \frac{t_k}{\sigma(r)}. \quad (42)$$

Рассмотрим преобразование совокупности $t(m)$ векторов $L_i^{(k)}$, определяемое формулой (ср. равенства (12)):

$$L_i'^{(k)} = B_{is_0}^{(k)} L_i^{(k)} (B_{is_0}^{(k)})^{-1} \quad (k = 1, \dots, n; i = 1, \dots, t_k). \quad (43)$$

Как и выше (§ 4, п. 5), докажем, что $L_i'^{(k)}$ суть целые примитивные векторы нормы m . При этом разным $L_i^{(k)}$ отвечают разные $L_i'^{(k)}$, ибо иначе, по формулам (12),

$$B_{is_0}^{(k_2)} V_{i_1}^{(k_1)} B_{is_0}'^{(k_1)} = B_{is_0}^{(k_2)} V_{i_2}^{(k_2)} B_{is_0}'^{(k_2)},$$

и так как $B_{is_0}^{(k_1)} = R_{is_0} \dots R_{i1}$, $B_{is_0}'^{(k_1)} = R_{is_0} \dots R_{is_0+1}$ суть примитивные примарные кватернионы (см. введение, § 2, п. 3), то (см. замечание 5)

$$B_{is_0}^{(k_1)} = B_{is_0}^{(k_2)}, \quad L_{i_1}^{(k_1)} = L_{i_2}^{(k_2)}, \quad k_1 = k_2, \quad i_1 = i_2.$$

Заметим, что если $B_{is_0}^{(k)} \in \Omega_k$ и $R_{is_0+1} = R$, то $L_i'^{(k)}$ лежит в области \mathfrak{E} и $l_1 + L_i'^{(k)}$ делится справа на R . Поэтому неравенства (42) дают (если учесть формулу (4)):

$$t(R, \mathfrak{E}, l; m) \geq \sum_{k=1}^n \nu_{k, s_0} > (1 - \varepsilon_4) (1 - \varepsilon_3) \frac{\lambda}{4\pi} \frac{1}{\sigma(r)} \left(t(m) - n \frac{t(m)}{\ln m} \right),$$

и, в силу произвольности $\varepsilon_4 > 0$ и $\varepsilon_3 > 0$, по $\varepsilon > 0$ можно найти такое m'_0 , что для $m \geq m'_0$

$$t(R, \mathfrak{E}, l; m) > (1 - \varepsilon) \frac{\lambda}{4\pi} \frac{1}{\sigma(r)} t(m).$$

Применяя утверждение (А) к области $\mathfrak{E}'' = \mathfrak{E} \cup \mathfrak{E}^{(\varepsilon_1)}$ (т. е. к ε_1 -расширению области \mathfrak{E}), точно так же докажем, что по $\varepsilon > 0$ можно найти такое m''_0 , что для $m \geq m''_0$

$$t(R, \mathfrak{E}, l; m) < (1 + \varepsilon) \frac{\lambda}{4\pi} \frac{1}{\sigma(r)} t(m).$$

Тем самым мы, наконец, доказали основную лемму.

§ 6. Следствие из основной леммы

1. Формулировка. Для приложений в следующей главе основную лемму целесообразно формулировать иначе:

Следствие. Пусть даны целые кватернионы R_1 и R_2 с условием, что $R_1 R_2$ есть целый примитивный кватернион нечетной нормы $r > 1$; пусть m — целое число, взаимно простое с r , а l удовлетворяет сравнению

$$l^2 + m \equiv 0 \pmod{r}. \quad (44)$$

Пусть, наконец, \mathfrak{E} — трехмерная квадрируемая коническая область с вершиной в начале координат и телесным углом $\lambda > 0$. Обозначим через $t(R_1, R_2, \mathfrak{E}, l; m)$ количество целых примитивных векторов L нормы m , которые лежат в области \mathfrak{E} и для которых кватернион $l + L$ делится справа на R_1 , а слева — на R_2 . Тогда при $m \rightarrow \infty$

$$t(R_1, R_2, \mathfrak{E}, l; m) \sim \frac{\lambda}{4\pi} \frac{1}{r \prod_{p \nmid r} \left(1 + \frac{1}{p}\right)} t(m). \quad (45)$$

Сама лемма есть частный случай формулы (45), когда $R_2 = 1$, $R_1 = R$.

2. Доказательство. К повернутой области $\mathfrak{E}' = R_2^{-1} \mathfrak{E} R_2$ с телесным углом λ применим основную лемму, положив $R = R_1 R_2$. Если целый примитивный вектор L' нормы m принадлежит области \mathfrak{E}' , а кватернион $l + L'$ делится справа на R , то $L = R_2 L' R_2^{-1}$ есть целый примитивный вектор нормы m (ср. выше, § 4, п. 5), лежащий в области \mathfrak{E} , причем $l + L$ делится справа на R_1 , а слева — на R_2 . Как и ранее (§ 5, п. 2), можно доказать, что разным L' соответствуют разные L , поэтому

$$t(R_1, R_2, \mathfrak{E}, l; m) = t(R, \mathfrak{E}', l; m).$$

Следствие доказано.

ГЛАВА II. ТЕОРЕМА О ЦЕЛЫХ ТОЧКАХ НА НЕКОТОРЫХ ЭЛЛИПСОИДАХ

В этой главе формулирован (§ 1) и доказан (§ 2) основной результат статьи — теорема 1 о целых примитивных точках на эллипсоидах довольно общего вида. В § 3 теорема 1 переносится на все целые (в том числе, непримитивные) точки (теорема 2).

§ 1. Формулировка основной теоремы. Ее частные случаи

1. Формулировка основной теоремы. Следующая теорема (ее мы уже формулировали во введении) решает задачу, поставленную в начале работы, для некоторого типа положительных тернарных квадратичных форм:

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f(x, y, z)$ — положительная тернарная целочисленная собственно примитивная квадратичная форма нечетных инвариан-

тов $[r, 1]$ (т. е. $\Omega = r$, $\Delta = 1$) *, принадлежащая роду $\mathfrak{G}_{[r, 1]}$, с характеристиками $\left(\frac{-f}{p}\right) = 1$ для всех простых $p \nmid r$. Пусть g — целое нечетное число с условием $rg \not\equiv 1$. Наконец, пусть \mathfrak{E} — квадратируемая коническая область с вершиной в начале координат и f -эллиптическим телесным углом $\lambda > 0$ **. Рассмотрим целое число m , взаимно простое с rg , и целые числа x_0, y_0, z_0 , удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0, z_0) &\equiv (\text{mod } 8rg), \quad \text{о. н. д. } (x_0, y_0, z_0, 2) = 1, \\ \left(\frac{-m}{p}\right) &= 1 \text{ для всех простых } p \nmid g. \end{aligned} \quad (1)$$

Обозначим через $t(f, \mathfrak{E}, g; m)$ количество целых примитивных точек (x, y, z) эллипсоида $f(x, y, z) = m$, лежащих в конусе \mathfrak{E} и сравнимых с (x_0, y_0, z_0) по модулю g . Тогда при $m \rightarrow \infty$ и фиксированных f, \mathfrak{E}, g

$$t(f, \mathfrak{E}, g; m) \sim \frac{\lambda}{4\pi} \frac{2^k}{rg^2 \prod_{p \nmid rg} \left(1 + \frac{1}{p}\right)} t(m), \quad (2)$$

где $t(m)$ — количество примитивных представлений числа m суммой трех квадратов, k — количество простых делителей r , не входящих в g ; произведение в знаменателе (2) берется по всем различным простым делителям числа rg .

Поясним формулировку теоремы. Основные понятия арифметики квадратичных форм, в частности понятия порядка и рода форм, мы предполагаем известными [см. например, (1)]. Числа r и g могут быть любыми положительными нечетными, в том числе единицами; исключается лишь случай, когда $r = g = 1$. В случае $r = 1$ мы имеем класс простейших форм $f = x^2 + y^2 + z^2$. Точно так же мы допускаем случай, когда $\lambda = 4\pi$, т. е. когда конус \mathfrak{E} вырождается во все пространство.

В силу теоремы Гаусса [см. гл. I, формула (6)], $t(f, \mathfrak{E}, g; m) = 0$, если $m \leq 0$, или $m \equiv 0 \pmod{4}$, или $m \equiv 7 \pmod{8}$, и формула (2) может быть записана следующим образом:

$$t(f, \mathfrak{E}, g; m) \sim \begin{cases} \frac{3\lambda}{\pi} \frac{2^k}{rg^2 \prod_{p \nmid rg} \left(1 + \frac{1}{p}\right)} h(-m), & \text{если } m \equiv 1 \text{ или } 2 \pmod{4}, \\ \frac{2\lambda}{\pi} \frac{2^k}{rg^2 \prod_{p \nmid rg} \left(1 + \frac{1}{p}\right)} h(-m), & \text{если } m \equiv 3 \pmod{8}. \end{cases}$$

Асимптотическое равенство (2), так же как и (3), мы понимаем следующим образом: по $\varepsilon > 0$ можно найти такое m_0 , зависящее только от

* Ω — общий наибольший делитель коэффициентов формы, взаимной с f ; $\Omega^2 \Delta = \det f$.

** Мы говорим, что \mathfrak{E} имеет f -эллиптический телесный угол λ , если в результате линейного однородного преобразования, переводящего f в $x^2 + y^2 + z^2$, \mathfrak{E} преобразуется в коническую область с (обыкновенным) телесным углом λ . Легко видеть, что f -эллиптический телесный угол определяется лишь f и \mathfrak{E} .

f , \mathfrak{E} и g , что для $m > m_0$

$$(1 - \varepsilon) \frac{\lambda}{4\pi} \frac{2^k}{r g^2 \prod_{p \nmid r g} \left(1 + \frac{1}{p}\right)} t(m) \leq t(f, \mathfrak{E}, g; m) \leq \\ \leq (1 + \varepsilon) \frac{\lambda}{4\pi} \frac{2^k}{r g^2 \prod_{p \nmid r g} \left(1 + \frac{1}{p}\right)} t(m).$$

Фактически мы доказываем утверждение несколько более сильное, чем сформулировано в теореме. Именно, утверждение остается справедливым, если, фиксируя лишь r, g и $\lambda > 0$, допускать зависимость f и $\mathfrak{E}^{(m)}$ от m с тем единственным условием, что все $\mathfrak{E}^{(m)}$ равномерно относительно m квадратуемы. Таким образом, при этом условии m_0 зависит только от r, g и λ . Условию равномерной квадратуемости удовлетворяют, в частности, области $\mathfrak{E}^{(m)}$, распадающиеся на ограниченное количество выпуклых областей.

Отметим, наконец, что первое из условий (1) можно ослабить, потребовав лишь а) выполнения родовых условий (сравнение $f(x, y, z) \equiv m \pmod{8r}$) разрешимо в целых x, y, z с о. н. д. $(x, y, z, 2) = 1$ и б) выполнения сравнения $f(x_0, y_0, z_0) \equiv m \pmod{g}$, ибо тогда можно найти такие

$$(x'_0, y'_0, z'_0) \equiv (x_0, y_0, z_0) \pmod{g},$$

для которых уже выполняются первоначальные условия (1).

2. Частные случаи основной теоремы. Теорему 1 мы докажем в следующем параграфе. Здесь же формулируем ее важнейшие частные случаи.

ТЕОРЕМА 1а. Пусть $g > 1$ — целое нечетное число, а \mathfrak{E} — квадратуемая коническая область с вершиной в $(0, 0, 0)$ и телесным углом $\lambda > 0$. Рассмотрим целое число m , взаимно простое с g , и целые числа x_0, y_0, z_0 , удовлетворяющие следующим условиям:

$$m \equiv x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \pmod{8g}, \quad \text{о. н. д. } (x_0, y_0, z_0, 2) = 1, \quad (4)$$

$$\left(-\frac{m}{p}\right) = 1 \text{ для всех простых } p \nmid g.$$

Обозначим через $t(\mathfrak{E}, g; m)$ количество целых примитивных точек, лежащих в сферической области, вырезаемой на шаре $x^2 + y^2 + z^2 = m$ конусом \mathfrak{E} , и сравнимых с (x_0, y_0, z_0) по модулю g . Тогда при $m \rightarrow \infty$

$$t(\mathfrak{E}, g; m) \sim \frac{\lambda}{4\pi} \frac{t(m)}{g^2 \prod_{p \nmid g} \left(1 + \frac{1}{p}\right)}. \quad (5)$$

Следствие 1*. Если найдется такое простое число q , что $\left(-\frac{m}{q}\right) = 1$, то количество $t(\mathfrak{E}; m)$ всех целых примитивных точек, ле-

* набросок доказательства этого утверждения дан Ю. В. Линником в работе (19).

жащих в указанной сферической области, при $m \rightarrow \infty$ удовлетворяет асимптотическому равенству

$$t(\mathfrak{E}; m) \sim \frac{\lambda}{4\pi} t(m), \quad (6)$$

где знак эквивалентности зависит от q .

Следствие 2. Если выполнены условия (4), то количество $t(g, m)$ всех целых примитивных точек сферы $x^2 + y^2 + z^2 = m$, сравнимых с (x_0, y_0, z_0) по модулю g , при $m \rightarrow \infty$ удовлетворяет асимптотическому равенству

$$t(g; m) \sim \frac{t(m)}{g^2 \prod_{p \nmid g} \left(1 + \frac{1}{p}\right)}. \quad (7)$$

ТЕОРЕМА 16. Пусть квадратичная форма $f(x, y, z)$ принадлежит роду $\mathfrak{G}_{[r, 1]}$, где $r > 1$ — нечетное число; \mathfrak{E} — quadriруемая коническая область с вершиной в $(0, 0, 0)$ и f -эллиптическим телесным углом $\lambda > 0$. Рассмотрим целое число m , взаимно простое с r и удовлетворяющее родовым условиям формы f : сравнение $m \equiv f(x, y, z) \pmod{8r}$ разрешимо в целых x, y, z с нечетным общим наибольшим делителем. Обозначим через $t(f, \mathfrak{E}, g; m)$ количество целых примитивных точек в эллиптической области, вырезаемой на эллипсоиде $f(x, y, z) = m$ конусом \mathfrak{E} . Тогда при $m \rightarrow \infty$

$$t(f, \mathfrak{E}; m) \sim \frac{\lambda}{4\pi} \frac{t(m)}{r} \prod_{p \nmid r} \left(1 + \frac{1}{p}\right). \quad (8)$$

ТЕОРЕМА 1в. Пусть квадратичная форма $f(x, y, z)$ принадлежит роду $\mathfrak{G}_{[r, 1]}$, где $r > 1$ — нечетное число. Рассмотрим целое число m , взаимно простое с rg , и целые числа x_0, y_0, z_0 , удовлетворяющие условиям (4). Обозначим через $t(f, g; m)$ количество целых примитивных решений (x, y, z) уравнения $f(x, y, z) = m$, сравнимых с (x_0, y_0, z_0) по модулю g . Тогда при $m \rightarrow \infty$

$$t(f, g; m) \sim \frac{2^k}{rg^2 \prod_{p \nmid rg} \left(1 + \frac{1}{p}\right)} t(m). \quad (9)$$

Следствие *. Пусть квадратичная форма f принадлежит роду $\mathfrak{G}_{[r, 1]}$, где r — нечетное число. Рассмотрим целое число m , взаимно простое с r и удовлетворяющее родовым условиям формы f . Тогда количество $t(f, m)$ примитивных представлений числа m формой f при $m \rightarrow \infty$ удовлетворяет асимптотическому равенству:

$$t(f; m) \sim \begin{cases} \frac{12}{r} \prod_{p \nmid r} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \cdot h(-m), & \text{если } m \equiv 1 \text{ или } 2 \pmod{4}, \\ \frac{8}{r} \prod_{p \nmid r} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \cdot h(-m), & \text{если } m \equiv 3 \pmod{8}. \end{cases} \quad (10)$$

* набросок доказательства этого утверждения дан в работе (17).

§ 2. Доказательство основной теоремы

1. Доказательство теоремы 1а. Прежде всего докажем частный случай теоремы 1 — теорему 1а (гл. II, § 1).

1°. Обозначим $x_0i + y_0j + z_0k = L_0$ и подберем целое число l так, чтобы

$$l^2 + m \equiv 0 \pmod{g^2}. \quad (11)$$

В силу второго из условий (4), это можно сделать. Тогда первое условие (4) дает:

$$N(l + L_0) = l^2 + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \equiv l^2 + m \equiv 0 \pmod{g},$$

а потому (см. замечание 12, следствие 2) найдутся такие целые примитивные примарные кватернионы G_1 и G_2 нормы g , что кватернион $l + L_0$ делится справа на G_1 , а слева — на G_2 : $l + L_0 = K_1 G_1 = G_2 K_2$.

2°. Докажем, что кватернион $G_1 G_2$ примитивен. В противном случае (см. замечание 8) найдется такой целый примитивный кватернион T нормы $t \nmid g$, что

$$G_1 = G'_1 T, \quad G_2 = \bar{T} G'_2, \quad l + L_0 = (K_1 G'_1) T = \bar{T} (G'_2 K_2),$$

и, по замечанию 8 (следствие 3), $2l \equiv 0 \pmod{t}$, что невозможно, ибо, в силу нечетности g , его простоты с m и условий (4), $2l$ взаимно просто с g . Итак, $G_1 G_2$ — примитивный кватернион.

3°. Согласно следствию из основной леммы (гл. I, § 6), для количества $t(G_1, G_2, \mathbb{E}, l; m)$ целых примитивных векторов L нормы m , которые лежат в конусе \mathbb{E} и для которых кватернион $l + L$ делится справа на G_1 , а слева — на G_2 , имеет место асимптотическое равенство:

$$t(G_1, G_2, \mathbb{E}, l; m) \sim \frac{\lambda}{4\pi} \frac{t(m)}{g^2 \prod_{p \nmid g} \left(1 + \frac{1}{p}\right)}. \quad (12)$$

Но для каждого такого L вектор $L - L_0 = (l + L) - (l + L_0)$ делится справа на G_1 , а слева — на G_2 . Поэтому, по замечанию 7 (введение), $L \equiv L_0 \pmod{g}$. Обратно, если $L \equiv L_0 \pmod{g}$, то $l + L$ делится справа на G_1 , а слева — на G_2 . Поэтому количество векторов $L \equiv L_0 \pmod{g}$, лежащих в \mathbb{E} , оценивается формулой (12).

Теорема 1а доказана.

2. Два вспомогательных предложения. Теорему 1 мы сведем к теореме 1а с помощью двух замечаний. Первое из них известно:

Замечание 19. Пусть $f(x, y, z)$ — форма рода $\mathbb{G}_{[r, 1]}$, где r — нечетное число. Тогда найдутся такие целые числа $c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{21}, c_{22}, c_{23}, c_{31}, c_{32}, c_{33}$, что имеет место равенство:

$$f(x, y, z) = \sum_{i=1}^3 (c_{i1}x + c_{i2}y + c_{i3}z)^2, \quad \det(c_{ij}) = r. \quad (13)$$

Доказательство *. Пусть $\mathfrak{A} = (a_{ij})$ — симметрическая матрица формы

$$f(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz.$$

* Доказательство, приводимое ниже, принадлежит Б. А. Венкову.

Так как $[r, 1]$ — инварианты формы f , то найдутся такие целочисленные унимодулярные матрицы u_1 и u_2 , что

$$u_1 u_2 = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть u'_1 — матрица, транспонированная с u_1 ; $u_3 = u_2^{-1} u'_1$. Тогда

$$u_1 u u'_1 = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} u_3,$$

и форма f эквивалентна форме f_1 с матрицей

$$u_1 = u_1 u u'_1 = \begin{pmatrix} r a'_{11} & r a'_{12} & r a'_{13} \\ r a'_{21} & r a'_{22} & r a'_{23} \\ r a'_{31} & r a'_{23} & a'_{33} \end{pmatrix},$$

где a'_{ij} — целые числа $a'_{ij} = a'_{ji}$. Так как $\det u_1 = r^2$, то

$$a'_{33} (a'_{11} a'_{22} - a'^2_{12}) \equiv 1 \pmod{r}. \quad (14)$$

Учитывая родовое условие формы f , из (14) выводим:

$$\left(\frac{-(a'_{11} a'_{22} - a'^2_{12})}{p} \right) = \left(\frac{-a'_{33}}{p} \right) = \left(\frac{-f_2(0, 0, 1)}{p} \right) = \left(\frac{-f}{p} \right) = 1$$

для всех простых $p \nmid r$. Поэтому найдутся целые взаимно простые числа v_{11} и v_{21} , удовлетворяющие сравнению:

$$a'_{11} v^2_{11} + 2a'_{12} v_{11} v_{21} + a'_{22} v^2_{21} \equiv 0 \pmod{r}.$$

Подберем к ним целые числа v_{12} и v_{22} так, чтобы целочисленная подстановка

$$u_4 = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & 0 \\ v_{21} & v_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

была унимодулярной. Применяя ее к форме f , мы получим форму f_2 , эквивалентную форме f . Легко видеть, что $f_2(x, y, z) = \varphi(rx, y, z)$, где φ — целочисленная форма, $\det \varphi = 1$, $\varphi \sim x^2 + y^2 + z^2$. Поэтому f_2 , а с нею и f , суть суммы трех линейных целочисленных квадратов.

Замечание доказано.

Замечание 20. Пусть $f(x, y, z) = \sum_{i=1}^3 (c_{i1}x + c_{i2}y + c_{i3}z)^2$, где c_{ii} суть целые числа, — форма рода $\mathfrak{G}_{[r, 1]}$, где r — нечетное число, g — нечетное число, а x_0, y_0, z_0 — целые числа с условиями

$$f(x_0, y_0, z_0) \equiv m \pmod{8rg}, \quad \text{о. н. д. } (x_0, y_0, z_0, 2) = 1. \quad (15)$$

Обозначим через $s(r, g)$ количество таких решений сравнения

$$f(x, y, z) \equiv m \pmod{rg}, \quad (16)$$

которые удовлетворяют условию

$$(x, y, z) \equiv (x_0, y_0, z_0) \pmod{g} \quad (17)$$

и для которых системы чисел $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x} &= c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z, \\ \tilde{y} &= c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z, \\ \tilde{z} &= c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

различны по модулю rg . Тогда

$$s(r, g) = 2^k r, \quad (19)$$

где k — количество различных простых делителей r , не входящих в g .

Доказательство. 1) Так как при замене f эквивалентной ей формой величина $s(r, g)$ не меняется, то мы можем предполагать [см., например, (1)], что

$$f(x, y, z) \equiv a_1 x^2 + a_2 r y^2 + a_3 r z^2 \pmod{r^4}, \quad (20)$$

где a_1, a_2, a_3 — целые числа, взаимно простые с r . Пусть $(c_{ij}) = C$, $\bar{C} = (\bar{c}_{ij})$ — матрица, взаимная с C , $\det C = r$, $\det \bar{C} = r^2$, $\bar{C} = rC = (rc_{ij})$. Докажем, что при условии (20)

$$\text{о. н. д. } (\bar{c}_{11}, \bar{c}_{21}, \bar{c}_{31}) = r. \quad (21)$$

Действительно,

$$C'C \equiv \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 r & 0 \\ 0 & 0 & a_3 r \end{pmatrix} \pmod{r^4}, \quad \bar{C}'\bar{C} \equiv \begin{pmatrix} a_2 a_3 r^2 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 a_3 r & 0 \\ 0 & 0 & a_1 a_2 r \end{pmatrix} \pmod{r^4},$$

откуда следует:

$$\left. \begin{aligned} \bar{c}_{11}\bar{c}_{12} + \bar{c}_{21}\bar{c}_{21} + \bar{c}_{31}\bar{c}_{31} &\equiv a_2 a_3 r^2, \\ \bar{c}_{11}\bar{c}_{12} + \bar{c}_{21}\bar{c}_{22} + \bar{c}_{31}\bar{c}_{32} &\equiv 0, \\ \bar{c}_{11}\bar{c}_{13} + \bar{c}_{21}\bar{c}_{23} + \bar{c}_{31}\bar{c}_{33} &\equiv 0. \end{aligned} \right\} \pmod{r^4}.$$

Решая эту систему относительно $\bar{c}_{11}, \bar{c}_{21}, \bar{c}_{31}$, будем иметь:

$$\bar{c}_{11} \equiv \frac{1}{r^2} a_2 a_3 r^2 \bar{c}_{11} \equiv a_2 a_3 r c_{11} \pmod{r^2}, \quad \bar{c}_{21} \equiv \bar{c}_{31} \equiv 0 \pmod{r^2}.$$

Поэтому $r \nmid \text{о. н. д. } (\bar{c}_{11}, \bar{c}_{21}, \bar{c}_{31})$ и формула (21) следует из того, что $\det(c_{ij}) = r$.

2) Как обычно, убеждаемся в том, что

$$s(r, g) = \prod_{p \nmid rg} s(p^{\tilde{n}_r}, p^{n_g}), \quad (22)$$

где $p^{\tilde{n}_r}$ и p^{n_g} — степени простого числа p , входящие соответственно в r и g .

3) Рассмотрим $s(p^{nr}, p^{ng})$. Это есть количество различных $(t_1, t_2, t_3) \pmod{p^{nr}}$, для которых числа

$$x = x_0 + p^{ng}t_1, \quad y = y_0 + p^{ng}t_2, \quad z = z_0 + p^{ng}t_3$$

удовлетворяют сравнению

$$f(x, y, z) \equiv m \pmod{p^{nr+ng}} \quad (23)$$

и для которых системы (x, y, z) различны $\pmod{p^{nr+ng}}$. Условие (23) дает:

$$\begin{aligned} a_1(x_0 + p^{ng}t_1)^2 + a_2r(y_0 + p^{ng}t_2)^2 + a_3r(z_0 + p^{ng}t_3)^2 &\equiv m \pmod{p^{nr+ng}}, \\ (a_1x_0^2 + a_2ry_0^2 + a_3rz_0^2 - m) + (2a_1x_0p^{ng}t_1 + a_1p^{2ng}t_1^2) + \\ + rp^{ng}(2a_2y_0t_2 + 2a_3z_0t_3 + a_2p^{ng}t_2^2 + a_3p^{ng}t_3^2) &\equiv 0 \pmod{p^{nr+ng}}, \\ 2a_1x_0p^{ng}t_1 + a_1p^{2ng}t_1^2 &\equiv 0 \pmod{p^{nr+ng}}, \\ 2x_0t_1 + p^{ng}t_1^2 &\equiv 0 \pmod{p^{nr}}. \end{aligned} \quad (24)$$

Рассмотрим два случая:

а) $n_g > 0$. Тогда $t_1 \equiv 0 \pmod{p^{nr}}$, t_2 и t_3 произвольны $\pmod{p^{nr}}$. Системы чисел $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= (c_{11}x_0 + c_{12}y_0 + c_{13}z_0) + c_{12}p^{ng}t_2 + c_{13}p^{ng}t_3, \\ \tilde{y} &= (c_{21}x_0 + c_{22}y_0 + c_{23}z_0) + c_{22}p^{ng}t_2 + c_{23}p^{ng}t_3, \\ \tilde{z} &= (c_{31}x_0 + c_{32}y_0 + c_{33}z_0) + c_{32}p^{ng}t_2 + c_{33}p^{ng}t_3 \end{aligned}$$

будут различны $\pmod{p^{nr+ng}}$ тогда и только тогда, когда системы

$$\left. \begin{aligned} c_{12}t_2 + c_{13}t_3, \\ c_{22}t_2 + c_{23}t_3, \\ c_{32}t_2 + c_{33}t_3 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

различны $\pmod{p^{nr}}$. Но, в силу (21), количество различных систем (25) равно [см., например, (29)]

$$\frac{p^{2nr}}{\text{о. н. д. } (p^{2nr}, p^{nr} \text{ о. н. д. } (c_{12}, \dots, c_{33}), \text{ о. н. д. } (\bar{c}_{11}, \bar{c}_{21}, \bar{c}_{31}))} = p^{nr}.$$

Поэтому

$$s(p^{nr}, p^{ng}) = p^{nr} \quad (n_g > 0). \quad (26)$$

б) $n_g = 0$. Тогда сравнение (24) имеет два решения:

$$t_1 \equiv 0 \pmod{p^{nr}} \quad \text{и} \quad t_1 \equiv -2x_0 \pmod{p^{nr}},$$

т. е.

$$x \equiv x_0 \pmod{p^{nr}} \quad \text{или} \quad x \equiv -x_0 \pmod{p^{nr}};$$

t_2 и t_3 произвольны $\pmod{p^{nr}}$, $s(p^{nr}, 1)$ есть удвоенное количество различных $\pmod{p^{nr}}$ систем чисел (25), ибо если

$$\left. \begin{aligned} c_{11}x_0 + c_{12}y_0 + c_{13}z_0 + (c_{12}'t_2' + c_{13}'t_3')p^{ng} &\equiv \\ &\equiv -c_{11}x_0 + c_{12}y_0 + c_{13}z_0 + (c_{12}''t_2'' + c_{13}''t_3'')p^{ng}, \\ c_{21}x_0 + c_{22}y_0 + c_{23}z_0 + (c_{22}'t_2' + c_{23}'t_3')p^{ng} &\equiv \\ &\equiv -c_{21}x_0 + c_{22}y_0 + c_{23}z_0 + (c_{22}''t_2'' + c_{23}''t_3'')p^{ng}, \\ c_{31}x_0 + c_{32}y_0 + c_{33}z_0 + (c_{32}'t_2' + c_{33}'t_3')p^{ng} &\equiv \\ &\equiv -c_{31}x_0 + c_{32}y_0 + c_{33}z_0 + (c_{32}''t_2'' + c_{33}''t_3'')p^{ng} \end{aligned} \right\} \pmod{p^{n_r+n_g}},$$

то

$$\left. \begin{aligned} c_{11} &\equiv c_{12}'''t_2''' + c_{13}'''t_3''' \\ c_{21} &\equiv c_{22}'''t_2''' + c_{23}'''t_3''' \\ c_{31} &\equiv c_{32}'''t_2''' + c_{33}'''t_3''' \end{aligned} \right\} \pmod{p^{n_r}},$$

и, учитывая (21), получаем $rp^{n_r} \nmid \det C$, что невозможно. Поэтому

$$s(p^{n_r}, 1) = 2p^{n_r}. \quad (27)$$

4) В силу (22), (26) и (27), мы и получаем формулу (19).

Замечание доказано.

3. Доказательство общего случая теоремы 1. Возвращаемся к доказательству основной теоремы.

4°. Так как $f \in \mathfrak{G}_{[r,1]}$, то (замечание 19) найдутся такие целые числа c_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), $\det(c_{ij}) = r$, что

$$f(x, y, z) = \sum_{i=1}^3 (c_{i1}x + c_{i2}y + c_{i3}z)^2. \quad (28)$$

Линейное преобразование

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x} &= c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z, & x &= \frac{1}{r}(\bar{c}_{11}\tilde{x} + \bar{c}_{21}\tilde{y} + \bar{c}_{31}\tilde{z}), \\ \tilde{y} &= c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z, & y &= \frac{1}{r}(\bar{c}_{12}\tilde{x} + \bar{c}_{22}\tilde{y} + \bar{c}_{32}\tilde{z}), \\ \tilde{z} &= c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z, & z &= \frac{1}{r}(\bar{c}_{13}\tilde{x} + \bar{c}_{23}\tilde{y} + \bar{c}_{33}\tilde{z}) \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками (x, y, z) эллипсоида $f(x, y, z) = m$ и точками $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ сферы $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 = m$. При этом конической области \mathfrak{E} пространства $\{x, y, z\}$ с f -эллиптическим телесным углом λ будет соответствовать коническая же область $\tilde{\mathfrak{E}}$ пространства $\{\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}\}$ с обычным телесным углом λ .

5°. Каждой целой примитивной точке (x, y, z) эллипсоида $f(x, y, z) = m$, лежащей в области \mathfrak{E} и сравнимой с (x_0, y_0, z_0) по модулю g , мы сопоставим точку $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$, определяемую преобразованием (29). $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ есть целая точка сферы $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 = m$, лежащая в конической области \mathfrak{E} ; так как о. н. д. $(m, r) = 1$ и $\det(c_{ij}) = r$, то точка $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ примитивна. Разобьем преобразованные точки $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ на $s(r, g)$ классов $(\bmod rg)$:

$$(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \equiv (\tilde{x}_0^{(i)}, \tilde{y}_0^{(i)}, \tilde{z}_0^{(i)}) \pmod{rg} \quad (i = 1, 2, \dots, s(r, g)), \quad (30)$$

где $(\tilde{x}_0^{(i)}, \tilde{y}_0^{(i)}, \tilde{z}_0^{(i)})$ таковы, что $(x_0^{(i)}, y_0^{(i)}, z_0^{(i)})$, определяемые преобразованием (29), суть целые точки, сравнимые с (x_0, y_0, z_0) по модулю g .

Обратно, рассмотрим целые примитивные точки $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ сферы $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 = m$, лежащие в области \mathfrak{E} и сравнимые с $(\tilde{x}_0^{(i)}, \tilde{y}_0^{(i)}, \tilde{z}_0^{(i)})$ по модулю rg . Тогда точки (x, y, z) , соответствующие $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ в преобразовании (29), будут целыми, сравнимыми с (x_0, y_0, z_0) по модулю g и лежащими в области \mathfrak{E} .

Легко убедиться, что условия теоремы 1а выполнены. Поэтому, учитывая замечание 20, получаем:

$$t(f, \mathfrak{E}, g; m) = s(r, g) t(\mathfrak{E}, rg; m) = \frac{\lambda}{4\pi} \frac{2^k}{r g^2 \prod_{p \nmid rg} \left(1 + \frac{1}{p}\right)} t(m).$$

Теорема доказана.

§ 3. Перенесение основной теоремы на все целые точки

1. Формулировка. В теореме 1 рассматривались целые примитивные точки эллипсоида $f(x, y, z) = m$. Нетрудно перенести полученные там оценки на все целые точки этого эллипсоида.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f(x, y, z)$ — квадратичная форма рода $\mathfrak{G}_{[r, 1]}$, где r — нечетное число. Пусть g — целое нечетное число с условием $rg \neq 1$. Наконец, пусть \mathfrak{E} — квадратируемая коническая область с вершиной в начале координат и f -эллиптическим телесным углом $\lambda > 0$. Рассмотрим целое число m , взаимно простое с rg , и целые числа x_0, y_0, z_0 , удовлетворяющие следующим условиям:

$$\left. \begin{aligned} f(x_0, y_0, z_0) &\equiv m \pmod{rg}, & m &= 4^a m_1, \\ m_1 &\equiv 1 \text{ или } 2 \pmod{4} \text{ или } m_1 \equiv 3 \pmod{8}, \\ \left(\frac{-m}{p}\right) &= 1 \text{ для всех простых } p \nmid g. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Обозначим через $T(f, \mathfrak{E}, g; m)$ количество всех целых (в том числе и непримитивных) точек (x, y, z) эллипсоида $f(x, y, z) \equiv m$, лежащих в конусе \mathfrak{E} и сравнимых с (x_0, y_0, z_0) по модулю g . Тогда при $m \rightarrow \infty$ и фиксированных f, \mathfrak{E}, g

$$T(f, \mathfrak{E}, g; m) \sim \frac{\lambda}{4\pi} \frac{2}{r g^2 \prod_{p \nmid rg} \left(1 + \frac{1}{p}\right)} T(m), \quad (32)$$

где $T(m)$ — количество всех представлений числа m суммой трех квадратов, а k — количество простых делителей r , не входящих в g .

Заметим, что $T(m)$ можно выразить через количество $H(-m)$ всех классов целочисленных положительных бинарных квадратичных форм определителя m [см. (25)]. На этом мы не останавливаемся.

2. Доказательство. Имеем:

$$T(f, \mathfrak{E}, g, x_0, y_0, z_0; m) = \sum_{\delta^2 \mid m_1} t(f, \mathfrak{E}, g, x'_0, y'_0, z'_0; \frac{m}{\delta^2}),$$

где целые числа x'_0, y'_0, z'_0 подобраны так, что

$$(2^a \delta x'_0, 2^a \delta y'_0, 2^a \delta z'_0) \equiv (x_0, y_0, z_0) \pmod{g}, \text{ о. н. д. } (x'_0, y'_0, z'_0, 2) = 1.$$

Мы можем применить теорему 1 (следует учесть замечание в конце п. 1 § 1 этой главы). Тогда

$$\begin{aligned} T(f, \mathfrak{E}, g; m) &\sim \sum_{\delta \setminus m_1} \frac{\lambda}{4\pi} \frac{2^k}{r g^2 \prod_{p \setminus r g} \left(1 + \frac{1}{p}\right)} t\left(\frac{m}{\delta^2}\right) + O(1) = \\ &= \frac{\lambda}{4\pi} \frac{2^k}{r g^2 \prod_{p \setminus r g} \left(1 + \frac{1}{p}\right)} T(m) + O(1). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ГЛАВА III. ОБОБЩЕНИЕ ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В этой главе мы обобщим лемму 1 гл. I, что позволит нам несколько уточнить и расширить формулировки теорем главы II.

§ 1. Обобщение основной леммы

1. Формулировка. Лемма 1 гл. I может быть обобщена следующим образом:

ЛЕММА 2. Пусть дан целый примитивный кватернион R нечетной нормы $r > 1$ и целое число m , взаимно простое с r . Пусть l — целое число, удовлетворяющее сравнению

$$l^2 + m \equiv 0 \pmod{r}. \quad (1)$$

Пусть g — нечетное число, взаимно простое с rm , а L_0 — вектор с условием $N(L_0) \equiv m \pmod{g}$. Пусть, наконец, \mathfrak{E} — трехмерная квадрируемая коническая область с вершиной в начале координат и телесным углом $\lambda > 0$. Обозначим через $t(R, \mathfrak{E}, l, L_0, g; m)$ количество целых примитивных векторов L нормы m , сравнимых с L_0 по модулю g , которые лежат в области \mathfrak{E} и для которых кватернион $l + L$ делится справа на R . Тогда при $m \rightarrow \infty$ и фиксированных \mathfrak{E}, r и g

$$t(R, \mathfrak{E}, l, L_0, g; m) \sim \frac{\lambda}{4\pi} \frac{1}{g^2 \prod_{p \setminus g} \left(1 + \frac{\left(\frac{-m}{p}\right)}{p}\right)} \frac{1}{r \prod_{p \setminus r} \left(1 + \frac{1}{p}\right)} t(m). \quad (2)$$

В случае, когда $g = 1$, лемма 2 сводится к лемме 1.

2. набросок доказательства леммы 2. Доказательство леммы 2 аналогично доказательству леммы 1 (гл. I, § 2—5). Поэтому мы наметим лишь его основные пункты.

1°. Как и в § 2 гл. I, разобьем пространство на конические области $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \dots, \mathfrak{E}_n$ и рассмотрим разбиение целых векторов L нормы $m \pmod{g}$ на классы вычетов \pmod{g} :

$$\{L^{(1)}\}, \{L^{(2)}\}, \dots, \{L^{(\rho(g, m))}\}, \quad (3)$$

где

$$\rho(g, m) = g^2 \prod_{p \nmid g} \left(1 + \frac{\left(\frac{-m}{p}\right)}{p}\right)$$

— количество классов таких вычетов.

Пусть s — целое число, определяемое неравенствами:

$$(16r) \sqrt{m} \leq r^s \leq (16r^2) \sqrt{m}. \quad (4)$$

Подберем целое число l_1 так, чтобы

$$l_1^2 + m \equiv 0 \pmod{r^s}, \quad l_1 \equiv l \pmod{r}, \quad \text{о. н. д.} \left(\frac{l_1^2 + m}{r^s}, r \right) = 1, \quad |l_1| < r^{s+1}. \quad (5)$$

В силу условия (1), это возможно.

Пусть

$$L_1^{(k, h)}, L_2^{(k, h)}, \dots, L_{t_{k, h}}^{(k, h)} \quad (6)$$

суть все целые примитивные векторы нормы m , лежащие в области \mathfrak{E}_k ($k = 1, 2, \dots, n$) и сравнимые с $L^{(h)}$ по модулю g ($h = 1, 2, \dots, \rho(g, m)$). Ясно, что

$$\sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^{\rho(g, m)} t_{k, h} = t(m).$$

Для некоторых (k, h) возможно, что $t_{k, h} = 0$. В силу (5), мы можем написать:

$$l_1 + L_i^{(k, h)} = V_i^{(k, h)} B_i^{(k, h)} \quad (7)$$

$$(i = 1, \dots, t_{k, h}; \quad k = 1, \dots, n; \quad h = 1, \dots, \rho(g, m)),$$

где $V_i^{(k, h)}$ — целый кватернион, простой по норме с $B_i^{(k, h)}$,

$$B_i^{(k, h)} = R_{is}^{(k, h)} R_{is-1}^{(k, h)} \dots R_{i2}^{(k, h)} P^{(k, h)}, \quad (8)$$

где $R_{ij}^{(k, h)}$ — примитивные примарные кватернионы нормы r .

2°. Как и в гл. I, каждой трехмерной области \mathfrak{E}_k ($k = 1, 2, \dots, n$) нашего разбиения сопоставим четырехмерную область кватернионов Ω_k следующим образом: пусть M_k — фиксированный вектор, лежащий внутри \mathfrak{E}_k ; область Ω_k назовем совокупность кватернионов X , для которых $XM_kX^{-1} \in \mathfrak{E}$. Ω_k есть коническая область с телесным углом $\omega_k = \frac{\pi}{2} \lambda$.

Каждому классу вычетов $\{L^{(h)}\}$ по модулю g сопоставим совокупность Γ_h целых примитивных $(\text{mod } g)$ кватернионов C , для которых

$$CL^{(h)} \equiv L_0 C \pmod{g}. \quad (9)$$

Совокупность Γ_h состоит из $g \prod_{p \nmid g} \left(1 + \frac{\left(\frac{-m}{p}\right)}{p}\right)$ классов вычетов $C \pmod{g}$.

3°. Главная трудность доказательства леммы 2 заключается в доказательстве следующего утверждения (А): Пусть $\nu_{k,h,s'}$ — количество индексов i ($i = 1, 2, \dots, t_{k,h}$) в равенствах (7), для которых $R_{i,s'+1}^{(k,h)} = R$, а кватернион $B_{i,s'}^{(k,h)} = R_{i,s'}^{(k,h)} \dots R_{i1}^{(k,h)}$ принадлежит одновременно Ω_k и Γ_h . Тогда найдется такое s_0 ($1 \leq s_0 \leq s$), что для каждой пары (k, h) или $t_{k,h} < \frac{t(m)}{\ln m}$, или при $m \rightarrow \infty$ и фиксированных $R, \Omega_1, \dots, \Omega_n$ и g

$$\nu_{k,h,s_0} \sim \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\rho(g,m)} \frac{1}{\sigma(r)} t_{k,h} \quad \left(t_{k,h} \geq \frac{t(m)}{\ln m} \right). \quad (10)$$

4°. Нам потребуется следующее обобщение замечания 16, доказываемое аналогично [см. (26)].

Замечание 21. Пусть Ω — четырехмерная квадратуемая коническая область с вершиной в начале координат и телесным углом $\omega > 0$; u и g — взаимно простые нечетные числа. Пусть A и B — примитивные кватернионы с условием $N(A)N(B) \setminus u$. Обозначим через $\sigma(\Omega, A, B, g; u)$ количество примитивных примарных кватернионов нормы u , лежащих в области Ω , сравнимых с определенным вычетом $(\text{mod } g)$ и делящихся на A слева и на B — справа. Тогда при $u \rightarrow \infty$ и фиксированных Ω, g, A, B

$$\sigma(\Omega, A, B, g; u) \sim \frac{u}{N(A)N(B)} \frac{\omega}{2\pi^2} \frac{1}{g^3 \prod_{p \nmid g} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)} \cdot \prod_{p \times N(A)N(B)} \left(1 + \frac{1}{p}\right). \quad (11)$$

Поэтому по $\varepsilon_2 > 0$ можно найти такое j_0 , зависящее только от $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \dots, \mathfrak{S}_n, g$, что для $j \geq j_0$ количество примитивных примарных кватернионов $R_j R_{j-1} \dots R_1$, где R_1, R_2, \dots, R_j — примарные кватернионы нормы r , с условиями $R_j = R, R_{j-1} \dots R_1 \in \Omega_{k_0} \cap \Gamma_{h_0}$ равно:

$$\frac{\lambda}{4\pi} \frac{1}{\sigma(r)} \frac{1}{g^2 \prod_{p \nmid g} \left(1 + \frac{\left(-\frac{m}{p}\right)}{p}\right)} r^j \prod_{p \nmid r} \left(1 + \frac{1}{p}\right) (1 + \varepsilon_2 \theta), \quad |\theta| \leq 1; \quad (12)$$

количество таких кватернионов с дополнительным условием, что $R_j \dots R_1 R_0$ примитивен, где R_0 — фиксированный примитивный кватернион нормы r , равно:

$$\frac{\lambda}{4\pi} \frac{1}{\sigma(r)} \frac{1}{g^2 \prod_{p \nmid g} \left(1 + \frac{\left(-\frac{m}{p}\right)}{p}\right)} r^j (1 + \varepsilon_2 \theta), \quad |\theta| \leq 1. \quad (13)$$

5°. Предположим, что утверждение (А) п. 3 не верно. Тогда хотя бы для одной пары (k_0, h_0) с условием $t_{k_0, h_0} \geq \frac{t(m)}{\ln m}$ найдется такое $\eta > 0$, не зависящее от m , что для некоторых $s_1 = \left[\frac{s}{2n(j_0+1)} \right]$ фиксированных вторых индексов $j_1 < j_2 < \dots < j_{s_1}$, таких, что

$$j_1 \geq j_0, \quad j_2 - j_1 \geq j_0, \dots, j_{s_1} - j_{s_1-1} \geq j_0, \quad s - j_{s_1} \geq j_0,$$

имеют место неравенства:

$$\nu_{k_0, h_0, j_w} < (1 - \eta) \frac{\lambda}{4\pi} \frac{1}{\sigma(r)} \frac{1}{\rho(g, m)} t_{k_0, h_0} \quad (w = 1, 2, \dots, s_1), \quad (14a)$$

или же имеют место неравенства:

$$v_{k_0, h_0, j_w} > (1 + \eta) \frac{\lambda}{4\pi} \frac{1}{\sigma(r)} \frac{1}{\rho(g, m)} t_{k_0, h_0} \quad (w = 1, 2, \dots, s_1), \quad (146)$$

когда m пробегает некоторую возрастающую до бесконечности последовательность.

Пусть, например, выполнено условие (14а) (случай неравенств (146) рассматривается аналогично). Тогда, как и раньше (гл. I, § 2, п. 5), среди равенств

$$l_1 + L_i^{(k_0, h_0)} = V_i^{(k_0, h_0)} B_i^{(k_0, h_0)} \quad (i = 1, 2, \dots, t_{k_0, h_0})$$

найдется

$$t' \geq \frac{\eta}{1 - \frac{\eta}{2}} t_{k_0, h_0} \quad (15)$$

равенств

$$l_1 + L_i = V_i B_i, \quad B_i = R_{is} \dots R_{i1} \quad (i = 1, 2, \dots, t'), \quad (16)$$

которые обладают тем свойством, что для каждого i количество вторых индексов $j \in \{j_1, \dots, j_{s_i}\}$ с условиями

$$R_{i, j+1} = R, \quad B_{ij} = R_{ij} \dots R_{i1} \in \Omega_{k_0} \cap \Gamma_{h_0}$$

будет

$$< \left(1 - \frac{\eta}{2}\right) \frac{\lambda}{4\pi} \frac{1}{\rho(g, m)} \frac{1}{\sigma(r)} s_1. \quad (17)$$

6°. Пусть w_1 — количество примитивных кватернионов $R_i = R_{is} \dots R_{i1}$, где R_{ij} — примарные кватернионы нормы r , причем для каждого i количество вторых индексов $j \in \{j_1, \dots, j_{s_i}\}$ с условиями $R_{ij+1} = R, B_{ij} \in \Omega_{k_0} \cap \Gamma_{h_0}$ будет

$$< \left(1 - \frac{\eta}{2}\right) \frac{\lambda}{4\pi} \frac{1}{\rho(g, m)} \frac{1}{\sigma(r)} s_1.$$

Тогда, как и в § 3 гл. I, докажем, что для достаточно малых $\varepsilon_2 > 0$

$$w_1 < \kappa_\rho m^{\frac{1}{2} - \rho}, \quad (18)$$

где $\rho > 0$ — постоянная, зависящая лишь от $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \dots, \mathfrak{S}_n, g, r$ и η ; $\kappa_\rho > 0$ — постоянная, зависящая лишь от ρ .

7°. С другой стороны, количество w различных кватернионов B_i в равенствах (16) оценивается снизу (гл. I, § 4):

$$w > \kappa_\varepsilon m^{\frac{1}{2} - \varepsilon}, \quad (19)$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольно малое число, а $\kappa_\varepsilon > 0$ — постоянная, зависящая лишь от ε .

8°. Так как $w \leq w_1$, то для подходяще подобранного $\varepsilon > 0$ и достаточно большого m оценки (18) и (19) несовместны. Итак, утверждение (А) доказано. Отсюда уже легко получается лемма 2 (ср. рассуждения § 5, гл. I).

Лемма 2 доказана.

Так же, как и из леммы 1, мы можем вывести из леммы 2 следствие (см. гл. I, § 6), несколько обобщающее формулировку леммы.

§ 2. Обобщение основной теоремы

1. Теорема о представлении чисел суммой трех квадратов. Лемма 2 позволяет нам усилить теорему 1а (гл. II, § 1):

ТЕОРЕМА 3. Пусть g — целое нечетное число, q — нечетное простое число, входящее в g или нет, \mathfrak{E} — квадратируемая коническая область с вершиной в начале и телесным углом $\lambda > 0$. Рассмотрим целое число m , взаимно простое с gq , и целые числа x_0, y_0, z_0 , удовлетворяющие следующим условиям:

$$m \equiv x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \pmod{8g}, \text{ о. н. д. } (x_0, y_0, z_0, 2) = 1, \quad \left(\frac{-m}{q}\right) = 1. \quad (20)$$

Обозначим через $t(\mathfrak{E}, g; m)$ количество целых примитивных точек сферы $x^2 + y^2 + z^2 = m$, лежащих в конусе \mathfrak{E} и сравнимых с (x_0, y_0, z_0) по модулю g . Тогда при $m \rightarrow \infty$ и фиксированных \mathfrak{E}, g, q

$$t(\mathfrak{E}, g; m) \sim \frac{\lambda}{4\pi} \frac{1}{g^2 \prod_{p \nmid g} \left(1 + \frac{\left(\frac{-m}{q}\right)}{p}\right)} t(m). \quad (21)$$

Иными словами, теорема 1а остается справедливой, если второе условие (4) гл. II заменить на более слабое условие $\left(\frac{-m}{q}\right) = 1$. Теорема 3 непосредственно следует из леммы 2 и теоремы 1а.

2. Теорема о формах, представимых суммой трех квадратов. Из теоремы 3, как и ранее (см. гл. II, § 2, п. 3), мы можем вывести следующее обобщение основной теоремы.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $f(x, y, z)$ — положительная тернарная целочисленная квадратичная форма нечетного определителя d , представляемая в виде:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{c} \{ (c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z)^2 + (c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z)^2 + (c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z)^2 \}, \quad (22)$$

где c — некоторое целое число, простые делители которого входят в d (тогда $d = d_1^2$, где d_1 — целое число). Пусть g — нечетное число, q — нечетное простое число (входящее или не входящее в dg). Пусть \mathfrak{E} — квадратируемая коническая область с вершиной в начале координат и f -эллиптическим телесным углом $\lambda > 0$. Рассмотрим целое число m , взаимно простое с dgq , и целые числа x_0, y_0, z_0 , удовлетворяющие следующим условиям:

$$f(x_0, y_0, z_0) \equiv m \pmod{8d_1g}, \text{ о. н. д. } (x_0, y_0, z_0, 2) = 1, \quad \left(-\frac{mc}{q}\right) = 1. \quad (23)$$

Обозначим через $t(f, \mathfrak{E}, g; m)$ количество целых примитивных точек (x, y, z)

эллипсоида $f(x, y, z) = m$, лежащих в конусе \mathfrak{C} и сравнимых с (x_0, y_0, z_0) по модулю g . Тогда при $m \rightarrow \infty$ и фиксированных f, \mathfrak{C}, g, q

$$t(f, \mathfrak{C}, g; m) \sim \frac{\lambda}{4\pi} \frac{s(f, m, g, c_{ij})}{dg^2 \prod_{p \nmid dg} \left(1 + \frac{\left(-\frac{m}{p}\right)}{p}\right)} t(cm), \quad (24)$$

где $s(f, m, g, c_{ij})$ есть количество таких решений сравнения $f(x, y, z) \equiv m \pmod{d_1 g}$, которые сравнимы с (x_0, y_0, z_0) по модулю g и для которых системы чисел

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x} &= c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z, \\ \tilde{y} &= c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z, \\ \tilde{z} &= c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

различны по модулю $d_1 g$.

Так как формы f рода $\mathfrak{G}_{[r, 1]}$ представимы суммой трех квадратов (см. замечание 19),

$$f(x, y, z) = \sum_{i=1}^3 (c_{i1}x + c_{i2}y + c_{i3}z)^2,$$

то (следует учесть замечание 20) теорема 1 есть частный случай теоремы 4. Далее, так как формы F рода $\mathfrak{G}_{[1, r]}$ взаимного к роду $\mathfrak{G}_{[r, 1]}$, представимы в виде

$$F(x, y, z) = \frac{1}{r} \bar{f} = \frac{1}{r} \left\{ \sum_{i=1}^3 (c_{i1}x + c_{i2}y + c_{i3}z)^2 \right\},$$

то теорема 4 справедлива и для них, и мы получаем уточнение результатов гл. II обзора (16) (формулированная там теорема 2 принадлежит Ю. В. Линнику).

Как и раньше (гл. II, § 3), теорема 4 о примитивных точках эллипсоида может быть перенесена на все целые точки.

Поступило
25.VI.1956

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Minkowski H., Gesammelte Abhandlungen, t. I., Leipzig, 1911.
- 2 Meyer A., Zur Theorie der unbestimmten ternären quadratischen Formen, Zürich, 1871.
- 3 Meyer A., Mathematische Mitteilungen IV. Über indefinite quadratische Formen, Vierteljahrsschrift Gesellschaft, Zürich, 36, (1891), 241—250.
- 4 Тартаковский В. А., Die Gesamtheit der Zahlen, die durch eine positive quadratische Form $F(x_1, x_2, \dots, x_s)$ ($s \geq 4$) darstellbar sind, Известия АН СССР, отд. физ.-матем. наук. № 1 (1929), 111—122, № 2 (1929), 165—196.
- 5 Kloostermann H. D., On the representation of numbers in the form $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$, Acta Math., 49 (1926), 407—464.
- 6 Jones B. W., Pall G., Regular and semi-regular positive ternary quadratic forms, Acta Math., 70 (1938), 165—191.
- 7 Линник Ю. В., On certain results relating to positive ternary quadratic forms, Матем. сборн., 5(47) (1939), 453—471.

- ⁸ Линник Ю. В., Одна общая теорема о представлении чисел отдельными тернарными квадратичными формами, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 3 (1939), 87—108.
 - ⁹ Линник Ю. В., Несколько новых теорем о представлении больших чисел отдельными положительными тернарными квадратичными формами, Доклады Ак. наук СССР, 24 (1939), 211—212.
 - ¹⁰ Линник Ю. В., О представлении больших чисел положительными тернарными квадратичными формами, Доклады Ак. наук СССР, 25 (1939), 578.
 - ¹¹ Линник Ю. В., О представлении больших чисел положительными тернарными квадратичными формами, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 4 (1940), 363—402.
 - ¹² Венков Б. А., Об арифметике кватернионов, Известия Ак. наук СССР, Отд. физ.-матем. наук, XVI (1922), 205—220, 221—246; Известия Ак. наук СССР, отд. физ.-матем. наук., № 5 (1929), 489—504, № 6 (1929), 535—562, 607—622.
 - ¹³ Siegel C. L., Über die Klassenzahl quadratischer Zahlkörper, Acta Arithm., 1 (1935), 83—86.
 - ¹⁴ Малышев А. В., О представлении больших чисел положительными тернарными квадратичными формами, Доклады Ак. наук СССР, 87 (1952), 175—178.
 - ¹⁵ Малышев А. В., О представлении чисел положительными тернарными квадратичными формами, Доклады Ак. наук СССР, 89 (1953), 405—406.
 - ¹⁶ Линник Ю. В., Малышев А. В., Приложения арифметики кватернионов к теории тернарных квадратичных форм и к разложению чисел на кубы, Успехи матем. наук, VIII, № 5 (57) (1953), 3—71.
 - ¹⁷ Малышев А. В., Асимптотический закон для представления чисел некоторыми положительными тернарными квадратичными формами, Доклады Ак. наук СССР, 93 (1953), 771—774.
 - ¹⁸ Линник Ю. В., Малышев А. В., О целых точках на сфере, Доклады Ак. наук СССР, 89 (1953), 209—211.
 - ¹⁹ Линник Ю. В., Асимптотическое распределение целых точек на сфере, Доклады Ак. наук СССР, 96 (1954), 909—912.
 - ²⁰ Малышев А. В., О целых точках на эллипсоидах, Вестник ЛГУ, № 19, вып. 4 (1956), 18—34.
 - ²¹ Lipschitz R., Untersuchungen über die Summen von Quadraten, Bonn, 1886.
 - ²² Hurwitz A., Über die Zahlentheorie der Quaternionen, Götting. Nachr., math.-phys. Kl., H. 4 (1896), 313—340.
 - ²³ Линник Ю. В., Кватернионы и числа Кэли; некоторые приложения арифметики кватернионов, Успехи матем. наук, IV, № 5 (33) (1949), 49—98.
 - ²⁴ Pall G., On the arithmetic of quaternions, Trans. Amer. Math. Soc., 47 (1940), 487—500.
 - ²⁵ Венков Б. А., Элементарная теория чисел, М.-Л., 1937.
 - ²⁶ Малышев А. В., О распределении целых точек на четырехмерной сфере, Доклады Ак. наук СССР, 114 (1957), 25—28.
 - ²⁷ Siegel C. L., Über die analytische Theorie der quadratischen Formen. I, Ann. of Math., (2), 36 (1935), 527—606.
 - ²⁸ Braun Hel., Über die Zerlegung quadratischer Formen in Quadrate, J. für Math., 178 (1937), 34—64.
 - ²⁹ Bachmann P., Die Arithmetik der quadratischen Formen, I (Zahlentheorie IV), Leipzig, 1898.
-

А. Г. ПОСТНИКОВ и И. И. ПЯТЕЦКИЙ

НОРМАЛЬНЫЕ ПО БЕРНУЛЛИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЗНАКОВ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым)

В работе показано, как теория равномерного распределения дробных долей функции $\{\alpha 2^x\}$ переносится на распределения, соответствующие произвольной схеме Бернулли.

§ 1

Этот параграф имеет вспомогательное значение; в нем содержатся нужные нам сведения из теории динамических систем.

Пусть имеется метрическое пространство R и семейство преобразований T^k , $k = 1, 2, \dots, R$, на себя такое, что при любых натуральных k_1 и k_2

$$T^{k_1+k_2} p = T^{k_1} (T^{k_2} p).$$

Мы, вообще говоря, не предполагаем порождающее преобразование взаимно однозначным. Полный прообраз множества E будем обозначать через $T^{-1}E$.

Пространство вместе с таким семейством преобразований назовем динамической системой.

Пусть в R введена некоторая мера μ , причем $\mu R = 1$ (нормированная мера). Мера μ называется инвариантной, если для любого измеримого множества E $T^{-1}E$ измеримо и справедливо равенство:

$$\mu T^{-1}E = \mu E.$$

В работе ⁽¹⁾ доказывается следующая теорема, являющаяся распространением на случай не взаимно однозначных преобразований первой части эргодической теоремы Биркгофа:

Пусть μ — инвариантная мера и пусть $\varphi(p)$ — абсолютно суммируемая по мере μ функция (т. е. интеграл $\int_R |\varphi(p)| d\mu$ существует). Почти для всех $p \in R$ по мере μ существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(p) + \varphi(Tp) + \dots + \varphi(T^{n-1}p)}{n} = \psi(p),$$

причем функция $\psi(p)$ абсолютно суммируема по мере μ .

Для дальнейшего нам понадобится более развернутая теория, которую мы без труда переносим со случая взаимно однозначных преобразований.

ТЕОРЕМА. *Справедлива формула:*

$$\int_R \psi(p) d\mu = \int_R \varphi(p) d\mu.$$

Для доказательства нам потребуется следующая

ЛЕММА. *Каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такое δ , что, какое бы множество A с $\mu A < \delta$ мы ни взяли, при любом $n \geq 1$*

$$\int_A \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(T^k p) \right| d\mu < \varepsilon.$$

Доказательство. Мы имеем:

$$\int_A \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(T^k p) \right| d\mu \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_A |\varphi(T^k p)| d\mu.$$

Пусть $T^{-1}A$ — полный прообраз k -го порядка множества A .

Производя замену переменного, получаем:

$$\int_A \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(T^k p) \right| d\mu \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{T^{-k}A} |\varphi(p)| d\mu.$$

В силу инвариантности меры, $\mu T^{-k}A = \mu A$. Далее, поскольку функция $\varphi(p)$ абсолютно суммируема, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что коль скоро $\mu B < \delta$, то $\int_B |\varphi(p)| d\mu < \varepsilon$. Используя этот факт, получаем:

$$\int_A \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(T^k p) \right| d\mu \leq \frac{1}{n} n\varepsilon = \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Следствие. *По теореме Фату (для последовательности неотрицательных функций интеграл от предела меньше или равен пределу последовательности интегралов) справедливо неравенство:*

$$\int_A |\psi(p)| d\mu \leq \varepsilon.$$

Докажем теперь теорему. Мы имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(p) + \dots + \varphi(T^{n-1}p)}{n} = \psi(p).$$

Зададим $\varepsilon > 0$ и для числа ε и функции $\varphi(p)$ подберем δ по лемме. На основании теоремы Лебега, для чисел $\frac{\varepsilon}{3}$ и δ существует такое $n_0\left(\frac{\varepsilon}{3}, \delta\right)$, что при $n > n_0$

$$\mu E_p \left(\left| \psi(p) - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(T^k p) \right| \geq \frac{\varepsilon}{3} \right) < \delta.$$

Оценим при $n > n_0$ разность

$$\begin{aligned} & \left| \int_R \psi(p) d\mu - \int_R \frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(T^k p) \right) d\mu \right| \leq \int_R \left| \psi(p) - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(T^k p) \right| d\mu \leq \\ & \leq \int_{R-E_p} \left| \psi(p) - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(T^k p) \right| d\mu + \int_{E_p} |\psi(p)| d\mu + \int_{E_p} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(T^k p) \right| d\mu \leq \\ & \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

(оценка первого интеграла в этом неравенстве произведена по построению E_p , второго — по следствию из леммы, третьего — по лемме).

Таким образом,

$$\int_R \psi(p) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_R \frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(T^k p) \right) d\mu.$$

Но

$$\int_R \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(T^k p) d\mu = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_R \varphi(T^k p) d\mu.$$

Поскольку полный прообраз любого порядка R есть само R , то

$$\int_R \varphi(T^k p) d\mu = \int_R \varphi(p) d\mu.$$

Отсюда следует:

$$\int_R \psi(p) d\mu = \int_R \varphi(p) d\mu.$$

Теорема доказана.

Назовем множество E инвариантным, если $T^{-1}E \equiv E$. Мы будем говорить, что система не разложима по мере μ , если R нельзя разложить на сумму двух инвариантных множеств положительной меры без общих точек.

Справедливо следующее расширение второй части теоремы Биркгофа

ТЕОРЕМА. Если динамическая система не разложима относительно меры μ , то почти для всех (по мере μ) точек $p \in R$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(p) + \varphi(Tp) + \dots + \varphi(T^{n-1}p)}{n} = \int_R \varphi(p) d\mu.$$

Доказательство. Нам достаточно показать, что функция $\psi(p)$ почти всюду постоянна. Действительно, пусть $\psi(p) = c$; тогда, по предыдущей теореме,

$$c \int_R d\mu = \int_R \varphi(p) d\mu$$

или

$$\mu R = \int_R \varphi(p) d\mu.$$

Но $\mu R = 1$, следовательно,

$$\psi(p) \equiv \int_R \varphi(p) d\mu,$$

что и требуется доказать

Покажем теперь, что $\psi(p)$ почти всюду постоянна. Обозначим через M верхнюю грань функции $\psi(p)$, вычисленную с точностью до множества меры нуль. Нам надо установить, что $M = m$. Допустим, что $M \neq m$, т. е. пусть имеется такое α , что $m < \alpha < M$. Тогда (по определению M) $\mu E_p(\psi(p) \geq \alpha) > 0$ строго.

Мы имеем:

$$\mu(R - E_p(\psi(p) \geq \alpha)) = \mu E_p(\psi(p) < \alpha) \quad (\text{по определению}).$$

Но множества $E_p(\psi(p) \geq \alpha)$ и $E_p(\psi(p) < \alpha)$ инвариантны. Это следует из того, что суммы $(p$ принадлежат множеству, где $\psi(p)$ определено)

$$\frac{\varphi(p) + \varphi(Tp) + \dots + \varphi(T^{n-1}p)}{n}$$

и

$$\frac{\varphi(Tp) + \varphi(TTp) + \dots + \varphi(T^{n-1}Tp)}{n}$$

различаются на выражение порядка $O\left(\frac{1}{n}\right)$. Таким образом, R разложено на сумму двух инвариантных множеств положительной меры, что противоречит предположению.

Теорема доказана.

§ 2

Производится неограниченная последовательность независимых испытаний, в каждом из которых некоторое событие может наступить с вероятностью p и не наступить с вероятностью $q = 1 - p$. Мы выписываем результаты этой последовательности в строчку при помощи чисел 0 и 1: 0 пишем, когда событие не наступает, 1 пишем, когда событие наступает. Полученную последовательность называем последовательностью исходов.

Каждой последовательности знаков 0 и 1 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$ сопоставим вещественное число (мы его будем обозначать той же буквой α) из отрезка $[0, 1]$

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{2^n} + \dots \quad (1)$$

Введем на отрезке $[0, 1]$ меру μ следующим образом: разделим отрезок $[0, 1]$ на две части: $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ и $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$; первой части припишем меру q ;

второй — меру p ; далее, разделим каждую часть на две, отрезку $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ припишем меру $q \cdot q$, отрезку $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ — меру qp , отрезку $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ припишем меру pq , отрезку $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$ — меру p^2 и т. д. Иными словами, если r — натуральное, A — целое, $0 \leq A \leq 2^r - 1$, и

$$A = 2^{r-1}\varepsilon_1 + 2^{r-2}\varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_r$$

— его представление в двоичной системе счисления, то отрезку $\left[\frac{A}{2^r}, \frac{A+1}{2^r}\right]$ мы приписываем меру $p^j q^{r-j}$, где j — количество единиц среди $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r$. Эту меру можно продолжить (по непрерывности) на интервалы произвольного вида и далее построить теорию измерения и интеграла, обобщающую лебеговскую (которая получается в частном случае $p = \frac{1}{2}$).

Мы видим, что $\mu\left[\frac{A}{2^r}, \frac{A+1}{2^r}\right]$ равно вероятности осуществления при первых r испытаниях исходов, записанных в виде $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r)$. С помощью этого мероопределения вводится вероятность во множества бесконечных последовательностей исходов.

Пусть имеется какая-либо s -членная комбинация знаков 0 и 1:

$$\Delta = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_s)$$

и пусть $j = j(\Delta)$ — число единиц в ней; будем называть вероятностью этой комбинации и обозначать через $\mu\Delta$ число $p^j q^{s-j}$.

Рассмотрим некоторую последовательность знаков 0 и 1 (или число) $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ и распишем первые $P + s - 1$ знаков в такую строчку:

$$(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s) (\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{s+1}) \dots (\alpha_P \alpha_{P+1} \dots \alpha_{P+s-1}).$$

Назовем такую строчку гусеницей длиной P и ранга s последовательности знаков α и обозначим через $N_P(\alpha, \Delta)$ или просто через $N_P(\Delta)$ число, указывающее, сколько раз встретится в гусенице длиной P и ранга s фиксированная s -членная комбинация Δ .

Будем называть последовательность знаков α *нормальной* по Бернулли, если для любого $s \geq 1$ и любой s -членной комбинации Δ $\lim_{P \rightarrow \infty} \frac{N_P(\Delta)}{P}$ существует и равен $\mu\Delta$. Очевидно, что $N_P(\Delta)$ равно количеству дробных долей $\{\alpha 2^x\}$, $x = 0, 1, \dots, P-1$, попавших на интервал вида

$$\Delta = \left[\frac{A}{2^s}, \frac{A+1}{2^s}\right], \quad A = 2^{s-1}\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_s.$$

Нормальность последовательности знаков на языке теории чисел означает, что для любого интервала вида $\Delta = \left[\frac{A}{2^s}, \frac{A+1}{2^s}\right]$ количество дробных долей $\{\alpha 2^x\}$, $0 \leq x \leq P-1$, попавших на Δ , удовлетворяет асимптотическому закону:

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \frac{N_P(\Delta)}{P} = \mu\Delta,$$

а поскольку интервалами Δ можно приблизить любой интервал, это

означает, что соотношение

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \frac{N_P(\Delta)}{P} = \mu \Delta$$

верно для любого интервала. Таким образом, дробные доли $\{\alpha 2^x\}$ распределены по закону, соответствующему мере μ (и обратно).

Естественно перенести на общую схему Бернулли факты, доказанные для равномерного распределения дробных долей $\{\alpha 2^x\}$.

Этому и посвящена настоящая статья.

§ 3

ТЕОРЕМА 1. *С вероятностью, равной единице, последовательность исходов является нормальной по Бернулли последовательностью знаков.*

Другая формулировка этой теоремы: почти для всех α по мере μ $\{\alpha 2^x\}$ распределены по закону, соответствующему мере μ .

Теорема 1 является обобщением теоремы Бореля (усиленного закона больших чисел для схемы Бернулли), в которой рассматриваются лишь гусеницы ранга 1.

Следует заметить, что эта теорема, хотя, по-видимому, и нигде явно не сформулирована, по сути дела известна. Рассмотрение гусеницы в схеме Бернулли эквивалентно рассмотрению так называемой цепи Маркова — Брунса [см. (2), гл. VI], изучение которой сводится к теории цепей Маркова в обычном смысле слова. Теорема 1 является, таким образом, следствием усиленного закона больших чисел для цепей Маркова. Мы даем здесь другое доказательство теоремы 1, базирующееся на эргодической теореме Биркгофа — Хинчина. Такой способ был дан Д. А. Райковым [см. (3)] для случая равномерного распределения, и он допускает широкое обобщение.

Введем на отрезке $[0,1]$, который будем обозначать буквой R , преобразование $\alpha \rightarrow \{2\alpha\}$, $T\alpha = \{2\alpha\}$. Через $T^k\alpha$ обозначим преобразование T , повторенное k раз.

Справедливо очевидное равенство:

$$T^{k_1+k_2}\alpha = T^{k_1}(T^{k_2}\alpha). \quad (2)$$

ЛЕММА 1. *Мера μ есть инвариантная мера для преобразования T , т. е. мера полного прообраза измеримого множества равна мере образа.*

Достаточно доказать это свойство для интервалов вида $\Delta = \left(\frac{A}{2^r}, \frac{A+1}{2^r}\right)$,

где A — целое, $0 \leq A \leq 2^r - 1$. Пусть

$$A = \varepsilon_1 2^{r-1} + \varepsilon_2 2^{r-2} + \dots + \varepsilon_r$$

и пусть j — число единиц среди $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r$. Обозначим $\mu\Delta = p^j q^{r-j}$.

Прообраз $\left(\frac{A}{2^r}, \frac{A+1}{2^r}\right)$ состоит из двух интервалов:

$$\left(\frac{A}{2^{r+1}}, \frac{A+1}{2^{r+1}}\right) \text{ и } \left(\frac{\frac{A}{2^r} + 1}{2}, \frac{\frac{A+1}{2^r} + 1}{2}\right).$$

Очевидно, что

$$\mu T^{-1}\Delta = p^j q^{r+1-j} + p^{j+1} q^{r-j} = p^j q^{r-j} (p + q) = p^j q^{r-j} = \mu \Delta.$$

Назовем множество U инвариантным, если его полный прообраз $T^{-1}U$ совпадает с U .

ЛЕММА 2. Отрезок $[0, 1]$ нельзя разложить на сумму двух инвариантных множеств $U_1 \cup U_2$ без общих точек, каждое положительной меры.

Доказательство. Допустим, что отрезок $[0, 1]$ удалось разложить на сумму двух инвариантных множеств положительной меры μ без общих точек. Обозначим $\eta = \mu U_1$, $0 < \eta < 1$ (оба неравенства строгие!). Пусть $\chi(x)$ — характеристическая функция множества U_1 и пусть $0 \leq A \leq \leq 2^n - 1$ — целое число. Поскольку $\frac{x+A}{2^n}$ есть один из прообразов n -го порядка точки x и множество U_1 — инвариантное, то при любом $x \in [0, 1]$

$$\chi\left(\frac{x+A}{2^n}\right) = \chi(x).$$

Подсчитаем меру μ части U_1 , лежащей на отрезке $\left[\frac{A}{2^n}, \frac{A+1}{2^n}\right]$. Она равна

$$\int_{\frac{A}{2^n}}^{\frac{A+1}{2^n}} \chi(x) d\mu.$$

Пусть в двоичном разложении A есть α единиц и, следовательно, $n - \alpha$ нулей, т. е.

$$\mu\left(\frac{A}{2^n}, \frac{A+1}{2^n}\right) = p^\alpha q^{n-\alpha}.$$

Рассмотрим переменные y и $\frac{y+A}{2^n}$. Пусть y пробегает некоторый отрезок

$$\left[\frac{B}{2^s}, \frac{B+1}{2^s}\right]$$

с мерой $p^j q^{s-j}$; тогда $\frac{y+A}{2^n}$ пробегает отрезок

$$\left[\frac{2^s A + B}{2^{s+n}}, \frac{2^s A + B + 1}{2^{s+n}}\right]$$

с мерой

$$p^{j+\alpha} q^{n+s-j-\alpha} = p^\alpha q^{n-\alpha} \mu\left[\frac{B}{2^s}, \frac{B+1}{2^s}\right].$$

Поэтому

$$\int_{\frac{A}{2^n}}^{\frac{A+1}{2^n}} \chi(x) d\mu = p^\alpha q^{n-\alpha} \int_0^1 \chi\left(\frac{y+A}{2^n}\right) d\mu = p^\alpha q^{n-\alpha} \int_0^1 \chi(y) d\mu$$

(ибо $\chi\left(\frac{y+A}{2^n}\right) = \chi(y)$). Итак,

$$\mu\left(U_1 \cap \left(\frac{A}{2^n}, \frac{A+1}{2^n}\right)\right) = p^\alpha q^{n-\alpha} \tau_1.$$

Зададим $\varepsilon > 0$, $1 - \tau_1 > \varepsilon$ (оба неравенства строгие!). По теореме, аналогичной теореме Лебега, множество U_1 , как множество положительной меры μ , должно иметь точку плотности ϑ_0 , т. е. для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое δ_0 , что, какой бы интервал Δ_δ с $\mu\Delta_\delta \leq \delta_0$ около точки ϑ_0 мы ни взяли,

$$\frac{\mu(U_1 \cap \Delta_\delta)}{\mu\Delta_\delta} > 1 - \varepsilon.$$

Возьмем n таким большим, чтобы при любом $0 \leq \alpha \leq n$ $p^\alpha q^{n-\alpha} \leq \delta_0$, а за Δ_δ примем интервал $\left(\frac{A}{2^n}, \frac{A+1}{2^n}\right)$, на котором лежит ϑ_0 . Мы имеем:

$$\mu(U_1 \cap \Delta_\delta) = p^\alpha q^{n-\alpha} \tau_1.$$

С другой стороны,

$$\mu(U_1 \cap \Delta_\delta) > (1 - \varepsilon) p^\alpha q^{n-\alpha}.$$

Это даст: $\tau_1 > 1 - \varepsilon$, что противоречит заданному неравенству $1 - \tau_1 > \varepsilon$. Лемма доказана.

Таким образом, мы имеем дело с дискретной динамической системой (правда, преобразование T не взаимно однозначно), причем мера μ является инвариантной мерой. Кроме того, система является не разложимой по отношению к мере μ . Применяя теорему Биркгофа (для не взаимно однозначных преобразований), мы получаем следующую лемму.

ЛЕММА 3. *Какова бы ни была интегрируемая по мере μ на $[0, 1]$ функция $\varphi(x)$, почти для всех α*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(\alpha) + \varphi(2\alpha) + \dots + \varphi(2^{n-1}\alpha)}{n} = \int_0^1 \varphi(x) d\mu. \quad (3)$$

Беря, в частности, за $\varphi(x)$ характеристическую функцию интервала $\Delta = \left[\frac{A}{2^r}, \frac{A+1}{2^r}\right]$, мы получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(\alpha, \Delta)}{n} = \mu\Delta.$$

Теорема 1 вытекает теперь из соображения, что интервалов Δ счетное множество.

§ 4

Дадим обобщение критерия Пятецкого [см. (1), теорема II] равномерного распределения дробных долей функции $\alpha 2^x$ *.

* При доказательстве применяется аналог метода И. М. Виноградова оценок тригонометрических сумм.

ТЕОРЕМА 2. Пусть последовательность знаков α такова, что, каково бы ни было $s \geq 1$ и какова бы ни была s -членная комбинация Δ , выполняется неравенство:

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \frac{N_P(\alpha, \Delta)}{P} < C \mu \Delta$$

(C — константа, не зависящая от s и Δ). Тогда α — нормальная по Бернулли последовательность знаков *.

Для доказательства нам потребуется несколько лемм.

ЛЕММА 4. Пусть r — целое число ≥ 1 . Мера μ множества тех α , у которых среди первых l двоичных знаков количество единиц удовлетворяет неравенству $|A_1^{(l)} - lp| \geq \frac{l}{r}$, не превосходит $\frac{r^4}{4l^2}$.

Доказательство тождественно с тем, которое используется при доказательстве усиленного закона больших чисел и является ослабленным вариантом рассуждения, используемого в работе (5). Сосчитаем меру μ тех α , у которых количество единиц среди первых l знаков равно k . k единиц мы можем C_l^k способами распределить на l мест. Каждой из полученных скобок будет соответствовать интервал вида $(\frac{A}{2^l}, \frac{A+1}{2^l})$, мера μ которого равна $p^k q^{l-k}$. Поэтому искомая в лемме 4 мера равна

$$\mu_{\alpha} \left\{ |A_1^{(l)} - lp| \geq \frac{l}{r} \right\} = \sum_{\substack{k=0 \\ |k-lp| \geq \frac{l}{r}}}^l C_l^k p^k q^{l-k}.$$

Так как при $|k - lp| \geq \frac{l}{r}$

$$\left(\frac{r}{l}\right)^4 (k - lp)^4 \geq 1,$$

то

$$\begin{aligned} \mu_{\alpha} \left\{ |A_1^{(l)} - lp| \geq \frac{l}{r} \right\} &\leq \frac{r^4}{l^4} \sum_{\substack{k=0 \\ |k-lp| \geq \frac{l}{r}}}^l C_l^k p^k q^{l-k} (k - lp)^4 \leq \\ &\leq \frac{r^4}{l^4} \sum_{k=0}^l C_l^k p^k q^{l-k} (k - lp)^4. \end{aligned}$$

Вычислим

$$I = \sum_{k=0}^l C_l^k p^k q^{l-k} (k - lp)^4 = S_4 - 4lpS_3 + 6l^2p^2S_2 - 4l^3p^3S_1 + l^4p^4,$$

где

$$S_{\tau} = \sum_{j=0}^l j^{\tau} C_l^j p^j q^{l-j}, \quad \tau = 1, 2, 3, 4.$$

*Теорему можно доказать в более сильной форме, однако это не является сейчас нашей задачей. Уже в такой форме она годна для применений.

Определяя S_τ обычным приемом (дифференцированием формул бинома Ньютона), мы получаем (выкладка опускается):

$$I = lpq(1 + 3(l-2)pq).$$

Так как $pq \leq \frac{1}{4}$, то

$$I \leq \frac{l}{4} \left(1 + \frac{3(l-2)}{4}\right) \leq \frac{l^2}{4}.$$

Таким образом,

$$\mu E \left\{ |A_1^{(l)} - lp| \geq \frac{l}{r} \right\} \leq \frac{r^4}{4l^2},$$

что и требуется доказать.

Следующая лемма является простым обобщением леммы 4.

ЛЕММА 5. Пусть $s \geq 1$ — натуральное и Δ — некоторая s -членная комбинация знаков 0 и 1 ($\mu\Delta$ — ее вероятность). Пусть $l \geq 1$ — натуральное число. Рассмотрим первые ls двоичных знаков α

$$(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s \alpha_{s+1} \dots \alpha_{2s} \dots \alpha_{(l-1)s+1} \dots \alpha_{ls})$$

и сгруппируем их по s штук, так что эту же запись мы можем представить в виде

$$(b_1, b_2 \dots b_l),$$

где

$$b_k = (\alpha_{(k-1)s+1} \dots \alpha_{ks})$$

(для $s=1$ обе записи совпадают). Обозначим через $A_\Delta^{(l)}$ количество появлений Δ среди $(b_1, b_2 \dots b_l)$. Тогда мера μ множества тех α , для которых $|A_\Delta^{(l)}(\alpha) - l\mu\Delta| \geq \frac{l}{r}$ (r — любое натуральное число), не превосходит $\frac{r^4}{4l^2}$.

Доказательство. Искомая мера равна

$$\sum_{\substack{k=0 \\ |k-l\mu\Delta| \geq \frac{l}{r}}}^l C_l^k (\mu\Delta)^k (1-\mu\Delta)^{l-k}.$$

Действительно, мы можем считать серию испытаний с номерами от $js+1$ -го до $j(s+1)$ -го за одно испытание. Таким образом произведено l независимых испытаний. В каждом испытании вероятность события Δ равна $\mu\Delta$. Вероятность того, что событие Δ появится k раз, равна

$$C_l^k \mu\Delta^k (1-\mu\Delta)^{l-k}.$$

Отсюда и следует наше утверждение. Повторяя рассуждения леммы 4 (беря $\mu\Delta$ вместо p и $1-\mu\Delta$ вместо q), получаем требуемый результат.

Докажем теперь теорему 2. Пусть α , для которого выполнены условия теоремы 2, записано в виде

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots).$$

Соберем знаки α в группы по s штук:

$$\alpha = (b_1, \dots, b_n, \dots).$$

Эти b назовем 2^s -ичными знаками α . Из P знаков α_i мы получаем $\left[\frac{P}{s}\right]$

полных знаков b . Выберем произвольное $l \geq 1$ и соберем 2^s -ичные знаки в группы по l штук:

$$\alpha = (\underbrace{b_1 \dots b_l}_{\text{группа}} \underbrace{b_{l+1} \dots b_{2l} \dots}_{\text{группа}}).$$

Возьмем любое натуральное $r \geq 1$ и будем называть l -членную группу хорошей, если Δ имеется в ней в количестве $l(\mu\Delta + \theta \frac{1}{r})$, $|\theta| \leq 1$, и плохой, — если это не так. Обозначим через $M\left(\left[\frac{P}{s}\right]\right)$ число, указывающее сколько раз встретится плохая группа среди первых $l\left[\frac{P}{s}\right]$ групп 2^s -ичных знаков числа α . Тогда хорошая группа встретится в количестве

$$\left[\frac{P}{sl}\right] - M\left(\left[\frac{P}{s}\right]\right) = \frac{P}{sl} - M\left(\left[\frac{P}{s}\right]\right) + O(1)$$

с абсолютной константой в « O ». Хорошая группа привнесет $l(\mu\Delta + \theta \frac{1}{r})$ знаков Δ , плохая группа даст не более l . Поэтому всего знаков Δ встретится до $\left[\frac{P}{s}\right]$ -го места в количестве

$$A_{\Delta}^{\left[\frac{P}{s}\right]}(\alpha) = l\left(\mu\Delta + \frac{\theta}{r}\right)\left(\frac{P}{sl} - M\left(\left[\frac{P}{s}\right]\right) + O(1)\right) + l\theta_1 M\left(\left[\frac{P}{s}\right]\right) + O(l),$$

где $0 \leq \theta_1 \leq 1$ ($O(l)$ происходит оттого, что, возможно, есть неполная группа и поэтому константа в « O » — абсолютная). Отсюда следует:

$$A_{\Delta}^{\left[\frac{P}{s}\right]}(\alpha) = \frac{P}{s}\left(\mu\Delta + \frac{\theta}{r}\right) + O\left(M\left[\frac{P}{s}\right]l\right) + O(l)$$

(константы в « O » — абсолютные).

Обозначим через \mathfrak{M} множество тех ls -членных комбинаций двоичных знаков или l -членных комбинаций 2^s -ичных знаков, для которых количество $A_{\Delta}^{(l)}$ появлений Δ удовлетворяет неравенству

$$|A_{\Delta}^{(l)} - l\mu\Delta| \geq \frac{l}{r}.$$

Каждая плохая комбинация принадлежит системе \mathfrak{M} , поэтому

$$M\left(\left[\frac{P}{s}\right]\right) \leq N_s\left[\frac{P}{s}\right](\mathfrak{M}).$$

Но при $P \geq P_0$, согласно условию,

$$N_s\left[\frac{P}{s}\right](\mathfrak{M}) < 2C_{\mu}\mathfrak{M} \cdot P.$$

Далее, по лемме 5, $\mu\mathfrak{M} \leq \frac{r^4}{4l^2}$. Следовательно, при $P \geq P_0$

$$A_{\Delta}^{\left[\frac{P}{s}\right]}(\alpha) = \frac{P}{s}\left(\mu\Delta + \frac{\theta}{r}\right) + O\left(P \frac{r^4}{l}\right) + O(l),$$

$$\overline{\lim}_{P \rightarrow \infty} \left| \frac{A_{\Delta}^{\left[\frac{P}{s}\right]}(\alpha)}{\frac{P}{s}} - \mu\Delta \right| \leq \frac{1}{r} + O\left(\frac{sr^4}{l}\right).$$

Устремляя l к бесконечности, получаем:

$$\overline{\lim}_{P \rightarrow \infty} \left| \frac{A_{\Delta}^{\left[\frac{P}{s}\right]}(\alpha)}{\frac{P}{s}} - \mu\Delta \right| \leq \frac{1}{r}.$$

Устремляя r к бесконечности, получаем:

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \frac{A_{\Delta}^{\left[\frac{P}{s}\right]}(\alpha)}{\frac{P}{s}} = \mu\Delta.$$

Рассуждая аналогично для чисел $T\alpha$, $T^2\alpha$, ..., $T^{s-1}\alpha$, получим, при выполнении условия теоремы 2, что

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \frac{A_{\Delta}^{\left[\frac{P}{s}\right]}(T^j\alpha)}{\frac{P}{s}} = \mu\Delta, \quad j = 0, 1, 2, \dots, s-1.$$

Но очевидно, что

$$N_P(\alpha, \Delta) = \sum_{j=0}^{s-1} A_{\Delta}^{\left[\frac{P}{s}\right]}(T^j\alpha) + O(s).$$

Отсюда следует:

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \frac{N_P(\alpha, \Delta)}{P} = s \frac{\mu\Delta}{s} = \mu\Delta,$$

что и требовалось доказать.

§ 5

Построим нормальную по Бернулли последовательность знаков. Мы используем идею Чемпернуона ⁽⁶⁾. Пусть p (как и прежде) — вероятность наступления события в каждом испытании. Возьмем любую последовательность рациональных чисел $\frac{\alpha_r}{\beta_r}$ таких, что

$$p = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\alpha_r}{\beta_r}, \quad 0 < \alpha_r < \beta_r, \quad \beta_1 \leq \beta_2 \leq \beta_3 \leq \dots, \quad \frac{\beta_r}{\beta_{r-1}} = 1 + O\left(\frac{1}{r}\right).$$

(Такая последовательность для любого $0 < p < 1$ существует; если p — рациональное число, $p = \frac{\alpha}{\beta}$, то мы берем просто $\alpha_n = \alpha$, $\beta_n = \beta$ при любом n .)

Обозначим через s_r последовательность всех r -значных чисел в двоичной шкале, причем число, в котором единица встречается ν раз, а нуль, следовательно, $s - \nu$ раз, будем повторять $\alpha_r^{\nu}(\beta_r - \alpha_r)^{s-\nu}$ раз. Будем от-

дельные числа отделять запятыми. Например, пусть $\alpha_3 = 2$, $\beta_3 = 3$. Тогда $s_3 = 000' 001' 001' 010' 010' 011' 011' 011' 011' 100' 100' 101' 101' 101' 101' 110' 110' 110' 110' 111' 111' 111' 111' 111' 111' 111' 111'$. Покажем, что последовательность знаков α , символически записанная в виде

$$\alpha = s, s_2, s_3 \dots,$$

— нормальная по Бернулли. Для этого надо показать, что любая s -членная комбинация, в которой имеется ν единиц, встречается с асимптотической частотой $p^\nu q^{s-\nu}$. А для этого, по доказанному критерию (теорема 2), достаточно показать, что существует абсолютная постоянная C (не зависящая от Δ_s) такая, что

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \frac{N_P(\Delta_s)}{P} < C p^\nu q^{s-\nu}.$$

Обозначим через x_r число знаков в s_r , через S_r — последовательность $s_1 s_2 \dots s_r$, через X_r — число знаков в S_r ($X_r = x_1 + x_2 + \dots + x_r$), через g_r — число появлений Δ_s в s_r и через G_r — число появлений Δ_s в S_r . Подсчитаем x_r . Количество r -значных чисел, в которых единица встречается k раз, будет равно C_r^k , причем каждое повторяется $\alpha_r^\nu (\beta_r - \alpha_r)^{r-\nu}$ раз. Таким образом, в s_r r -значных чисел содержится

$$\sum_{k=0}^r C_r^k \alpha_r^\nu (\beta_r - \alpha_r)^{r-\nu} = \beta_r^r,$$

а знаков $x_r = r \beta_r^r$.

Δ_s может входить в s_r разделенным запятой и не разделенным запятой. Если $r < s$, то Δ_s не может входить в s_r неразделенным. Если $r \geq s$, то Δ_s входит в s_r не разделенным ровно

$$(r - s + 1) \alpha_r^\nu (\beta_r - \alpha_r)^{s-\nu} \beta_r^{r-s}$$

раз. Действительно, существует $r - s + 1$ способов, посредством которых Δ_s может занимать неразделенное положение в r -значном числе (первый знак Δ_s может совпадать с первым знаком, вторым знаком, ..., $(r - s + 1)$ -м знаком r -значного числа). Δ_s занимает s мест в этом числе, а на оставшиеся $r - s$ мест мы можем разместить f единиц ($0 \leq f \leq r - s$) C_{r-s}^f способами, а что останется — заполнить нулями. Такое r -значное число нужно повторить $\alpha_r^{\nu+f} (\beta_r - \alpha_r)^{r-\nu-f}$ раз (в нем ν единиц от Δ_s и f мы добавили). Таким образом, Δ_s входит в s_r не разделенным точно

$$\begin{aligned} & (r - s + 1) \sum_{f=0}^{r-s} C_{r-s}^f \alpha_r^{\nu+f} (\beta_r - \alpha_r)^{r-\nu-f} = \\ & = (r - s + 1) \alpha_r^\nu (\beta_r - \alpha_r)^{s-\nu} \sum_{f=0}^{r-s} C_{r-s}^f \alpha_r^f (\beta_r - \alpha_r)^{r-s-f} = \\ & = (r - s + 1) \alpha_r^\nu (\beta_r - \alpha_r)^{s-\nu} \beta_r^{r-s} \end{aligned}$$

раз. s_r содержит β_r^r запятых. Данная запятая не может делить более s различных Δ_s . Поэтому Δ_s входит разделенной не более $O(\beta_r^r)$ раз (s можно уводить в константы, ибо растет r).

Итак,

$$g_r = (r - s + 1) \alpha_r^\nu (\beta_r - \alpha_r)^{s-\nu} \beta_r^{r-s} + O(\beta_r^r) = \\ = r \beta_r^r \left(\frac{\alpha_r}{\beta_r} \right)^\nu \left(1 - \frac{\alpha_r}{\beta_r} \right)^{s-\nu} + O(\beta_r^r) = x_r \left(\frac{\alpha_r}{\beta_r} \right)^\nu \left(1 - \frac{\alpha_r}{\beta_r} \right)^{s-\nu} + o(x_r).$$

Так как

$$\left(\frac{\alpha_r}{\beta_r} \right)^\nu \left(1 - \frac{\alpha_r}{\beta_r} \right)^{s-\nu} = p^\nu q^{s-\nu} + o(1),$$

то

$$g_r = x_r p^\nu q^{s-\nu} + o(x_r).$$

Далее,

$$G_r = \sum_{k=1}^r g_r + O(r), \quad X_r = \sum_{k=1}^r x_r.$$

Мы получаем:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{G_r}{X_r} = p^\nu q^{s-\nu}.$$

Пусть $X_{r-1} \leq P < X_r$; тогда

$$N_P(\Delta_s) \leq G_r \text{ и } (r-1) \beta_{r-1}^{r-1} \leq X_{r-1}.$$

Далее, $X_r = X_{r-1} + r \beta_r^r$. Отсюда следует:

$$\frac{1}{P} \leq \frac{X_r}{X_{r-1}} \cdot \frac{1}{X_r} = \left(1 + \frac{r \beta_r^r}{X_{r-1}} \right) \frac{1}{X_r} \leq \left(1 + \frac{r \beta_r^r}{(r-1) \beta_{r-1}^{r-1}} \right) \frac{1}{X_r},$$

и так как $\frac{\beta_r}{\beta_{r-1}} = 1 + O\left(\frac{1}{r}\right)$, то

$$\frac{1}{P} \leq C \frac{1}{X_r}, \\ \overline{\lim}_{P \rightarrow \infty} \frac{N_P(\Delta_s)}{P} \leq C \lim_{X_r} \frac{G_r}{X_r} = C p^\nu q^{s-\nu}.$$

Критерий выполнен и наше утверждение доказано.

Поступило
4.X.1956

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ R i e s z F., Sur la théorie ergodique, Commentarii math. Helvetici, vol. 17, f. 3 (1944—1945), 221—239.
- ² Р о м а н о в с к и й В. И., Дискретные цепи Маркова, Москва, 1949.
- ³ Р а й к о в Д. А., О некоторых арифметических свойствах суммируемых функций, Матем. сборн., 1 (43): 3 (1936), 377—384.
- ⁴ Ш а п и р о - П я т е ц к и й И. И., О законах распределения дробных долей показательной функции, Известия Ака. наук СССР, сер. матем., 15 (1951), 47—52.
- ⁵ Ш а п и р о - П я т е ц к и й И. И., О распределении дробных долей показательной функции, Учен. записки М.Г.П.И им. В. И. Ленина.
- ⁶ Champernowne D. G., On the decimal normal in the scale of ten, Journ. London Math. Soc., 8 (1933), 254—260.

А. И. КОСТРИКИН

КОЛЬЦА ЛИ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИЕ УСЛОВИЮ ЭНГЕЛЯ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым)

В изучаемом классе колец вводится понятие радикала, при помощи которого доказывается локальная нильпотентность колец Ли характеристики $p \geq 0$, удовлетворяющих n -му условию Энгеля, в следующих случаях: 1) $n = 4$, $p \geq 5$, 2) $n = 5$, $p > 5$, 3) $n = 6$, $p \geq 7$. Из результатов 1) и 3) следует, в частности, положительное решение ослабленной проблемы Бернсайда для показателей 5 и 7.

Введение

Часть результатов данной работы опубликована без подробного доказательства в работе автора (1). Следуя введенным там определениям, будем для краткости называть кольцом с условием $E_{n,p}$ всякое кольцо Ли \mathfrak{L} характеристики $p \geq 0$, удовлетворяющее n -му условию Энгеля, причем $n < p$ (n — любое в случае $p = 0$):

$$[uv^n] = [\dots [[uv]v] \dots v] = 0$$

для произвольных элементов $u, v \in \mathfrak{L}$.

Нашей целью является изучение колец Ли с условием $E_{n,p}$ с точки зрения их локальной нильпотентности. Представляя самостоятельный интерес для теории колец, эта задача самым тесным образом связана с так называемой ослабленной гипотезой Бернсайда, содержание которой составляет утверждение, что среди конечных групп с данным числом q образующих и тождественным соотношением $x^m = 1$ существует группа $\overline{B}_{q,m}$ наибольшего порядка $\bar{h}_m(q)$. Как известно, в случае $m = p$, p — простое, группа $\overline{B}_{q,p}$ заведомо существует, если произвольное кольцо Ли с условием $E_{p-1,p}$, порожденное q образующими, нильпотентно. Подробное освещение связи между группами и кольцами Ли содержится в обширной литературе, ссылки на которую указаны, например, в работе (2), где получены также некоторые результаты, относящиеся к поставленному И. Н. Сановым вопросу об эквивалентности упомянутых задач.

Из наиболее существенных результатов, полученных до настоящего времени о кольцах Ли, удовлетворяющих условию Энгеля, отметим следующие. Грюнберг (3) доказал, что любое такое кольцо Ли будет нильпотентным, если оно разрешимо и порождено конечным числом образующих. В том же направлении Хиггинсом (4) доказана теорема, которую в наших терминах можно формулировать так: из разрешимости кольца Ли с условием $E_{n,p}$ следует его нильпотентность. Кроме того, им дока-

зана нильпотентность колец Ли в следующих случаях: а) $n = 2$, $p \geq 2$, в) $n = 3$, $p \geq 3$, $p \neq 5$, с) $n = 4$, $p \geq 11$.

С другой стороны, Кон ⁽⁵⁾ построил пример разрешимого кольца Ли характеристики p , удовлетворяющего $(p+1)$ -му условию Энгеля, но не являющегося нильпотентным.

Использовать для наших целей доказанную эквивалентность требований разрешимости и нильпотентности затруднительно, так как имеющееся доказательство разрешимости кольца даже в указанном частном случае с) Хиггинса оказывается довольно сложным. Более естественным кажется путь, следуя по которому Левицкий ⁽⁶⁾ доказал локальную нильпотентность ассоциативного нилькольца ограниченного индекса (т. е. кольца S , в котором $s^m = 0$ для всех $s \in S$).

В § 2 настоящей статьи показывается, что в кольце Ли с условием $E_{n,p}$ можно ввести понятие радикала, обладающего всеми свойствами радикала Левицкого в общих ассоциативных кольцах [см. ⁽⁷⁾]. Метод доказательства теорем 3 и 4 о радикале и построения § 3—4, использующие весьма специальные соображения, позволили нам доказать локальную нильпотентность колец Ли, удовлетворяющих условию Энгеля, в следующих случаях: 1) $n = 4$, $p \geq 5$, 2) $n = 5$, $p > 5$, 5) $n = 6$, $p \geq 7$. Из 1) и 3) следует, в частности, решение ослабленной проблемы Бернсайда для показателей $p = 5$ и 7 (при любом q).

Конечность групп $\bar{B}_{q,m}$, $m = 2, 3, 4$, следует из результатов Бернсайда ⁽⁸⁾ и Санова ⁽⁹⁾.

Ф. Холл и Г. Хигман ⁽¹⁰⁾ показали, что в классе разрешимых групп конечность $\bar{B}_{q,m}$ вытекает из конечности групп $\bar{B}_{q_i, p_i^{\alpha_i}}$, p_i — простые, q, q_i — произвольные натуральные числа, $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$. Так как по известной теореме Бернсайда группа, порядок которой содержит не более двух простых множителей, всегда разрешима, то отсюда следует, в частности, положительное решение ослабленной проблемы Бернсайда для любого q и $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$, если уже доказана конечность групп $\bar{B}_{q_1, p_1^{\alpha_1}}$ и $\bar{B}_{q_2, p_2^{\alpha_2}}$.

Таким образом, имеет место следующий основной результат.

ТЕОРЕМА 1. *Группа $\bar{B}_{q,m}$, q — любое, конечна, если $m = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 12, 14, 15, 20, 21, 28, 35$. В классе разрешимых групп добавится еще ряд значений, максимальным из которых является $m = 420$.*

Интересно посмотреть, как растет порядок групп $\bar{B}_{2,m}$ при увеличении m . Значения $\bar{h}_m = \bar{h}_m(2)$ для $m = 2, 3, 4$ даны в работе ⁽⁸⁾, для $m = 6$ — в работе ⁽¹⁰⁾. Вместе с оценками из работы ⁽²⁾ получаем:

$$\bar{h}_2 = 2^2, \quad \bar{h}_3 = 3^2, \quad \bar{h}_4 = 2^{12}, \quad 5^{34} \geq \bar{h}_5 \geq 5^{31}, \quad \bar{h}_6 = 2^{28} \cdot 3^{25}, \quad \bar{h}_7 > 7^{1075}.$$

Результаты § 1—3 настоящей работы и большая часть результатов работы ⁽²⁾ составляют основное содержание кандидатской диссертации, выполненной под руководством И. Р. Шафаревича, которому автор выражает глубокую благодарность за многие ценные советы и замечания.

§ 1. Вспомогательные результаты

Сформулируем сначала основные определения и введем обозначения, которыми будем пользоваться на протяжении всей статьи.

Произведение двух элементов u и v из кольца Ли \mathfrak{L} обозначим через $[uv]$. Правонормированное произведение $[\dots [u_1 u_2] \dots u_s]$ s множителей будем коротко записывать в виде $[u_1 u_2 \dots u_s]$, допуская также сокращения типа

$$[u_1 u_2 u_2 u_2 u_3 u_4] = [u_1 u_2^4 u_3 u_4].$$

\mathfrak{L} — нильпотентное кольцо класса m , если $\mathfrak{L}^m = [\dots [\mathfrak{L}\mathfrak{L}] \dots \mathfrak{L}] = 0$, но существует хотя бы один элемент $[\dots [u_1 u_2] \dots u_{m-1}] \neq 0$.

\mathfrak{L} — локально нильпотентное кольцо, если любое конечное множество элементов из \mathfrak{L} порождает нильпотентное кольцо Ли. В противном случае будем называть \mathfrak{L} локально регулярным кольцом.

Радикалом $N(\mathfrak{L})$ кольца Ли \mathfrak{L} назовем сумму всех его локально нильпотентных идеалов. Содержательность этого последнего понятия для колец с условием $E_{n,p}$ будет установлена в § 2.

Для дальнейшего удобно ввести в рассмотрение гомоморфный образ кольца Ли \mathfrak{L} — кольцо $\mathfrak{D}_{\mathfrak{L}}$ его внутренних дифференцирований:

$$a \rightarrow p_a, \quad a \in \mathfrak{L}, \quad p_a \in \mathfrak{D}_{\mathfrak{L}}, \quad u p_a = [ua],$$

и $\mathfrak{A}_{\mathfrak{L}}$ — ассоциативное кольцо, порожденное элементами из $\mathfrak{D}_{\mathfrak{L}}$. Элементы кольца $\mathfrak{A}_{\mathfrak{L}}$, являющиеся конечными суммами произведений элементов из $\mathfrak{D}_{\mathfrak{L}}$, будем обозначать строчными готическими буквами a, b, c, \dots . Если $a = p_{u_1} p_{u_2} \dots p_{u_m}$, то m будем называть степенью элемента a (в данной записи). Если $a = \sum a_i$, то

$$\text{ст. } a = \max \text{ ст. } a_i.$$

При доказательстве теорем о радикале используется теорема 2 работы Джекобсона ⁽¹¹⁾, утверждение которой сводится к следующему. Пусть a — элемент кольца $\mathfrak{A}_{\mathfrak{L}}$ степени $k < p$, если $p \neq 0$, и произвольной степени, если $p = 0$; тогда $l a$ при некотором целом рациональном $r \neq 0$ ($r = 1$ для $p > 0$) выражается в виде линейной комбинации l -х степеней ($l \leq k$) элементов из $\mathfrak{D}_{\mathfrak{L}}$.

Нам потребуются также тождества, которыми пользовался Джекобсон при доказательстве этой теоремы. Обозначим:

$$(p_{a_1} + p_{a_2} + \dots + p_{a_r})^k = \sum_{j_1 + j_2 + \dots + j_r = k} \left\{ p_{a_1} p_{a_2} \dots p_{a_r} \right\}_{j_1 j_2 \dots j_r}; \quad (1.1)$$

в фигурных скобках стоят однородные выражения степени j_s относительно p_{a_s} , $s = 1, \dots, r$. Пусть, далее,

$$p_{a_{i_1}} + p_{a_{i_2}} + \dots + p_{a_{i_s}} = p_{i_1 i_2 \dots i_s}$$

и $\sum_c p_{i_1 \dots i_s}^k$ означает сумму k -х степеней $\binom{k}{s}$ таких выражений, получаемых при пробегании i_1, \dots, i_s по всем комбинациям $1, 2, \dots, k$ из s индексов, $1 \leq i_j \leq k$, причем все i_j различны. Тогда

$$p_{i_1 \dots i_k}^k = \sum_c p_{i_1 \dots i_{k-1}}^k + \dots + (-1)^{k-1} \sum_c p_{i_1}^k = \left\{ p_{a_1} \dots p_{a_k} \right\}_{1 \dots 1}. \quad (1.2)$$

Очевидно,

$$k! p_{a_1} \dots p_{a_k} = \left\{ \begin{matrix} p_{a_1} \dots p_{a_k} \\ 1 \dots 1 \end{matrix} \right\} + S,$$

где S есть сумма выражений

$$p_{a_{i_1}} \dots p_{a_{i_{j-1}}} [p_{a_{i_j}} p_{a_{i_{j+1}}}] p_{a_{i_{j+2}}} \dots p_{a_{i_k}} = p_{a_{i_1}} \dots p_{a_{i_{j-1}}} p_{[a_{i_j} a_{i_{j+1}}]} p_{a_{i_{j+2}}} \dots p_{a_{i_k}}$$

степени $k-1$ относительно элементов из $\mathfrak{D}_{\mathfrak{L}}$. Отсюда и следует утверждение Джекобсона.

Легко видеть, что в случае кольца \mathfrak{L} с условием $E_{n,p}$ подобное представление возможно для всех элементов из $\mathfrak{U}_{\mathfrak{L}}$. В самом деле, полагая в (1.2) $k=n$, получим

$$\left\{ \begin{matrix} p_{a_1} \dots p_{a_n} \\ 1 \dots 1 \end{matrix} \right\} = 0,$$

так что $n! p_{a_1} \dots p_{a_n}$, а вслед за тем и любое произведение $r p_{a_1} \dots p_{a_t}$ запишется в виде суммы произведений степени $n-1$:

$$r p_{a_1} \dots p_{a_t} = \sum_{b_1, \dots, b_{n-1}} \lambda_{b_1, \dots, b_{n-1}} p_{b_1} p_{b_2} \dots p_{b_{n-1}}, \quad r \neq 0, \quad (1.3)$$

что, в свою очередь, приводит к записи:

$$r p_{a_1} \dots p_{a_t} = \sum_{u_i} \alpha_i p_{u_i}^{n-1} + \sum_{v_i} \beta_i p_{v_i}^{n-2} + \dots + \sum_{w_i} \gamma_i p_{w_i}, \quad (1.4)$$

где $p_{u_i}, \dots, p_{w_i} \in \mathfrak{D}_{\mathfrak{L}}$, t — произвольное.

Важно отметить, что каждое из p_{a_i} входит во все произведения в правой стороне (1.3), так что степень $p_{b_1} \dots p_{b_{n-1}}$ относительно p_{a_i} равна t . Отсюда, между прочим, непосредственно вытекает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть X — множество образующих ассоциативного кольца A характеристики $p \geq 0$, $[X]$ — кольцо Ли, порожденное множеством X относительно операции $[x_1 x_2] = x_1 x_2 - x_2 x_1$. Тогда если A удовлетворяет условию

$$a^n = 0, \quad a \in [X], \quad n < p \quad (n - \text{любое, если } p = 0),$$

то из нильпотентности $[X]$ следует нильпотентность (в ассоциативном смысле) кольца A . Обратное утверждение тривиально.

Далее,

$$[ab^{2n-2}] = \sum_{i=0}^{2n-2} (-1)^i \binom{2n-2}{i} b^i a b^{2n-2-i} = (-1)^{n-1} \binom{2n-2}{n-1} b^{n-1} a b^{n-1}.$$

Но из тождественного соотношения $a^n = 0$, $a \in [X]$, следует, ввиду (1.5), соотношение

$$\sum_{i=0}^{n-1} b^i a b^{n-1-i} = 0,$$

умножая которое на b^{n-1} слева, получим, что $b^{n-1} a b^{n-1} = 0$, т. е.

$[ab^{2n-2}] = 0$. Таким образом, $[X]$ удовлетворяет k -му условию Энгеля, $k \leq 2n - 2$, из чего, на основании теорем 5, 7 и 8, мы делаем следующее заключение.

Следствие. Ассоциативное кольцо A , определенное в теореме 2, локально нильпотентно, если 1) $n = 2$, $p \geq 2$, 2) $n = 3$, $p \geq 5$, 3) $n = 4$, $p \geq 7$.

В случаях 1) и 2) (при дополнительном ограничении на характеристику), принимая во внимание отмеченные во введении результаты Хиггинса, можно говорить о нильпотентности кольца A .

Теорема 2 указывает, в частности, на эквивалентность вопросов локальной нильпотентности кольца \mathfrak{L} с условием $E_{n,p}$ и кольца \mathfrak{M} .

Перейдем к выводу ряда тождеств, которыми будем пользоваться в последних двух разделах статьи.

$p_u^n = 0$ для всех u из кольца \mathfrak{L} , удовлетворяющего n -му условию Энгеля. Если в тождестве (1.2) положить $k = n$, считая, кроме того, некоторые из $a_i \in \mathfrak{L}$ одинаковыми, то получится соотношение:

$$j_1! \dots j_s! \left\{ \begin{matrix} p_{a_1} \dots p_{a_s} \\ j_1 \dots j_s \end{matrix} \right\} = 0, \quad j_1 + \dots + j_s = n,$$

которое в случае кольца \mathfrak{L} характеристики $p \geq n$ можно записать без множителя $j_1! \dots j_s!$. В частности,

$$\left\{ \begin{matrix} p_u & p_v \\ 1 & n-1 \end{matrix} \right\} = \sum_{i=0}^{n-1} p_v^i p_u p_v^{n-1-i} = 0,$$

т. е.

$$\sum_{i=0}^{n-1} [wv^i u v^{n-1-i}] = 0$$

для любых элементов $u, v, w \in \mathfrak{L}$. Используя формулу

$$[u [wv^i]] = \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{i}{j} [uv^j w v^{i-j}],$$

получим:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{n-1} [wv^i u v^{n-1-i}] = - \sum_{i=0}^{n-1} [u [wv^i] v^{n-1-i}] = \\ & = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^i (-1)^{j+1} \binom{i}{j} [uv^j w v^{n-1-j}] = \sum_{j=0}^{n-1} [uv^j w v^{n-1-j}] (-1)^{j+1} \sum_{i=j}^{n-1} \binom{i}{j} = \\ & = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{j+1} \binom{n}{j+1} [uv^j w v^{n-1-j}] = 0, \end{aligned}$$

откуда, в силу произвола u, v и w , следует:

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+1} \binom{n}{j+1} p_v^i p_w p_v^{n-1-i} = 0.$$

Если ввести обозначение

$$\left\{ \begin{matrix} p_u & p_v \\ 1 & n-1 \end{matrix} \right\} = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+1} \binom{n}{i+1} p_v^i p_u p_v^{n-1-i}$$

и сделать подстановку $p_v = \alpha_1 p_{v_1} + \dots + \alpha_r p_{v_r}$, то

$$\left\{ \begin{matrix} p_u & \alpha_1 p_{v_1} + \dots + \alpha_r p_{v_r} \\ 1 & n-1 \end{matrix} \right\} = \sum_{k_1 + \dots + k_r = n-1} \alpha_1^{k_1} \dots \alpha_r^{k_r} \left\{ \begin{matrix} p_u p_{v_1} \dots p_{v_r} \\ 1 & k_1 \dots k_r \end{matrix} \right\} = 0.$$

Нетрудно показать [см., например, (4), лемма 1], что при сделанных предположениях о характеристике кольца все определяемые последним тождеством символы

$$\left\{ \begin{matrix} p_u p_{v_1} \dots p_{v_r} \\ 1 & k_1 \dots k_r \end{matrix} \right\}$$

равны нулю.

Таким образом, в $\mathfrak{A}_{\mathfrak{L}}$, где \mathfrak{L} — кольцо Ли характеристики p , удовлетворяющее n -му условию Энгеля, $n \leq p$, имеют место тождества:

$$\left\{ \begin{matrix} p_{u_1} p_{u_2} \dots p_{u_s} \\ j_1 & j_2 & \dots & j_s \end{matrix} \right\} = 0, \quad j_1 + j_2 + \dots + j_s = n, \quad (1.5)$$

$$\left\{ \begin{matrix} p_u p_{v_1} \dots p_{v_r} \\ 1 & k_1 \dots k_r \end{matrix} \right\} = 0, \quad k_1 + k_2 + \dots + k_r = n-1. \quad (1.6)$$

Так как $(-1)^i \binom{p-1}{i} \equiv 1 \pmod{p}$, то для колец с условием $E_{p-1,p}$, представляющих наибольший интерес с точки зрения теории p -групп, тождества (1.5) и (1.6) совпадают. В этом заключается одна из дополнительных трудностей исследования данного класса колец Ли.

Пусть $f(u, v, \dots)$ — элемент из $\mathfrak{A}_{\mathfrak{L}}$ степени $\leq p$ относительно u . Будем иногда пользоваться обозначением:

$$f(u + \alpha w, v, \dots) = f(u, v, \dots) + \alpha \underset{u \rightarrow w}{D} f(u, v, \dots) + \alpha^2 \underset{2u \rightarrow w}{D} f(u, v, \dots) + \dots$$

Ясно, что если $f = 0$ тождественно относительно u , то и $\underset{ku \rightarrow w}{D} f(u, v, \dots) = 0$.

Нам понадобятся еще тождества, получающиеся при наложении на элементы из кольца $\mathfrak{A}_{\mathfrak{L}}$ некоторых ограничений.

ЛЕММА 1. Пусть \mathfrak{L} — произвольное кольцо Ли характеристики $p > 3$ (или $p = 0$); u, v, w, \dots — любые элементы из \mathfrak{L} . Если $p_a^4 = 0$, $p_b^3 = 0$, $p_c^2 = 0$, $a, b, c \in \mathfrak{L}$, то в $\mathfrak{A}_{\mathfrak{L}}$ имеют место следующие соотношения:

$$2p_a p_u p_a^3 - 3p_a^2 p_u p_a^2 + 2p_a^3 p_u p_a = 0, \quad (1.7)$$

$$p_b p_u p_b^2 = p_b^2 p_u p_b, \quad p_b^2 p_u p_b^2 = 0, \quad (1.8)$$

$$[p_u p_b^2]^2 = p_b^2 p_u^2 p_b^2. \quad (1.9)$$

Если $[ub^2ub] = 0$ при всех $u \in \Omega$, то

$$p_b p_u p_b^2 = p_b^2 p_u p_b = 0, \quad (1.10)$$

$$p_c p_u p_c = 0, \quad (1.11)$$

$$p_c p_u p_v p_c = p_c p_v p_u p_c, \quad (1.12)$$

$$p_c p_u p_v p_u p_c = \alpha (p_c p_v p_u^2 p_c + p_c p_u^2 p_v p_c), \quad 2\alpha \equiv 1 \pmod{p}, \quad (1.13)$$

$$p_c p_v p_u^3 p_c = p_c p_u^3 p_v p_c - 3p_c p_u^2 p_v p_u p_c + 3p_c p_u p_v p_u^2 p_c, \quad (1.14)$$

$$p_c p_v^2 p_u^2 p_c - p_c p_u^2 p_v^2 p_c + 2p_c p_u p_v p_u p_v p_c - 2p_c p_v p_u p_v p_u p_c = 0, \quad (1.15)$$

$$p_c p_u^2 p_c p_u p_v p_c + p_c p_u p_v p_c p_u^2 p_c = 0, \quad (1.16)$$

$$p_c p_u^2 p_c p_u^2 p_c = 0, \quad (1.17)$$

$$p_c p_u^2 p_c p_v^2 p_c + p_c p_v^2 p_c p_u^2 p_c + 4p_c p_u p_v p_c p_u p_v p_c = 0, \quad (1.18)$$

$$3p_c p_u^2 p_c p_u^2 p_v p_c - 3p_c p_v p_u^2 p_c p_u^2 p_c + 2p_c p_u p_v p_c p_u^3 p_c - 2p_c p_u^3 p_c p_u p_v p_c = 0, \quad (1.19)$$

$$p_c p_u^2 p_c p_u^3 p_c = p_c p_u^3 p_c p_u^2 p_c, \quad \text{если } p > 5, \quad (1.20)$$

$$3p_c p_u^2 p_c p_u^4 p_c - 4p_c p_u^3 p_c p_u^3 p_c + 3p_c p_u^4 p_c p_u^2 p_c = 0, \quad (1.21)$$

$$p_{[cu^3c]}^3 = 0 \quad \text{при любом } u \in \Omega. \quad (1.22)$$

Если $[cu^3c] = 0$ при всех $u \in \Omega$, то

$$p_c p_u^\alpha p_c = 0, \quad \alpha \leq 3. \quad (1.23)$$

Если $p_c p_v^2 p_c = 0$, то

$$p_c p_v^2 p_u p_c = p_c p_v p_u p_v p_c = p_c p_u p_v^2 p_c. \quad (1.24)$$

Если $p_c p_v^2 p_c = 0$ и $p_c p_v^2 p_u p_c = 0$ при всех $v \in \Omega$, то

$$\begin{aligned} p_c p_v^2 p_u^2 p_c &= p_c p_u^2 p_v^2 p_c = p_c p_u p_v^2 p_u p_c = p_c p_v p_u^2 p_v p_c = \\ &= p_c p_u p_v p_u p_v p_c = p_c p_v p_u p_v p_u p_c. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Из приводимого ниже доказательства тождеств (1.24) и (1.25) ясно, что условия

$$p_c p_v^2 p_c = 0, \quad p_c p_v^2 p_u p_c = 0$$

можно заменить на

$$\alpha p_c p_v^2 p_c \mathfrak{b} = 0 \quad \text{и} \quad \alpha p_c p_v^2 p_u p_c \mathfrak{b} = 0,$$

где α и \mathfrak{b} — любые элементы из \mathfrak{M}_R , не содержащие p_v .

Доказательство. Соотношения (1.7), (1.8) и (1.11) являются следствиями тождеств:

$$p_{[ua^4]} = [p_u p_a^4] = 0, \quad [p_u p_b^3] = 0 \quad \text{и} \quad [p_u p_c^2] = 0.$$

Соотношение (1.9) получается с помощью (1.8):

$$\begin{aligned} [p_u p_b^2]^2 &= (p_u p_b^2 - 2p_b p_u p_b + p_b^2 p_u)^2 = -2p_b p_u p_b p_u p_b^2 + \\ &+ p_b^2 p_u^2 p_b^2 + 4p_b p_u p_b^2 p_u p_b - 2p_b^2 p_u p_b p_u p_b = p_b^2 p_u^2 p_b^2. \end{aligned}$$

Далее,

$$\underset{u \rightarrow w}{D} [ub^2ub] = [wb^2ub] + [ub^2wb] = [wb^2ub] - [w[ub^2]b] = 2[wubub^2] = 0,$$

т. е. $p_b p_u p_b^2 = 0$, что вместе с (1.8) и дает (1.10).

Соотношения (1.12) — (1.16), (1.18), (1.19), (1.21) являются следствиями тождества (1.11), если в нем заменить u соответственно на $[uv]$, $[vu^2]$, $[vu^3]$, $[uv^2u]$, $[cu^3v]$, $[cu^2v^2]$, $[cu^4v]$, $[cu^6]$.

Если в (1.16) и (1.19) заменить v на u , то получим (1.17) и (1.20).

Тождество (1.22) следует из (1.11) и (1.17).

Далее, из $[cu^3c] = 0$ получаем:

$$\underset{u \rightarrow w}{D} [cu^3c] = -3[wc u^2c],$$

т. е. $p_c p_u^2 p_c = 0$. Но

$$p_{[cu^3c]} = [p_c p_u^3 p_c] = 2p_c p_u^3 p_c - 3p_u p_c p_u^2 p_c - 3p_c p_u^2 p_c p_u = 0,$$

откуда следует, что тождество (1.23) верно. Если $p_c p_v^2 p_c = 0$, то

$$\underset{v \rightarrow [uv]}{D} p_c p_v^2 p_c = -p_c p_v^2 p_u p_c + p_c p_u p_v^2 p_c = 0,$$

а это вместе с (1.13) и приводит к (1.24). Учитывая, наконец, (1.24), получаем:

$$\underset{v \rightarrow u}{D} \underset{v \rightarrow [uv]}{D} p_c p_v^2 p_c = 2p_c p_u p_v^2 p_u p_c - 2p_c p_v p_u^2 p_v p_c = 0,$$

$$\underset{v \rightarrow [uv]}{D} p_c p_v^2 p_u p_c = p_c p_u p_v^2 p_u p_c - p_c p_v^2 p_u^2 p_c = 0,$$

$$\underset{v \rightarrow [uv]}{D} p_c p_u p_v^2 p_c = p_c p_u^2 p_v^2 p_c - p_c p_u p_v^2 p_u p_c = 0,$$

$$\underset{v \rightarrow [vu^4]}{D} p_c p_v^2 p_c = p_c p_u^2 p_v^2 p_c + p_c p_v^2 p_u^2 p_c + 2p_c p_v p_u^2 p_v p_c - \\ - 2p_c p_u p_v p_u p_v p_c - 2p_c p_v p_u p_v p_u p_c = 0.$$

Отсюда и из (1.15) следует (1.25).

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Кольцо Li \mathfrak{L} характеристики $p \geq 3$, удовлетворяющее 3-му условию Энгеля, локально нильпотентно.

Доказательство. Как уже упоминалось ранее, Хиггинс доказал нильпотентность \mathfrak{L} для всех $p \geq 7$ и $p = 3$. Поскольку, однако, локальную нильпотентность легко получить при любом $p \geq 3$, то мы не будем ограничиваться случаем $p = 5$.

Из тождеств

$$\left\{ \begin{matrix} p_u & p_v \\ 1 & 2 \end{matrix} \right\} = p_u p_v^2 + p_v p_u p_v + p_v^2 p_u = 0$$

и

$$\left\{ \overline{\begin{matrix} p_u & p_v \\ 1 & 2 \end{matrix}} \right\} = -3p_u p_v^2 + 3p_v p_u p_v - p_v^2 p_u = 0$$

имеем:

$$\alpha) p_v^2 p_u = -3\varepsilon p_u p_v^2 \text{ и}$$

$$\beta) p_v p_u p_v = \varepsilon p_u p_v^2, \quad 2\varepsilon \equiv 1 \pmod{p}.$$

Заменяя в $\beta)$ p_v на $p_v + p_w$, получим:

$$p_v p_u p_w + p_w p_u p_v = \varepsilon p_u p_v p_w + \varepsilon p_u p_w p_v.$$

Таким образом,

$$p_v^2 p_u = -3\varepsilon p_u p_v^2,$$

$$p_v p_u p_v = \varepsilon p_u p_v^2,$$

$$p_v p_u p_w = -p_w p_u p_v + \varepsilon p_u p_v p_w + \varepsilon p_u p_w p_v.$$

В любом произведении $p_{u_1} p_{u_2} \dots p_{u_{s-1}} p_{u_s}$, пользуясь полученными тождествами, можно перевести p_{u_1} на i -е место, $i = s-1, s$. Совершенно очевидно поэтому, что для кольца \mathfrak{N} , порожденного k элементами из \mathfrak{L} , имеет место соотношение $\mathfrak{N}^{2k+1} = 0$.

Лемма доказана.

§ 2. Свойства радикала

ТЕОРЕМА 3. *Радикал кольца Ли \mathfrak{L} с условием $E_{n,p}$ является локально нильпотентным идеалом.*

Доказательство. Очевидно достаточно доказать, что сумма U двух локально нильпотентных идеалов U_1 и U_2 есть локально нильпотентный идеал. Предположим, что U_3 — локально регулярный идеал. Тогда существует некоторое конечное множество элементов

$$u_{3j} = u_{1j} + u_{2j} \in U_3, \quad u_{ij} \in U_i, \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

порождающих регулярное кольцо U'_3 (т. е. кольцо, не являющееся нильпотентным):

$$U'_3 \subset U''_3 = \{u_{ij}\}, \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

где U''_3 — регулярное кольцо. Выберем среди u_{ij} некоторое минимальное множество элементов

$$u_s = u_{i_s j_s}, \quad s = 1, \dots, m, \quad m \leq 2k,$$

порождающее регулярное кольцо U . Очевидно, $m \geq 2$. По выбору элементов u_s , кольцо Ли V с образующими u_2, \dots, u_m будет нильпотентным конечного класса σ . Любой элемент кольца Ли U может быть записан в виде суммы правонормированных произведений образующих u_1, \dots, u_m . Ввиду предполагаемой регулярности U , существует правонормированное произведение

$$u = [u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_s}] \neq 0$$

при любом δ ; $i_s = 1, \dots, m$. Если δ достаточно большое, то среди u_{i_s} необходимо встретится u_1 . Больше того, число $u_{i_s} \neq u_1$ между двумя соседними u_1 не может превышать $(n-1)(\sigma-1)$. Действительно, пусть

$$u = [u_{i_1} \dots u_{i_1} u_{k_1} \dots u_{k_t} u_{i_1} \dots] = [u_{i_1} \dots u_{i_1}] p_{u_{k_1}} \dots p_{u_{k_t}} p_{u_{i_1}} \dots,$$

где $t \geq (n-1)(\sigma-1) + 1$, $u_{k_i} \neq u_1$. Тогда, согласно (1.3),

$$p_{u_{k_1}} \dots p_{u_{k_t}} = \sum_{b_1, \dots, b_{n-1}} \lambda_{b_1 \dots b_{n-1}} p_{b_1} \dots p_{b_{n-1}},$$

причем степень хотя бы одного элемента b_i относительно u_{k_1}, \dots, u_{k_t} будет $\geq \sigma$ (для простоты множитель $r \neq 0$ перед произведением $p_{u_{k_1}} \dots p_{u_{k_t}}$ не будем указывать).

Так как V нильпотентно класса τ , то соответствующий элемент $b_i = 0$ и $p_{b_i} = 0$, т. е. $u = 0$, в противоречие с предположением.

Элемент u можно записать в виде суммы правонормированных произведений элементов типа

$$[u_1 u_{i_1} \dots u_{i_s}], \quad u_{i_j} \neq u_1.$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} u &= [u' u_1 u_{i_2} \dots] = [u' [u_1 u_{i_1}] u_{i_2} \dots] + \\ &+ [u' u_{i_1} u_1 u_{i_2} \dots] = [u' [u_1 u_{i_1} u_{i_2}] \dots] + [u' u_{i_2} [u_1 u_{i_1}] \dots] + \\ &+ [u' u_{i_1} [u_1 u_{i_2}] \dots] + [u' u_{i_1} u_{i_2} u_1 \dots]; \end{aligned}$$

начиная подобные преобразования с u_1 , занимающего в u крайнее справа положение, переведем все $u_{i_j} \neq u_1$ влево от выбранного u_1 . После конечного числа шагов получим требуемое представление элемента u . Итак, существует элемент

$$v = [u_1 u_{i_1} \dots u_{i_{s_1}} [u_1 u_{j_1} \dots u_{j_{s_2}}] \dots [u_1 u_{k_1} \dots u_{k_{s_p}}]] \neq 0.$$

По доказанному, $0 \leq s_i \leq (n-1)(\tau-1)$. Таким образом, среди $[u_1 u_{i_1} \dots u_{i_{s_1}}]$ имеется лишь конечное число различных элементов. Чтобы произведение v относительно них имело любую наперед заданную степень ρ , достаточно, очевидно, взять

$$\delta \geq \rho \{(n-1)(\tau-1) + 1\}.$$

Далее, u_1 принадлежит либо идеалу U_1 , либо идеалу U_2 . Пусть $u_1 \in U_1$, тогда все $[u_1 u_{i_1} \dots u_{i_s}] \in U_1$. Получаем, что конечное число элементов порождает в U_1 регулярное кольцо, чего не может быть.

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. Если \mathfrak{L} — кольцо Ли с условием $E_{n,p}$, то радикал кольца $T = \mathfrak{L}/N(\mathfrak{L})$ равен нулю.

Доказательство. Допустим, что имеется локально регулярный идеал \mathfrak{N} кольца \mathfrak{L} , гомоморфный образ которого является локально нильпотентным идеалом в T . Пусть u_1, \dots, u_m — конечное множество элементов из \mathfrak{N} , порождающее регулярное кольцо U . По предположению, $\bar{U} = U + N/N$ — нильпотентное кольцо Ли, т. е.

$$U^\sigma = [\dots [UU] \dots U] \subseteq N$$

для некоторого конечного числа σ . Пусть M — конечное множество элементов вида

$$[u_{i_1} \dots u_{i_k}], \quad \tau \leq k \leq (n-1)(\tau-1) + 1, \quad i_j = 1, \dots, m;$$

V — порожденное ими кольцо Ли.

Правонормированное произведение $u = [u_{i_1} \dots u_{i_s}]$ при любом сколь угодно большом δ всегда можно записать в виде суммы произведений

$$[v_1 v_2 \dots v_s u_{i_1} \dots u_{i_t}], \quad v_i \in V, \quad u_{i_j} \in U,$$

где элементы из кольца V занимают крайние слева места. В самом деле, пусть

$$u = [u_{i_1} \dots u_{i_\sigma}] p_{u_{i_{\sigma+1}}} \dots p_{u_{i_{\sigma+(n-1)(\sigma-1)+1}}} \dots$$

Тогда

$$P_{u_{i\sigma+1}} \cdots P_{u_{\sigma+(n-1)(\sigma-1)+1}} = \sum_{b_1, \dots, b_{n-1}} \lambda_{b_1, \dots, b_{n-1}} P_{b_1} \cdots P_{b_{n-1}},$$

вследствие чего

$$u = \sum_{b_1, \dots, b_{n-1}} \lambda_{b_1, \dots, b_{n-1}} [v_1 b_1 \cdots b_{n-1} \cdots], \quad v_1 = [u_{i_1} \cdots u_{i_\sigma}] \in V.$$

В каждом слагаемом степень некоторого b_i относительно u_1, \dots, u_m будет не меньше, чем σ . Пусть, например,

$$u' = [v_1 b_1 b_2 \cdots b_{n-1} \cdots] \text{ и ст. } b_2 \geq \sigma.$$

Тогда

$$u' = [v_1 [b_1 b_2] \cdots b_{n-1} \cdots] + [v_1 b_2 b_1 \cdots b_{n-1} \cdots];$$

$[b_1 b_2]$ запишем в виде суммы правонормированных произведений относительно u_i ,

$$\sigma < \text{ст. } [b_1 b_2] < (n-1)(\sigma-1) + 1,$$

а u' — в виде суммы правонормированных произведений относительно $v_1, b_2, [b_1 b_2], u_i$, после чего получим:

$$u' = \sum_{v'_{2i}} \alpha'_i [v_1 v'_{2i} u_{j_1} u_{j_2} \cdots], \quad v'_{2i} \in V.$$

Проделав подобные преобразования с каждым из слагаемых u , найдем что

$$u = \sum_{v_{2i}} \alpha_i [v_1 v_{2i} u_{k_i} \cdots], \quad v_{2i} \in V.$$

Выделяя следующие $(n-1)(\sigma-1) + 1$ множителей, стоящих правее v_{2i} , и повторяя все рассуждения, получим сумму произведений вида

$$[v_1 v_{2i} v_{3j} u_{i_j} \cdots], \quad v_{3j} \in V.$$

Процесс образования элементов $v \in V$ можно, очевидно, продолжить настолько далеко, насколько это позволяет число δ множителей u_i в u .

Пусть $\delta \geq \sigma + (\rho-1)\{(n-1)(\sigma-1) + 1\}$, где ρ — наперед заданное число. Тогда, пользуясь только что описанным методом, будем иметь:

$$U^\delta \subseteq \sum_{\alpha \geq 0} V^\alpha U^\alpha,$$

где

$$V^\alpha U^\alpha = [\dots [[\dots [[VV]V] \dots V]U] \dots U].$$

Так как U — регулярное кольцо, то $U^\delta \neq 0$ при любом δ . Поэтому $V^\rho \neq 0$, какое бы ρ мы ни взяли. А это есть противоречие, так как $V \subseteq N(\mathfrak{L})$.

Теорема доказана.

§ 3. Кольца Ли с условием $E_{n,p}$, $n=4, 5$ и 6 ($p > 7$)

ЛЕММА 3. Пусть \mathfrak{L} — кольцо Ли с условием $E_{4,p}$. Тогда в \mathfrak{L} имеют место тождества:

- 1) $p^3_{[uv^3]} = 0$ для любых $u, v \in \mathfrak{L}$,
- 2) $p^2_{[ub^3]} = 0$, если $p^3_b = 0$.

Доказательство. Так как нас особенно интересует кольцо с условием $E_{4,5}$, то мы имеем возможность пользоваться лишь одним тождеством:

$$p_u p_v^3 + p_v p_u p_v^2 + p_v^2 p_u p_v + p_v^3 p_u = 0$$

в \mathfrak{M}_4 , следствиями которого являются соотношения:

- a) $p_u p_v^3 = \alpha_1 p_v p_u p_v^2 + \alpha_2 p_v^2 p_u p_v + \alpha_3 p_v^3 p_u$,
- b) $p_v^2 p_u p_v^3 = \beta p_v^3 p_u p_v^2$,
- c) $p_v^3 p_u p_v^3 = 0$,

$\beta = \alpha_i = -1$, но для удобства пользования указанными соотношениями мы обозначаем коэффициенты буквами с различными индексами. Введем также обозначение

$$p_v^{\varepsilon_1} p_u p_v^{\varepsilon_2} \dots p_u p_v^{\varepsilon_n} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n), \quad n \geq 2.$$

Получаем:

$$\begin{aligned} p_{[uv^3]} &= [p_u p_v^3] = (0, 3) - 3(1, 2) + 3(2, 1) - (3, 0) = \\ &= \alpha_1(1, 2) + \alpha_2(2, 1) + \alpha_3(3, 0) - 3(1, 2) + 3(2, 1) - (3, 0) = \\ &= \gamma_1(1, 2) + \gamma_2(2, 1) + \gamma_3(3, 0); \\ p_{[uv^3]}^2 &= \gamma_1^2(1, 3, 2) + \gamma_1 \gamma_2(2, 2, 2) + \gamma_1 \gamma_3(3, 1, 2) + \gamma_2^2(2, 3, 1) + \\ &+ \gamma_2 \gamma_3(3, 2, 1) = \gamma_1^2 \alpha_1(2, 2, 2) + \gamma_1^2 \alpha_2(3, 1, 2) + \gamma_1 \gamma_2(2, 2, 2) + \\ &+ \gamma_1 \gamma_3(3, 1, 2) + \gamma_2^2 \beta(3, 2, 1) + \gamma_2 \gamma_3(3, 2, 1) = \\ &= \delta_1(2, 2, 2) + \delta_2(3, 1, 2) + \delta_3(3, 2, 1); \\ p_{[uv^3]}^3 &= p_{[uv^3]}^2 p_{[uv^3]} = \delta_1 \gamma_1(2, 2, 3, 2) + \delta_2 \gamma_1(3, 1, 3, 2) + \\ &+ \delta_3 \gamma_1(3, 2, 2, 2) + \delta_3 \gamma_2(3, 2, 3, 1) = \\ &= \{\delta_1 \gamma_1 \beta^2 + \delta_2 \gamma_1 \alpha_1 + \delta_3 \gamma_1\}(3, 2, 2, 2) + \delta_3 \gamma_2 \beta(3, 3, 2, 1) = \delta(3, 2, 2, 2). \end{aligned}$$

Согласно c),

$$p_v^3 p_{[vu^3]} p_v^3 p_u p_v^2 = 0,$$

откуда

$$p_v^3 p_u p_v p_u p_v^3 p_u p_v^2 = \alpha_1(3, 2, 2, 2) = 0,$$

и тождество 1) доказано, так как $\alpha_1 \neq 0$.

Пусть теперь $p_b^3 = 0$. Тогда из (1.5):

$$\begin{Bmatrix} p_u & p_b \\ 1 & 3 \end{Bmatrix} = p_b p_u p_b^2 + p_b^2 p_u p_b = 0$$

и (1.8) получаем:

$$p_b p_u p_b^2 = p_b^2 p_u p_b = 0.$$

В частности,

$$p_b p_{[bu^3]} p_b^2 = p_b^2 p_u p_b^2 = 0,$$

что вместе с тождеством (1.9) и дает нужное нам соотношение.

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 5. Кольцо Ли с условием $E_{4,p}$ локально нильпотентно.

Доказательство. Если предположить, что утверждение теоремы неверно, то вместе с \mathfrak{L} локально регулярным будет и кольцо $T = \mathfrak{L}/N(\mathfrak{L})$. $[u_0 v_0^3] \neq 0$ для некоторых пар элементов $u_0, v_0 \in T$, так как в противном случае T было бы локально регулярным кольцом Ли с условием $E_{3,p}$, что, по лемме 2, невозможно. Докажем, что в T найдется элемент $c \neq 0$ такой, что $p_c^2 = 0$. Действительно, если $b = [u_0 v_0^3] \neq 0$, то либо

$p_b^2 = 0$, и тогда все доказано, либо $p_b^2 \neq 0$, что означает существование такого элемента w_0 , что $c = [w_0 b^2] \neq 0$.

Из леммы 3 следует, что $p_b^2 = 0$, а элемент c является искомым.

$[c^u c] = 0$ при любом $u \in T$ и $\alpha \leq 3$. Для $\alpha = 1, 2$ это следует из определения элемента c , а для $\alpha = 3$ — из тождества

$$c \begin{Bmatrix} p_u & p_c \\ 3 & 1 \end{Bmatrix} = [cu^3 c] + [cu^2 cu] + [cucu^2] = 0.$$

Рассмотрим идеал \mathfrak{N} кольца T , порожденный элементом c .

Любое правонормированное произведение $u = [cu_i u_i c \dots]$ из \mathfrak{N}^2 можно записать с помощью тождества (1.4) в виде суммы элементов вида $[cu^s c \dots]$, которые, по доказанному, равны нулю.

Итак, \mathfrak{N} — ненулевой ($c \neq 0$) нильпотентный ($\mathfrak{N}^2 = 0$) идеал кольца T , что противоречит условию $N(T) = 0$.

Теорема доказана.

При доказательстве теоремы 5, кроме общих, использованы и весьма специальные соображения, техника обобщения которых на случай кольца Ли \mathfrak{L} , удовлетворяющего n -му условию Энгеля, где n — любое, кажется пока неясной. Основное затруднение, естественно, возникает при нахождении удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям элементов, при помощи которых в кольце Ли можно было бы строить локально нильпотентные идеалы. Несколько более простую ситуацию следует ожидать, по-видимому, в кольцах Ли с условием $E_{n,p}$, если на характеристику их наложить ограничения, заведомо исключающие случай $n = p - 1$.

ЛЕММА 4. Пусть \mathfrak{L} — кольцо Ли с условием $E_{n,p}$, $n = 5, 6$ (в последнем случае $p \neq 7$). Тогда $p_{[uv^{n-1}]}^2 = 0$ для всех $u, v \in \mathfrak{L}$.

Доказательство. 1) $n = 5$, $p > 5$. Из основных тождеств (1.5) и (1.6) находим:

$$\begin{aligned} (0, 4) &= \beta_1(2, 2) + \beta_2(3, 1) + \beta_3(4, 0), \\ (1, 3) &= \gamma_1(2, 2) + \gamma_2(3, 1) + \gamma_3(4, 0), \quad 3\gamma_1 \equiv 1 \pmod{p} \end{aligned} \quad \text{а)}$$

(здесь снова $p_v^{\varepsilon_1} p_u p_v^{\varepsilon_2} \dots p_u p_v^{\varepsilon_n} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$, $n \geq 2$), откуда:

$$(2, 4) = \beta_1(4, 2), \quad (3, 3) = \gamma_1(4, 2), \quad (3, 4) = (4, 3) = 0. \quad \text{б)}$$

Используя полученные тождества, будем иметь:

$$\begin{aligned} p_{[uv^4]} &= [p_u p_v^4] = \delta_1(2, 2) + \delta_2(3, 1) + \delta_3(4, 0), \\ p_{[uv^4]}^2 &= \delta_1^2(2, 4, 2) + \delta_1 \delta_2(3, 3, 2) + \delta_1 \delta_3(4, 2, 2) = \\ &= \{\delta_1^2 \beta_1 + \delta_1 \delta_2 \gamma_1 + \delta_1 \delta_3\}(4, 2, 2). \end{aligned}$$

Но из (1.5), а) и б) следует:

$$p_v^4 \begin{Bmatrix} p_u & p_v \\ 2 & 3 \end{Bmatrix} p_v = (4, 0, 4) + (4, 1, 3) + (4, 2, 2) = (4, 0, 4) + (\gamma_1 + 1)(4, 2, 2) = 0,$$

$$p_v^4 p_{[uv^4]} p_v^3 = (4, 0, 4) - 2(4, 1, 3) = (4, 0, 4) - 2\gamma_1(4, 2, 2) = 0,$$

$$(4, 2, 2) = 0 \text{ и } p_{[uv^4]}^2 = 0,$$

2) $n = 6$, $p > 7$. Из линейной системы:

$$p_v^2 \begin{Bmatrix} P_u & P_v \\ 1 & 5 \end{Bmatrix} = (2, 5) + (3, 4) + (4, 3) + (5, 2) = 0,$$

$$p_v^2 \begin{Bmatrix} P_u & P_v \\ 1 & 5 \end{Bmatrix} = \alpha_1 (2, 5) + \alpha_2 (3, 4) + \alpha_3 (4, 3) + \alpha_4 (5, 2) = 0,$$

$$p_v \begin{Bmatrix} P_u & P_v \\ 1 & 5 \end{Bmatrix} p_v = \alpha_2 (2, 5) + \alpha_3 (3, 4) + \alpha_4 (4, 3) + \alpha_5 (5, 2) = 0,$$

$$\begin{Bmatrix} P_u & P_v \\ 1 & 5 \end{Bmatrix} p_v^2 = \alpha_3 (2, 5) + \alpha_4 (3, 4) + \alpha_5 (4, 3) + \alpha_6 (5, 2) = 0,$$

$$\alpha_i = (-1)^i \binom{6}{i},$$

определитель которой $\Delta = -2^2 \cdot 3 \cdot 7^3 \neq 0$, следует, что

$$(2, 5) = (3, 4) = (4, 3) = (5, 2) = 0,$$

а это вместе с выражением

$$p_{[uv^5]} = \lambda_1 (2, 3) + \dots + \lambda_4 (5, 0)$$

и приводит к тождеству

$$p_{[uv^5]}^2 = 0.$$

Лемма доказана.

Кроме уже рассмотренных в лемме 4 случаев, тождество

$$p_{[uv^{n-1}]}^2 = 0$$

доказано также для $n = 7, 8$ и, по-видимому, оно верно для u, v из произвольного кольца Ли с условием $E_{n,p}$, $p > n + 1$. Не останавливаясь на возможных подходах к решению этой задачи, дадим короткое доказательство следующей общей теоремы, значение которой тесно связано с указанным тождеством.

ТЕОРЕМА 6. Пусть \mathfrak{L} — произвольное кольцо Ли с условием $E_{n,p}$ такое, что $p_{[uv^{n-1}]}^2 = 0$ для всех $u, v \in \mathfrak{L}$, и пусть доказано, что любое кольцо Ли \mathfrak{M} с условием $E_{n,p}$, порожденное образующими x_1, \dots, x_q , q — любое, $p_{x_i}^2 = 0$, нильпотентно. Тогда из локальной нильпотентности произвольного кольца Ли с условием $E_{n-1,p}$ следует локальная нильпотентность \mathfrak{L} .

Доказательство. Если предположить, что \mathfrak{L} — локально регулярное кольцо, то идеал \mathfrak{N} кольца $T = \mathfrak{L} / N(\mathfrak{L})$, порожденный всеми элементами вида $[ab^{n-1}]$, $a, b \in T$, будет отличен от нуля, так как в противном случае T было бы локально регулярным кольцом с условием $E_{n-1,p}$, что невозможно. Так как, далее, $N(T) = 0$, то \mathfrak{N} — локально регулярный идеал. Следовательно, найдется конечное число элементов $u'_1, \dots, u'_s \in \mathfrak{N}$, порождающих регулярное кольцо U . Но любой элемент u'_i из \mathfrak{N} имеет вид:

$$u'_i = \sum_j \alpha_{ij} [u_{ij} v_{ij}^{n-1}],$$

поскольку

$$\begin{aligned} [uv^{n-1}w] &= [uv^{n-2}[vw]] + [uv^{n-2}[vw]v] + \dots + \\ &+ [u[vw]v^{n-2}] + [uvw^{n-1}] = [uvw^{n-1}] + u \left\{ \begin{matrix} p_v & p_{[vw]} \\ n-2 & 1 \end{matrix} \right\}, \end{aligned}$$

а выражение в фигурных скобках, ввиду тождества (1.2), представимо в виде суммы $(n-1)$ -х степеней элементов p_z , $z \in T$. Таким образом,

$$U \subset \mathfrak{M} = \{x_1, \dots, x_q\}, \quad x_i = [u_i v_i^{n-1}], \quad p_{x_i}^2 = 0,$$

т. е. \mathfrak{M} — регулярное кольцо, что противоречит условию теоремы.

Теорема доказана.

Доказанная теорема и тождества, аналогичные тем, которые были получены в лемме 4, позволяют нам при решении вопроса о локальной нильпотентности произвольного кольца Ли с условием $E_{n,p}$ (и некоторыми дополнительными ограничениями на характеристику) сделать редукцию к более простому кольцу Ли \mathfrak{M} , обладающему рядом особенностей. Согласно тождеству (1.11), $p_u p_v p_u = 0$ при любом p_v и $p_u^2 = 0$. Отсюда следует, что

$$p_{[uv]}^2 = -p_u p_v^2 p_u, \quad p_{[uv]}^3 = 0.$$

Если также и $p_v^2 = 0$, то $p_{[uv]}^2 = 0$. Поскольку $p_{x_i}^2 = 0$, а элементы из \mathfrak{M} записываются в виде суммы правонормированных произведений относительно x_1, \dots, x_q , ясно, что любой элемент $a \in \mathfrak{M}$ может быть представлен в виде линейной комбинации $a = \sum_i \alpha_i a_i$ элементов a_i таких, что $p_{a_i}^2 = 0$.

ТЕОРЕМА 7. *Кольца Ли с условием $E_{5,p}$ и $E_{6,p}$ ($p \neq 7$) локально нильпотентны.*

Доказательство. В силу леммы 4 и теоремы 6, достаточно доказать нильпотентность любого кольца Ли $\mathfrak{M} = \{x_1, \dots, x_q\}$ с тождественным соотношением $p_u^n = 0$ ($n = 5, 6$) и равенствами $p_{x_i}^2 = 0$, $i = 1, \dots, q$. С самого начала можно предполагать, что $N(\mathfrak{M}) = 0$. Доказывать будем индукцией по q . Элементы из \mathfrak{M} , как и раньше, обозначим буквами a , b и т. д., причем если

$$p_{a_1} p_{a_2} \dots p_{a_{k-1}} p_{a_k} = a,$$

то

$$p_{a_k} p_{a_{k-1}} \dots p_{a_2} p_{a_1} = \bar{a}.$$

Допустим, что \mathfrak{M} — регулярное кольцо, в то время как $\mathfrak{N} = \{x_1, \dots, x_{q-1}\}$ — нильпотентное кольцо класса σ . Выберем в \mathfrak{N} некоторый центральный элемент c , например, одно из правонормированных произведений $[x_i \dots x_{i_{\sigma-1}}] \neq 0$ степени $\sigma - 1$. Тогда, согласно сделанному выше замечанию, $p_c^2 = 0$ и $p_c p_a p_c = 0$ при любом $a \in \mathfrak{M}$. Из $[cu] = 0$, $u \in \mathfrak{N}$ следует, что $p_{[cu]} = 0$ или $p_c p_u = p_u p_c$. Рассмотрим идеал \mathfrak{E} кольца \mathfrak{M} , порожденный элементом c , и покажем, что \mathfrak{E} — нильпотентный идеал. Из получающегося противоречия ($N(\mathfrak{M}) = 0$) и будет вытекать утверждение теоремы. Используя тождество (1.4) и равенство $p_c p_u = p_u p_c$, $u \in \mathfrak{N}$,

любой элемент из \mathfrak{E}^2 можно записать в виде суммы произведений

$$ap_c p_{x_q} p_{u_1}^{\alpha_1} p_{x_q} p_{u_2}^{\alpha_2} p_{x_q} \dots p_{x_q} p_{u_{r-1}}^{\alpha_{r-1}} p_{x_q} p_c \dots,$$

где $a \in \mathfrak{M}$, $u_i \in \mathfrak{N}$. Индукцией по числу r элементов p_{x_q} между двумя соседними p_c докажем, что произведение

$$a = p_c p_{x_q} p_{u_1}^{\alpha_1} \dots p_{x_q} p_{u_{r-1}}^{\alpha_{r-1}} p_{x_q} p_c$$

всегда равно нулю. Для $r = 1$ это очевидно: $p_c p_{x_q} p_c = 0$. Установим справедливость нашего утверждения при $r = m + 1$, предполагая его доказанным для всех меньших r . При фиксированном m снова будем проводить индукцию, теперь уже относительно суммы

$$\bar{\alpha} = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$$

степеней, с которыми входят элементы p_{u_i} , $u_i \in \mathfrak{N}$, в рассматриваемое произведение. Ясно, что при $\bar{\alpha} = 0$

$$a = p_c p_{x_q}^{m+1} p_c = 0,$$

так как $p_{x_q}^2 = 0$. Из двух индуктивных предположений (по r и $\bar{\alpha}$) вытекает следующее равенство:

$$\begin{aligned} a &= p_c p_{x_q} p_{u_1}^{\alpha_1} p_{x_q} \dots p_{u_{m-1}}^{\alpha_{m-1}} p_{x_q} p_{u_m}^{\alpha_m} p_{x_q} p_c = \\ &= [p_c p_{x_q} p_{u_1}^{\alpha_1} \dots p_{x_q} p_{u_{m-1}}^{\alpha_{m-1}}] p_{x_q} p_{u_m}^{\alpha_m} p_{x_q} p_c, \end{aligned}$$

или

$$a = p_b p_{x_q} p_{u_m}^{\alpha_m} p_{x_q} p_c,$$

где

$$b = [c x_q u_1^{\alpha_1} \dots x_q u_{m-1}^{\alpha_{m-1}}] \in \mathfrak{M}.$$

Для проверки его достаточно воспользоваться замечанием, что при разложении $[p_c p_{x_q} \dots p_{u_{m-1}}^{\alpha_{m-1}}]$ в сумму ассоциативных произведений (напомним, что $[p_a p_b] = p_a p_b - p_b p_a$), достаточно одному из p_{u_i} или же p_{x_q} оказаться левее того p_c , которое входит в p_b , как соответствующий член будет равен нулю. Из проведенных рассуждений следует, что $\mathfrak{E}^2 = 0$, если будет установлено равенство:

$$a = p_b p_{x_q} p_{u_m}^{\alpha_m} p_{x_q} p_c = 0.$$

Рассмотрим отдельно два случая:

а) $n = 5$, $p > 5$.

1) $\alpha = 1$. Тогда $a = p_b p_{x_q} p_u p_{x_q} p_c = 0$, так как $p_{x_q} p_u p_{x_q} = 0$.

2) $\alpha = 2$. Из тождества (1.5) находим:

$$\begin{Bmatrix} p_b & p_{x_q} & p_u \\ 1 & 2 & 2 \end{Bmatrix} p_c = 0,$$

что вместе с 1) и всем ранее сказанным дает:

$$a = p_b p_{x_q} p_u^2 p_{x_q} p_c = 0.$$

3) $\alpha = 3$. Снова из $p_b p_{x_q} \begin{Bmatrix} p_u & p_{x_q} & p_c \\ 3 & 1 & 1 \end{Bmatrix} = 0$ следует $a = 0$.

$$4) \alpha = 4; \quad p_b p_{x_q} \begin{Bmatrix} p_u & p_{x_q} \\ 4 & 1 \end{Bmatrix} p_c = 0, \text{ или} \\ a = p_b p_{x_q} p_u^4 p_{x_q} p_c = 0.$$

Нильпотентность \mathfrak{M} (и \mathfrak{L}) при $n = 5$ и $p > 5$ доказана.

б) $n = 6, \quad p > 7$. Доказательство равенства $a = 0$ при $\alpha = 1, 4$ и 5 проводится совершенно так же, как и в случае а). Отдельного рассмотрения заслуживают лишь значения $\alpha = 2$ и 3 . Здесь нам понадобятся тождества (1.5) и (1.6).

1) При $\alpha = 2$ из соотношений

$$\begin{Bmatrix} p_b & p_{x_q} & p_u & p_c \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{Bmatrix} = 0 \text{ и } \overline{\begin{Bmatrix} p_b & p_{x_q} & p_u & p_c \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{Bmatrix}} = 0$$

следует: $a + \bar{a} = 0$ и $-6a + \bar{a} = 0$, т. е. $a = 0$, так как $p > 7$.

$$2) \alpha = 3, \quad a = p_b p_{x_q} p_u^3 p_{x_q} p_c.$$

Ввиду второго индуктивного предположения,

$$b = p_b p_u p_{x_q} p_u^2 p_{x_q} p_c = p_{[bu]} p_{x_q} p_u^2 p_{x_q} p_c.$$

Используя тождество (1.4), $[bu]$ можно записать в виде суммы элементов

$$b_i = [c x_q u_1^{x_1} \dots x_q v_i^{k_i}],$$

где $k_i \leq \alpha_{m-1} + 1$. Если β_i — сумма степеней элементов из \mathfrak{M} в $p_b p_{x_q} p_u^2 p_{x_q} p_c$, то $\beta_i \leq \alpha$. Поэтому с помощью уже рассмотренного случая 1) получаем, что $b = 0$. Но тогда и $a = 0$, так как

$$p_b \begin{Bmatrix} p_{x_q} & p_u & p_c \\ 2 & 3 & 1 \end{Bmatrix} = a + b = 0.$$

Теорема доказана.

§ 4. Кольцо Ли с условием $E_{6,7}$

Доказательство локальной нильпотентности произвольного кольца Ли с условием $E_{6,7}$, проводимое в этом параграфе, содержит в своей основе ту же идею, которая использовалась ранее, но в рассуждениях есть и различного рода усовершенствования, реализация которых достигается, правда, за счет преодоления значительных технических трудностей.

ЛЕММА 5. Пусть \mathfrak{L} — кольцо Ли с условием $E_{6,7}$. Тогда в $\mathfrak{A}_{\mathfrak{L}}$ имеют место следующие тождества:

- 1) $p_{[uv^2]}^4 = 0$ для любых элементов $u, v \in \mathfrak{L}$,
- 2) $p_{[ua^2]}^3 = 0$, если $p_a^4 = 0$,
- 3) $p_{[ub^4ub]}^2 = 0$, если $p_b^3 = 0$.

Доказательство. Все преобразования будем производить лишь при помощи тождества (1.5). Напомним, что областью операторов кольца является поле вычетов по mod 7.

1) Введем обозначение:

$$p_v^{\varepsilon_1} p_u p_v^{\varepsilon_2} \dots p_u p_v^{\varepsilon_n} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n), \quad n \geq 2.$$

Если

$$\begin{aligned} u_1 &= [p_u p_v p_u] = 2(0, 1, 0) - (0, 0, 1) - (1, 0, 0), \\ u_2 &= [p_u p_v^3 p_u] = 2(0, 3, 0) - 3(1, 2, 0) - 3(0, 2, 1) + \\ &\quad + 3(2, 1, 0) + 3(0, 1, 2) - (0, 0, 3) - (3, 0, 0), \end{aligned}$$

то из тождеств:

$$\begin{aligned} p_v^5 p_u \left\{ \begin{matrix} p_u p_v \\ 1 \quad 5 \end{matrix} \right\} &= (5, 1, 4) + (5, 4, 1) + (5, 2, 3) + (5, 3, 2) + (5, 0, 5) = 0, \\ -3 \left\{ \begin{matrix} p_u p_v \\ 1 \quad 5 \end{matrix} \right\} p_v^4 &= (5, 1, 4) + (5, 4, 1) - (4, 2, 4) - (4, 4, 2) - (4, 3, 3) - (5, 0, 5) = 0, \\ \left\{ \begin{matrix} p_{u_2} p_v \\ 1 \quad 5 \end{matrix} \right\} p_v^2 &= 3(5, 1, 4) + 3(5, 4, 1) - 2(5, 2, 3) - 2(5, 3, 2) + \\ &\quad + (4, 2, 4) + (4, 4, 2) - (4, 3, 3) - 3(3, 3, 4) - \\ &\quad - 3(3, 4, 3) - (2, 4, 4) - 2(5, 0, 5) = 0 \end{aligned}$$

находим:

$$\left. \begin{aligned} (4, 4, 2) &= -(4, 2, 4) - 3(4, 3, 3) - 3(3, 3, 4) - 3(3, 4, 3) - \\ &\quad - (2, 4, 4) - 2(5, 0, 5), \\ (5, 3, 2) &= -(5, 2, 3) + 2(4, 3, 3) + 3(3, 3, 4) + 3(3, 4, 3) + (2, 4, 4), \\ (5, 4, 1) &= -(5, 1, 4) - 2(4, 3, 3) - 3(3, 3, 4) - 3(3, 4, 3) - \\ &\quad - (2, 4, 4) - (5, 0, 5). \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} p_{[uv^5]} &= (0, 5) + 2(1, 4) + 3(2, 3) - 3(3, 2) - 2(4, 1) - (5, 0) = \\ &= (1, 4) + 2(2, 3) + 3(3, 2) - 3(4, 1) - 2(5, 0). \end{aligned}$$

Используем далее (4.1):

$$\begin{aligned} p_{[uv^5]}^2 &= (1, 5, 4) + 2(2, 4, 4) + 3(3, 3, 4) - 3(4, 2, 4) - 2(5, 1, 4) - \\ &\quad - 3(2, 5, 3) - (3, 4, 3) + (4, 3, 3) + 3(5, 2, 3) + 2(3, 5, 2) - \\ &\quad - 2(4, 4, 2) + (5, 3, 2) + 2(4, 5, 1) - (5, 4, 1) = \\ &= -(3, 3, 4) - (3, 4, 3) - (4, 3, 3) - 3(5, 0, 5). \end{aligned}$$

Наконец, получаем:

$$p_{[uv^5]}^4 = p_{[uv^5]}^2 p_{[uv^5]}^2 = 0.$$

2) Обозначим

$$p_a^{\varepsilon_1} p_u p_a^{\varepsilon_2} \dots p_u p_a^{\varepsilon_n} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n), \quad n \geq 2.$$

Умножая тождество (1.7) на p_a сначала слева, а затем справа, получим

$$\begin{aligned} 2(2, 3) - 3(3, 2) &= 0, \\ -3(2, 3) + 2(3, 2) &= 0, \end{aligned}$$

или

$$(2, 3) = (3, 2) = 0.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} p_{[ua^3]} &= (0, 3) - 3(1, 2) + 3(2, 1) - (3, 0), \\ p_{[ua^3]}^2 &= 3(2, 1, 3) - (3, 0, 3) - 2(2, 2, 2) + 3(3, 1, 2), \\ p_{[ua^3]}^3 &= p_{[ua^3]} p_{[ua^3]}^2 = 0. \end{aligned}$$

3) Пусть

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = p_b^{\varepsilon_1} p_u p_b^{\varepsilon_2} \dots p_u p_b^{\varepsilon_n}, \quad n \geq 2.$$

Из тождеств (1.8) и $\left\{ \begin{smallmatrix} p_u & p_b \\ 2 & 4 \end{smallmatrix} \right\} = 0$ имеем:

$$(1, 1, 2) = 2(2, 0, 2). \quad (4.2)$$

Обозначим

$$a_1 = (2, 0, 2, 0, 2).$$

Умножая (4.2) слева и справа на различные степени p_u и p_b , получим:

$$a_2 = (1, 1, 2, 0, 2) = 2a_1 = \bar{a}_2 = (2, 0, 2, 1, 1),$$

$$a_3 = (2, 1, 1, 1, 1) = -3a_1 = \bar{a}_3 = (1, 1, 1, 1, 2),$$

$$a_4 = (1, 2, 0, 2, 1) = 2a_1.$$

Обратим внимание на то обстоятельство, что произведения

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, 0), \quad (0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4), \quad \sum \alpha_i = 6,$$

и

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 0, 1), \quad (1, 0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad \sum \alpha_i = 5,$$

равны нулю.

Рассмотрим тождество

$$\left\{ \begin{smallmatrix} p_w p_u p_b \\ 1 & 2 & 3 \end{smallmatrix} \right\} = a + \bar{a} = 0, \quad (4.3)$$

где

$$p_w = p_{[ub^2ub]} = - (2, 0, 1) - (1, 0, 2) - 2(0, 1, 2) - 2(2, 1, 0) - 3(1, 1, 1),$$

$$a = p_w p_b p_u p_b p_u p_b + p_w p_b^2 p_u^2 p_b^3 + 2p_w p_u p_b^2 p_u p_b + p_b p_w p_u p_b p_u p_b +$$

$$+ p_b p_w p_u^2 p_b^2 + p_b p_u p_w p_u p_b^2 + p_b p_u p_w p_b p_u p_b,$$

$$\bar{a} = p_b p_u p_b p_u p_b p_w + \dots + p_b p_u p_b p_w p_u p_b.$$

Элемент a является линейной комбинацией элементов a_i и \bar{a}_i , и несложные вычисления показывают, что $a = -2a_1$. С другой стороны, $a = \bar{a}$, поскольку $\bar{p}_w = p_w$ и $\bar{a}_i = a_i$, $i = 1, 2, 3, 4$. Отсюда и из (4.3) следует, что $a_1 = 0$. Используя тождество (1.9), получаем нужное соотношение:

$$p_w^2 = p_{[ubub^2]}^2 = p_b^2 p_{[ubub]}^2 p_b^2 = a_1 = 0.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 6. При любых элементах u, v из кольца Ли \mathfrak{L} с условием $E_{6,7}$ выполняется соотношение

$$p_{[cu^2c]} p_v^2 p_{[cu^2c]} = 0 \quad (p_c^2 = 0).$$

Доказательство. Ввиду значительных вычислений будем для сокращения писать s, u, \dots вместо p_s, p_u, \dots . Возможные недоразумения при этом исключаются, так как все встречающиеся ниже элементы принадлежат кольцу $\mathfrak{D}_{\mathfrak{L}}$.

Пусть $M_{s,t}$ есть множество всех произведений вида $a_{s,t} = s \dots s \dots s \dots s$, где на местах, обозначенных точками, стоят s элементов u и t элементов v . Если все такие произведения равны нулю, то будем писать $M_{s,t} = 0$

Утверждение леммы является простым следствием равенств

$$M_{4,2} = M_{5,2} = M_{6,2} = 0,$$

для обоснования которых удобно рассматривать $M_{s,t}$ и при $t < 2$.

Доказывать будем последовательно, начиная с наименьших значений s и t . Из (1.11) видно, что $M_{s,t} = 0$, если $s + t < 6$.

1. $M_{6,0} = 0$, в силу (1.11) и (1.17).

2. $ci^2civci^2c = -civci^2ci^2c = 0$, в силу (1.16) и (1.17). Очевидно, $M_{5,1} = 0$.

В дальнейшем тождества (1.11), (1.12), (1.16) и (1.17) будут использоваться без ссылок.

$$3. civci^2ci^2vc = cv \left\{ \begin{smallmatrix} c & u \\ 2 & 4 \end{smallmatrix} \right\} vc = 0,$$

$$a_{4,2}^1 = ci^2civcivc = -civci^2ci^2vc = 0,$$

$$a_{4,2}^2 = ci^2cv^2ci^2c = -ci^2ci^2ci^2c - 4a_{4,2}^1 = 0$$

см. (1.18)]. Следовательно, $M_{4,2} = 0$.

$$4. c \left\{ \begin{smallmatrix} c & u \\ 1 & 5 \end{smallmatrix} \right\} c = ci^2ci^3c + ci^3ci^2c = 0.$$

Вместе с (1.20) это дает:

$$ci^2ci^3c = ci^3ci^2c = 0. \quad (4.4)$$

В частности, $ci^2ci^3ci^2c = 0$ и $M_{7,0} = 0$.

5. $a_{6,1}^1 = ci^2civci^3c = -civci^3ci^3c = 0$. Аналогично,

$$ci^3civci^2c = -ci^3ci^2civc = 0,$$

$$a_{6,1}^2 = ci^2ci^2vci^2c = \left\{ \begin{smallmatrix} c & u \\ 2 & 4 \end{smallmatrix} \right\} vci^2c = 0.$$

Также и $ci^2cvi^2ci^2c = 0$, а из (1.13) следует, что

$$ci^2civici^2c = -3a_{6,1}^2 - 3\bar{a}_{6,1}^2 = 0,$$

т. е. $M_{6,1} = 0$.

6. Так как $a_{4,2}^2 = ci^2(cv^2c)u^2c = 0$, то, согласно (1.24),

$$a_{5,2}^1 = ci^2cv^2uci^2c = ci^2civ^2ci^2c = ci^2cvi^2ci^2c.$$

Далее,

$$cv \left\{ \begin{smallmatrix} c & u \\ 2 & 4 \end{smallmatrix} \right\} [uv] c = civci^2ci^2[uv] c = 0,$$

что вместе с (1.13) дает:

$$a_{5,2}^2 = ci^2civci^2vc = ci^2civcvi^2c = ci^2civcivci^2c.$$

Принимая во внимание последние соотношения и равенство $a_{4,2}^1 = 0$, находим:

$$D_{v \rightarrow [uv]} a_{4,2}^1 = ci^2ci^2vcivc - ci^2civici^2vc = 0,$$

а отсюда, снова с помощью (1.13), получаем:

$$a_{5,2}^3 = ci^2ci^2vcivc = ci^2civici^2vc = ci^2cvi^2civci^2c.$$

Обозначим еще

$$a_{5,2}^4 = cu^2cv^2cu^3c.$$

Непосредственно проверяется (см. (4.4) и (1.19)) тождество:

$$\begin{aligned} b &= 2cu^2cuvu - 2cu^2cu^2vc - cu^2cvu^2c + ucu^2cuvu = \\ &= -2cv \left\{ \begin{smallmatrix} c & u \\ 2 & 4 \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} c & u \\ 2 & 4 \end{smallmatrix} \right\} vc - 3 \underset{u \rightarrow v}{D} cu^2cu^3c + 2c[cu^4v]c = 0, \end{aligned} \quad (4.5)$$

которое понадобится нам здесь и ниже, в пункте 7.

Далее,

$$buvu = 2a_{5,2}^2 - 3a_{5,2}^3 = 0,$$

$$cu^2cv \left\{ \begin{smallmatrix} c & u & v \\ 2 & 3 & 1 \end{smallmatrix} \right\} = 2a_{5,2}^1 + 3a_{5,2}^2 + 2a_{5,2}^3 + a_{5,2}^4 = 0,$$

$$cu^2cu \left\{ \begin{smallmatrix} c & u & v \\ 2 & 2 & 2 \end{smallmatrix} \right\} = a_{5,2}^1 + 3a_{5,2}^2 - 3a_{5,2}^3 = 0.$$

Наконец,

$$\underset{u \rightarrow v}{D} a_{6,1}^1 = 3a_{5,2}^2 + a_{5,2}^4 + 2cuvuvu^3c = 0,$$

а так как $2cuvuvu^3c = 3a_{5,2}^4$ [см. (1.18)], то

$$a_{5,2}^2 - a_{5,2}^4 = 0.$$

Из последних четырех тождеств находим:

$$a_{5,2}^i = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Иначе говоря, любое произведение вида $cu^2c \dots c$ из $M_{5,2}$ равно нулю. Аналогично доказывается равенство нулю и произведений вида $c \dots cu^2c$. Отсюда непосредственно следует, что $M_{5,2} = 0$.

7. Для завершения доказательства леммы нужно установить еще равенство $M_{6,2} = 0$.

Из тождеств

$$a_{4,2}^2 = cu^2(cv^2c)u^2c = 0 \text{ и } a_{5,2}^1 = cu^2(cv^2uc)u^2c = 0$$

мы, согласно (1.25), получим:

$$\begin{aligned} cu^2cu^2v^2cu^2c &= cu^2cv^2u^2cu^2c = cu^2cuv^2uciu^2c = \\ &= cu^2cvu^2vcu^3c = cu^2cuvuvu^2c = cu^2cvuvu^2cu^2c. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Точно так же из соотношений $a_{5,2}^4 = cu^2(cv^2c)u^3c = 0$ и (1.24) находим:

$$cu^2cv^2uciu^3c = cu^2cvuvu^3c = cu^2cuv^2cu^3c. \quad (4.7)$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} a_1 &= cu^3cvu^2cvu^2c, & a_2 &= cu^2cvu^2cu^2vc, & a_3 &= cu^2cu^2vcvu^2c, \\ a_4 &= cu^2cu^3vcu^2vc, & a_5 &= cu^2cu^3vcuvc, & a_6 &= cu^2cu^2vcuvc, \\ a_7 &= cu^2cuvu^2cuvuvc, & a_8 &= cu^2cuvu^3vc, & a_9 &= cu^2cuvu^2vcuvc, \\ a_{10} &= cu^2cuvu^2cvu^2c, & a_{11} &= cu^2cu^2v^2cu^2c, & a_{12} &= cu^2cv^2cu^4c, \\ a_{13} &= cu^2cv^2uciu^3c, & a_{14} &= cu^2cu^4cv^2c. \end{aligned}$$

Выражения

$$\left. \begin{aligned} cu^2cuvuvcu^2c &= -3a_1 - 3a_3, \\ cu^2cuvuvcu^2vc &= -3a_2 - 3a_4, \\ cu^2cuvuvcuvc &= 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4, \\ cu^2cu^2vcuvc &= -3a_3 - 3a_4, \\ cu^2cvu^2cuvuvc &= -3a_1 - 3a_2, \\ cu^2cvu^3cuvuvc &= a_5 - 3a_6 + 3a_7, \\ cu^2cuvuvcu^3c &= a_8 - 3a_9 + 3a_{10} \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

являются следствиями соотношений (1.13) и (1.14).

Теперь при помощи тождеств (1.5), (4.5) — (4.8) и установленных уже равенств $M_{4,2} = 0$ и $M_{5,2} = 0$ получаем следующую линейную систему:

$$bvu^2c = -a_1 - 2a_3 + 2a_{10} = 0,$$

$$bu^2vc = -a_2 - 2a_4 + 2a_8 = 0,$$

$$-3 \underset{2v \rightarrow [uv]}{D} cu^2civcivc = a_1 - a_2 - a_3 + a_4 = 0,$$

$$\underset{v \rightarrow [vu^2]}{D} cu^2civcivc = a_5 - 2a_6 + a_7 + a_8 - 2a_9 + a_{10} = 0,$$

$$\underset{v \rightarrow [uv]}{D} cu^2civciv^2c = 3a_2 - 3a_4 + a_8 - a_9 = 0,$$

$$\underset{v \rightarrow [uv]}{D} cu^2civcivcivc = -2a_1 - 2a_2 + 2a_3 + 2a_4 + a_9 - a_{10} = 0,$$

$$\underset{v \rightarrow [uv]}{D} cu^2civcivcivc = -2a_1 + 2a_2 - 2a_3 + 2a_4 + a_6 - a_7 = 0,$$

$$cu^2cv^2 \left\{ \begin{smallmatrix} c & u \\ 2 & 4 \end{smallmatrix} \right\} = a_{11} + a_{12} + a_{13} = 0,$$

$$cu^2c \left\{ \begin{smallmatrix} c & u & v \\ 1 & 4 & 1 \end{smallmatrix} \right\} vc = -2a_2 - 2a_4 + 2a_5 - 2a_6 - 3a_7 + 2a_8 + a_{14} = 0,$$

$$cu^2cu^2 \left\{ \begin{smallmatrix} c & u & v \\ 2 & 2 & 2 \end{smallmatrix} \right\} = -2a_3 - 2a_4 + 2a_5 + 2a_6 + a_{11} + a_{14} = 0,$$

$$cu^2civ \left\{ \begin{smallmatrix} c & u & v \\ 2 & 3 & 1 \end{smallmatrix} \right\} = -a_1 - a_2 - a_3 - a_4 + 2a_7 + 2a_8 - 2a_9 - 3a_{10} + 2a_{11} + a_{13} = 0,$$

$$cu^2cvi \left\{ \begin{smallmatrix} c & u & v \\ 2 & 3 & 1 \end{smallmatrix} \right\} = -2a_1 - 2a_2 + 2a_5 + a_6 - a_7 + 2a_8 - 2a_9 - 3a_{10} + 2a_{11} + a_{13} = 0,$$

$$cu^2c \left\{ \begin{smallmatrix} [cv^2] & u & c \\ 1 & 4 & 1 \end{smallmatrix} \right\} = -2a_3 - 2a_5 - 2a_8 - a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + 2a_{14} = 0,$$

$$cu^2c \left\{ \begin{smallmatrix} c & u & v \\ 1 & 3 & 2 \end{smallmatrix} \right\} uc = -3a_1 - a_2 - 3a_3 - a_4 + 2a_5 - 2a_6 - 3a_7 + \\ + 2a_8 + 3a_9 + a_{10} - a_{11} + a_{12} + 3a_{13} = 0.$$

Определитель системы $\Delta \not\equiv 0 \pmod{7}$, поэтому все $a_i = 0$. Ввиду симметрии всех соотношений, и $a_i = 0$, $i = 1, \dots, 14$.

Таким образом, любое произведение вида $cu^2c \dots c$ или $c \dots cu^2c$ из $M_{6,2}$ равно нулю.

Далее, без труда получаем:

$$cu^2cv^2cu^3c = cu^3 \left(\underset{2u \rightarrow v}{D} cu^2cu^3c \right) - 2 \left\{ \begin{smallmatrix} c & u \\ 2 & 4 \end{smallmatrix} \right\} vc \left\{ \begin{smallmatrix} u & v \\ 2 & 1 \end{smallmatrix} \right\} c = 0.$$

Оставшуюся часть рассуждений, необходимых для доказательства равенства $M_{6,2} = 0$, можно опустить, поскольку интересующий нас элемент $\{cu^3c\}v^2\{cu^3c\}$ записывается в виде комбинации произведений рассмотренных типов.

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 8. Любое кольцо Ли \mathfrak{L} с условием $E_{6,7}$ локально нильпотентно.

Доказательство. Предполагая утверждение неверным, мы замечаем, что из локальной нильпотентности всякого кольца Ли с условием $E_{5,7}$ (теорема 7) и из тождеств 1) и 2) леммы 5 следует существование в локально регулярном кольце $T = \mathfrak{L} / N(\mathfrak{L})$ такого элемента $b \neq 0$, что $p_b^3 = 0$.

Если $c = [ub^2ub] \neq 0$ для некоторого элемента $u \in T$, что $p_c^2 = 0$, как это показывает тождество 3) той же леммы 5. Если же $[ub^2ub] = 0$ тождественно при всех $u \in T$, то

$$p_b p_u p_b^2 = p_b^2 p_u p_b = 0$$

[см. тождество (1.10)]. Полагая тогда $c = [u_0 b^2] \neq 0$, с помощью тождества (1.9) находим, что

$$p_c^2 = p_b^2 p_{u_0}^2 p_b^2 = p_b p_{[bu_0^2]} p_b^2 = 0.$$

Итак, в кольце T всегда существует такой элемент $c \neq 0$, что $p_c^2 = 0$.

Пусть $c' = [cu^3c] \neq 0$ при некотором $u \in T$. Тогда, во-первых, $p_{c'}^2 = 0$ [см. тождество (1.22)], а во-вторых,

$$[c'v^3c'] = -[vc'v^3c'] = -vp_{c'} p_v^2 p_{c'} = -vp_{[cu^3c]} p_v^2 p_{[cu^3c]} = 0$$

тождественно относительно v , как это следует из леммы 6. Можно считать поэтому, что уже первоначальный элемент c нормирован таким образом, т. е. что

$$c \neq 0, \quad p_c^2 = 0, \quad [cu^3c] = 0 \text{ для всех } u \in T. \quad (4.9)$$

Пусть \mathfrak{N} — идеал кольца T , порожденный элементом c . Из условий (4.9) вытекает, что также

$$[cu^4c] = 2[cu^3cu] - [cucu^3] = 0.$$

Далее,

$$[cu^5c] = cp_u^5 p_c = c \begin{Bmatrix} p_u & p_c \\ 5 & 1 \end{Bmatrix} = 0.$$

Таким образом, $[cu^{\alpha}c] = 0$ при любом натуральном α и $u \in T$. Отсюда и из тождества (1.4) следует, вопреки условию $N(T) \neq 0$, коммутативность идеала $\mathfrak{N} \subset T$.

Теорема доказана.

§ 5. Заключение

Частные результаты предыдущих двух параграфов служат доводом в пользу целесообразности рассмотрения следующей общей схемы возможного доказательства локальной нильпотентности кольца Ли \mathfrak{L} с условием $E_{n,p}$, n — любое. Пусть в кольце $T_k = \mathfrak{L} / N(\mathfrak{L})$, которое мы предполагаем локально регулярным, доказано существование элемента $c_k \neq 0$, $1 \leq k < \left[\frac{n-1}{2} \right]$, такого, что в \mathfrak{M}_T выполняются тождественные относительно v соотношения:

$$p_{c_k} p_v^{\alpha} p_{c_k} = 0, \quad \alpha = 0, 1, \dots, 2k-2, 2k-1. \quad (5.1)$$

Покажем, что те же тождества имеют место, если c_k заменить на произведение

$$a = [c_k u^{2k+1} c_k]$$

с произвольным элементом u из T .

В самом деле, из (5.1) следует прежде всего, что

$$p_{c_k} p_{u_1} p_{u_2} \dots p_{u_{\alpha+1}} p_{c_k} = p_{c_k} p_{u_{i_1}} p_{u_{i_2}} \dots p_{u_{i_{\alpha+1}}} p_{c_k}, \quad \alpha \leq 2k-1, \quad (5.2)$$

где $i_1, i_2, \dots, i_{\alpha+1}$ — любая перестановка индексов $1, 2, \dots, \alpha+1$. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что второе слагаемое в правой части равенства:

$$\begin{aligned} & p_{c_k} p_{u_1} \dots p_{u_i} p_{u_{i+1}} \dots p_{u_{\alpha+1}} p_{c_k} = \\ & = p_{c_k} p_{u_1} \dots p_{u_{i+1}} p_{u_i} \dots p_{u_{\alpha+1}} p_{c_k} + p_{c_k} p_{u_1} \dots p_{[u_i u_{i+1}]} \dots p_{u_{\alpha+1}} p_{c_k} \end{aligned}$$

может быть записано с помощью тождества (1.4) в виде суммы

$$\sum_{v_i} p_{c_k} p_{v_i}^{\alpha_i} p_{c_k}, \quad \alpha_i \leq \alpha,$$

равной, по условию, нулю. Далее, согласно (5.1),

$$\begin{aligned} p_a &= [p_{c_k} p_u^{2k+1} p_{c_k}] = [p_{c_k} p_u^{2k+1}] p_{c_k} - p_{c_k} [p_{c_k} p_u^{2k+1}] = \\ &= 2 p_{c_k} p_u^{2k+1} p_{c_k} - (2k+1) p_u p_{c_k} p_u^{2k} p_{c_k} - (2k+1) p_{c_k} p_u^{2k} p_{c_k} p_u. \end{aligned}$$

Поэтому $p_a p_v^{\alpha} p_a = 0$ при $\alpha < 2k-2$. Учитывая же (5.2), получим:

$$\begin{aligned} p_a p_v^{2k-2} p_a &= - p_{c_k} p_{[c_k u^{2k+1}]} p_v^{2k-2} p_{[c_k u^{2k+1}]} p_{c_k} = \\ &= - p_{c_k} p_{[c_k u^{2k+1}]}^2 p_v^{2k-2} p_{c_k} = k(2k+1)^2 p_{c_k} p_u^{2k} p_{c_k} p_u^{2k} p_{c_k} p_v^{2k-2} p_{c_k}. \end{aligned}$$

Но

$$p_{c_k} p_u^{2k} p_{c_k} p_u^{2k} p_{c_k} = 0,$$

что является следствием тождеств:

$$p_{c_k} p_{[c_k u^{4k}]} p_{c_k} = \binom{4k}{2k} p_{c_k} p_u^{2k} p_{c_k} p_u^{2k} p_{c_k} = 0, \quad 4k < p,$$

и

$$p_{c_k} p_u^{2k} p_{c_k} p_u^{2k} p_{c_k} = p_{c_k} p_u^{4k-(n-1)} \begin{Bmatrix} p_{c_k} & p_u \\ 1 & n-1 \end{Bmatrix} p_{c_k} = 0, \quad 4k > p > n.$$

Таким образом, $p_a p_v^{\alpha} p_a = 0$ для $\alpha \leq 2k-2$. В частности,

$$[a v^{2k-1} a] = - v p_a p_v^{2k-2} p_a = 0,$$

а соответствующее тождество в \mathcal{U}_T :

$$p_{[a v^{2k-1} a]} = [p_a p_v^{2k-1} p_a] = 2 p_a p_v^{2k-1} p_a = 0$$

завершает доказательство утверждения. Далее, легко видеть, что системы тождеств:

$$[a v^{2k+1} a] = 0, \quad p_a p_v^{\alpha} p_a = 0, \quad \alpha = 0, 1, \dots, 2k-2, 2k-1,$$

с одной стороны, и

$$p_a p_v^{\alpha} p_a = 0, \quad \alpha = 0, 1, \dots, 2k, 2k+1,$$

с другой стороны, эквивалентны. Это следует из соотношений:

$$[p_a p_v^{2k+1} p_a] = 0 \text{ и } \underset{v \rightarrow w}{D} [av^{2k+1}a] = -(2k+1)[wav^{2k}a] = 0.$$

Поэтому если бы было установлено, что ни при каком выборе $u_1, u_2, \dots, u_s, \dots$ из T последовательность не равных нулю элементов

$$a_0 = c_k, \quad a_1 = [a_0 u_1^{2k+1} a_0], \dots, \quad a_s = [a_{s-1} u_s^{2k+1} a_{s-1}], \dots \quad (5.3)$$

(каждый из которых, по доказанному, сохраняет свойства c_k) не может иметь длины $> s_0 + 1$ (т. е. $a_{s_0+1} = 0$ при любом $u_{s_0} \in T$), то тем самым был бы найден элемент $c_{k+1} = a_{s_0} \neq 0$:

$$p_{c_{k+1}} p_v^\alpha p_{c_{k+1}} = 0 \text{ для } \alpha = 0, 1, \dots, 2k, 2k+1.$$

А определение элемента c_k с возможно большим номером k решает в конечном счете основную задачу: идеал $\mathfrak{N} = \{c_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}\} \subset T$ будет, очевидно, коммутативным, в противоречие с предположением о локальной регулярности T и условием $N(T) = 0$.

Указанный процесс ничего не говорит о способе нахождения элемента c_1 . Существование c_1 в кольцах Ли с условием $E_{n,p}$, $n = 4, 5, 6$, было доказано в леммах 3, 4 и 5.

Рассмотрим в качестве примера еще кольцо Ли \mathfrak{L} с условием $E_{7,p}$, хотя для ослабленной проблемы Бернсайда этот случай ничего нового и не даст. Так же, как в лемме 4, показывается, что $p_{[uv]}^2 = 0$ при любых $u, v \in \mathfrak{L}$, откуда следует существование c_1 в T . Путем непосредственных выкладок, столь же длинных, как в доказательстве леммы 6, находится элемент c_2 . Существование c_3 доказывается уже гораздо легче. Обозначив для простоты c_2 через c , из тождеств:

$$\left\{ \begin{matrix} p_c p_u \\ 2 \ 5 \end{matrix} \right\} = p_c p_u^5 p_c + p_c p_u^4 p_c p_u + p_u p_c p_u^4 p_c = 0,$$

$$\left\{ \overline{\begin{matrix} p_c p_u \\ 2 \ 5 \end{matrix}} \right\} = -8 p_c p_u^5 p_c + 20 p_u p_c p_u^4 p_c = 0$$

находим:

$$p_u p_c p_u p_c = \alpha_1 p_c p_u^5 p_c, \quad p_c p_u^4 p_c p_u = \alpha_2 p_c p_u^5 p_c,$$

$$[p_c p_u^5 p_c] = \alpha_3 p_c p_u^5 p_c.$$

Третьим членом последовательности (5.3) является

$$a_2 = -v [p_c p_u^5 p_c] p_v^4 [p_c p_u^5 p_c] = -\alpha_3^2 \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 v p_u p_c p_u^4 p_c p_v^4 p_c p_u^4 p_c p_u,$$

где $\bar{\alpha}_i \alpha_i \equiv 1 \pmod{p}$.

Докажем, что

$$\alpha = p_c p_u^4 p_c p_v^4 p_c p_u^4 p_c = 0.$$

Действительно, воспользовавшись тождеством (5.2), получим:

$$\left\{ \begin{matrix} p_v p_c p_u \\ 1 \ 2 \ 4 \end{matrix} \right\} = p_v p_c p_u^4 p_c + 4 p_u p_c p_u^3 p_v p_c + \dots = 0;$$

точками обозначены произведения, крайним слева множителем в которых является p_c . Поэтому

$$\begin{aligned} \alpha &= p_c p_u^4 p_c p_v^3 (p_v p_c p_u^4 p_c) = -4 p_c p_u^4 p_c p_v^3 p_u p_c p_u^3 p_v p_c = \\ &= -4 p_c p_u^4 p_c p_u p_v^3 p_c p_u^3 p_v p_c = -4 \alpha_2 p_c p_u^5 p_c p_v^3 p_c p_u^3 p_v p_c = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $a_2 = 0$, и мы можем положить

$$c_3 = a_1 = [c_2 u_1^5 c_2]$$

при некотором фиксированном u_1 из T . Локальная нильпотентность кольца Ли с условием $E_{7,p}$ доказана.

Поступило
14. VII. 1956

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Кострикин А. И., О кольцах Ли, удовлетворяющих условию Энгеля, Доклады Ака. наук СССР, 108, № 4 (1956), 580—582.
- ² Кострикин А. И., О связи между периодическими группами и кольцами Ли, Известия Ака. наук СССР, сер. матем., 21 (1957), 289—310.
- ³ Gruenberg K. W., Two theorems on Engel groups, Proc. Cambridge Phil. Soc., 49, 3 (1953), 377—380.
- ⁴ Higgins P. J., Lie rings satisfying the Engel condition, Proc. Cambridge Phil. Soc., 50, 1 (1954), 8—15.
- ⁵ Cohn P. M., A non-nilpotent Lie rings satisfying the Engel condition, Proc. Cambridge Phil. Soc., 51, 3 (1955), 401—405.
- ⁶ Levitzki J., On a problem of A. Kurosch, Bull. Amer. Math. Soc., 52 (1946), 1033—1035.
- ⁷ Levitzki J., On the radical of a general ring, Bull. Amer. Math. Soc., 49 (1943), 461—466.
- ⁸ Burnside W., On a unsettled question in the theory of discontinuous groups, Quart. J. Math., 33 (1902), 230—238.
- ⁹ Санов И. Н., Решение проблемы Бернсайда для показателя 4, Учен. зап. Ленингр. гос. ун-та, 55 (1940), 166—170.
- ¹⁰ Hall P., Higmans G., On the p -length of p -soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem, London Math. Soc., 6, № 21 (1956), 1—42.
- ¹¹ Jacobson N., Abstract derivations and Lie algebras, Trans. Amer. Math. Soc., 42 (1937), 206—224.

А. Б. ЖИЖЧЕНКО

О ЧИСЛЕ ПОДПОЛЕЙ ПОЛЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОТ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым)

В работе доказывается, что поле алгебраических функций от одного переменного рода больше 1 может иметь лишь конечное число подполей рода больше 1, над которыми оно сепарабельно (в случае алгебраической замкнутости основного поля).

Введение

Вопрос о числе подполей в известной степени аналогичен вопросу о числе автоморфизмов поля алгебраических функций. Вопрос об автоморфизмах был давно разрешен в классическом случае (основное поле — поле комплексных чисел). Конечность числа автоморфизмов поля рода больше 1 была доказана, а затем много раз передоказывалась в конце 19 века Шварцем, Вейерштрассом, Пуанкаре, Гурвицем⁽¹⁾. Доказательство конечности числа автоморфизмов в случае алгебраически замкнутого основного поля было дано Шмидом⁽²⁾. До конца задача была решена Розенлихтом⁽³⁾, который, в частности, указал все случаи, когда поле алгебраических функций может иметь бесконечное число автоморфизмов, и привел соответствующие примеры.

Конечность числа подполей рода больше 1 в классическом случае была доказана Дефранчисом⁽⁴⁾ и передоказана Севери⁽⁵⁾. Доказательство Севери состоит из двух утверждений. Сначала доказывается, что подполя рода больше 1 образуют алгебраическое многообразие; затем доказывается, что это многообразие имеет размерность 0.

Вопрос о подполях поля алгебраических функций от одного переменного в случае произвольного основного поля ранее не рассматривался. В настоящей работе дается доказательство конечности числа подполей рода больше 1, над которыми исходное поле является сепарабельным, в случае алгебраической замкнутости основного поля. Доказательство строится по плану доказательства Севери. При этом доказательство первого утверждения, геометрическое по существу, переносится на рассматриваемый случай лишь с небольшими изменениями. Доказательство же второго утверждения, в котором существенно используется теория абелевых интегралов, непригодно и требует привлечения теории абелевых многообразий над произвольным полем.

В конце работы приводятся примеры полей алгебраических функций, имеющих бесконечное число подполей, в случае невыполнения тех или иных предпосылок основной теоремы. Для построения примеров используются примеры Розенлихта ⁽³⁾.

§ 1. Построение алгебраического многообразия подполей

Обозначения. Пусть k — основное поле (поле констант) характеристики p , Σ — поле алгебраических функций от одного переменного, Σ' — поле алгебраических функций, подполе поля Σ , g — род поля Σ , g' — род поля Σ' , μ — степень поля Σ над Σ' , $\mu = [\Sigma : \Sigma']$, Σ_Γ — поле рациональных функций на алгебраической кривой Γ , W — канонический класс (класс дифференциалов) в поле Σ , W' — в поле Σ' , D — целый дивизор поля Σ , дифференциала Σ/Σ' .

Всюду в этом параграфе будут предполагаться выполненными условия:

А. Род поля Σ и подполя Σ' больше 1, т. е. $g, g' > 1$.

В. Σ — сепарабельное расширение Σ' .

Для дальнейших построений используется трижды каноническая модель поля Σ .

Рассмотрим класс W^3 в поле Σ . По теореме Римана — Роха, размерность этого класса, ввиду условия А, окажется следующей:

$$r(W^3) = 6g - 6 - (g - 1) = 5g - 5.$$

Если $\{f_1, \dots, f_{5g-5}\}$ — базис класса W^3 , то кривая C с общей точкой (f_1, \dots, f_{5g-5}) в пространстве S_{5g-5} будет обладать свойствами:

1. C — неособая кривая.
2. После рациональных функций на C изоморфно исходному полю Σ .
3. Дивизоры класса W^3 высекаются на C гиперплоскостями пространства S_{5g-5} [см. ⁽³⁾].

Через N мы будем обозначать нормальное надполе поля Σ (поле Σ будет обозначаться также через $k(P)$, где P — фиксированная общая точка кривой C).

Инволюцией на кривой C будем называть дивизор, состоящий из общей точки P и всех ей сопряженных над некоторым полем Σ' . Все эти точки, очевидно, лежат в N .

Подполе Σ' можно рассматривать как поле рациональных функций на неособой кривой C' ; вложение Σ' в Σ будет тогда задаваться рациональным отображением $\varphi: C \rightarrow C'$, $(\mu, 1)$ -значным. Это рациональное отображение, являясь алгебраическим соответствием между кривыми C и C' , может быть задано дивизором σ на прямом произведении $C \times C'$. Дивизор на кривой C' , соответствующий дивизору \mathcal{M} на C , обозначается через $\sigma(\mathcal{M})$; дивизор на кривой C , соответствующий \mathcal{N} на C' , обозначается через $\sigma^{-1}(\mathcal{N})$. Общей точке P кривой C соответствует общая точка Q кривой C' (ввиду характера соответствия σ). Дивизор $\sigma^{-1}(Q) = \sigma^{-1}\sigma(P)$, в силу условия В, будет состоять из μ различных точек на кривой C и будет называться инволюцией на C , связанной с кривой C' (или с подполем Σ').

С помощью дивизора $\sigma^{-1} \circ (P)$ определяется (μ, μ) -значное соответствие γ_C между C и C , получаемое заданием $\gamma_{C'}(P) = \sigma^{-1} \sigma(P)$.

Дивизор Γ на $C \times C$, осуществляющий это соответствие, мы также будем называть инволюцией.

Замечание. Задание инволюции на C , связанной с кривой C' , равносильно заданию подполя Σ' .

Обозначим через U неособую кривую, поле рациональных функций на которой есть N . Тогда существует рациональное отображение $\chi: U \rightarrow C$, $(\nu, 1)$ -значное, где $\nu = [N: \Sigma]$, и рациональное отображение $\psi = \varphi\chi: U \rightarrow C'$, $(\mu\nu, 1)$ -значное. Обозначим

$$\psi^{-1}(Q) = \sum_{i=1}^{\mu\nu} R_i,$$

где $R_i (i = 1, \dots, \mu\nu)$ — независимые общие точки на U над $k(Q)$. Очевидно, что

$$\chi^{-1}(\gamma(P)) = \psi^{-1}(Q).$$

Если v — произвольная рациональная функция на кривой U , то отображение $v(R_i) \rightarrow v(R_j)$ будет автоморфизмом поля N . Подполе, инвариантное относительно этой группы автоморфизмов, будет, как легко видеть, полем Σ' , так как точки $R_1, \dots, R_{\mu\nu}$ являются полной системой сопряженных в поле N над полем Σ' , ввиду условия В.

Мы скажем, что кривая \bar{C} получается проектированием кривой C из некоторого подпространства H размерности k (обозначаемого через H_k), $H_k \subset S_n$, если $(k+1)$ -мерное пространство, содержащее подпространство H_k и точку P кривой C , пересекает на кривой C дивизор \mathcal{M} , инволюцию, связанную с кривой \bar{C} . В случае, если дивизор \mathcal{M} состоит из μ точек, мы будем называть проектирование μ -кратным.

Все построения проводятся в пространстве S_{5g-5} , введенном в начале этого параграфа.

ТЕОРЕМА 1. Подполе Σ' является полем рациональных функций на некоторой алгебраической кривой Γ , получаемой из кривой C μ -кратным проектированием из некоторого подпространства $H \subset S_{5g-5}$, $\dim H < 5g-7$.

Доказательство. Будем рассматривать поле Σ' и как подполе поля Σ и как поле функций на кривой C' с общей точкой Q , получаемой рациональным преобразованием кривой C :

$$Q = \varphi(P),$$

где P — общая точка C . Обозначим через C_0, \dots, C_r дивизоры базиса целых дивизоров класса W^3 . Тогда за базис класса W^3 можно принять функции $f_1(Q), \dots, f_r(Q)$, где дивизор функции f_i в поле Σ' будет $C_i C_0^{-1}$.

$$(f_i)_{\Sigma'} = C_i C_0^{-1}.$$

Но функции f_i , $i = 1, \dots, r$, можно, вследствие равенств

$$f_i(Q) = f_i(\varphi(P)), \quad i = 1, \dots, r,$$

рассматривать как функции поля Σ ; поэтому в поле Σ можно рассматривать класс K с базисом f_1, \dots, f_r . При этом, очевидно,

$$(f_i)_\Sigma = (\sigma^{-1}(C_i))(\sigma^{-1}(C_0))^{-1}, \quad i = 1, \dots, r.$$

Обозначим $b_i = \sigma^{-1}(C_i)$, $i = 1, \dots, r$, и рассмотрим связанный с классом K линейный ряд U , т. е. совокупность целых дивизоров

$$b_0(\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_r f_r),$$

где $\alpha_0, \dots, \alpha_r$ — произвольные элементы поля k . Так как размерность класса W'^3 равна $5g' - 5$, то получаемый линейный ряд имеет размерность $r = 5g' - 5$.

Трижды канонический класс W^3 поля Σ связан с классом K соотношением [см. (6)]:

$$\mathfrak{U} \sim bD^3, \quad (I)$$

где \mathfrak{U} — произвольный дивизор класса W^3 , b — дивизор класса K . Отсюда, сравнением степеней левой и правой частей, получаем:

$$2g - 2 = \mu(2g' - 2) + \delta, \quad \delta > 0, \quad \mu < \frac{g-1}{g'-1} < g.$$

Из (I) следует, что, каков бы ни был целый дивизор \mathfrak{N} ряда U , найдется дивизор $\mathfrak{U} \in W^3$ такой, что $\mathfrak{U} = \mathfrak{N}D^3$.

Таким образом, ряд U высекается линейной системой гиперплоскостей, каждая из которых высекает на кривой C дивизор D^3 . Размерность системы (будем обозначать ее системой Ξ) равна $5g' - 5$, т. е. базис-пространство H системы Ξ имеет размерность

$$5(g - g') - 1 < 5g - 7$$

и высекает на кривой C дивизор D^3 .

Пусть P — общая точка C ; рассмотрим $5(g - g')$ -мерное подпространство PH . Так как каждая гиперплоскость из Ξ , содержащая точку P , содержит и остальные $\mu - 1$ точку инволюции $\gamma(P)$, ибо ряд U составлен, очевидно, из таких инволюций, то PH высекает на C $\gamma(P)$. Других инволюций PH на C высекать не может, так как это означало бы, что любая гиперплоскость из Ξ , содержащая инволюцию $\gamma(P)$, содержит и некоторые другие инволюции $\gamma(P_1), \dots, \gamma(P_k)$. Переходя к кривой C' , мы получили бы, что любой целый дивизор класса W'^3 , содержащий точку $Q = \sigma(P)$ — общую точку C' , содержал бы и некоторые точки Q_1, \dots, Q_k , т. е. ряд U' целых дивизоров класса W^3 оказался бы составным, что невозможно [см (5)].

Если рассмотреть кривую, получаемую из кривой C проектированием из подпространства H (базис-пространства системы Ξ) то, в силу замечания, поле функций на этой кривой и будет исходным подполем Σ' поля Σ . Теорема доказана.

Рассмотрим линейные подпространства, из которых осуществляется μ -кратное проектирование кривой C , при фиксированных μ и k -размерности подпространств. Все такие линейные подпространства образуют алгебраическую систему G_μ^k , ибо условие, что из k -мерного подпространства осуществляется μ -кратное проектирование заданной кривой, есть совокупность алгебраических условий, наложенных на грассмановы координаты этого подпространства.

Каждому подпространству H_μ^k сопоставляется общая инволюция γ_μ^k (это есть просто дивизор $C \cdot PH_\mu^k$), а следовательно, и дивизор инволюции Γ_μ^k на прямом произведении $C \times C$. В силу теоремы 1, в числе этих инволюций будут все инволюции, связанные с подполями Σ' с фиксированными μ и k (ибо $k = 5(g - g') - 1$).

Пусть общий элемент алгебраической системы G_μ^k есть h_μ^k , а соответствующий ему дивизор инволюции будет Γ_μ^k . По указанному выше, алгебраическая система дивизоров R_μ^k с общим элементом Γ_μ^k будет включать в себя дивизоры всех инволюций, связанных с подполями Σ' , с фиксированными μ и k , причем различным подполям соответствуют, вследствие замечания, разные дивизоры Γ на $C \times C$. Так как каждой общей инволюции соответствует некоторое подполе, то построенное многообразие R_μ^k может быть также названо многообразием подполей поля Σ с фиксированными μ и k (а также многообразием инволюций).

Итак, если доказать, что размерность всех неприводимых компонент всех многообразий R_μ^k для $1 < \mu < g$, $0 \leq k < 5g - 7$, т. е. для конечного числа многообразий R_μ^k , будет равна нулю, то будет доказана конечность числа подполей поля Σ' .

§ 2. Доказательство основной теоремы. Примеры

ТЕОРЕМА 2. Пусть R — неприводимая компонента одного из многообразий R_μ^k . Тогда, если поле констант алгебраически замкнуто, размерность R равна нулю.

Доказательство. С каждым дивизором $\Gamma \in R$ свяжем функцию на кривой C со значениями в якобиевом многообразии этой кривой $I(C)$:

$$f(P) = S\varphi\gamma(P), \quad (II)$$

где $\gamma(P)$ — общая инволюция, соответствующая дивизору Γ на $C \times C$, т. е. дивизор $\text{pr}_{C_{II}} \Gamma$. ($P \times C$) на кривой C (под C_{II} понимается, как обычно, второй из одинаковых сомножителей). В формуле (II) φ обозначает каноническое отображение кривой C в свое якобиево многообразие $I(C)$, а S — оператор суммирования на $I(C)$.

Так определенную функцию f можно рассматривать как отображение прямого произведения $R \times C$ в многообразие $I(\Gamma)$, определяемое равенством:

$$\psi(\gamma \times P) = S\varphi\gamma(P).$$

По теореме 7 работы (?),

$$\psi(\gamma \times P) = \psi_1(\gamma) + \psi_2(P),$$

где ψ_1 и ψ_2 — функции со значениями в $I(C)$, заданные соответственно на R и C и определенные с точностью до констант. Вводя нормирующую точку P_0 , $\psi_2(P_0) = 0$, получаем:

$$S\varphi\gamma(P_0) = \psi_1(\gamma),$$

или

$$S\varphi\gamma(P) - S\varphi\gamma(P_0) = \psi_2(P),$$

откуда

$$S\varphi[\gamma(P) - \gamma(P_0)] = \psi_2(P). \quad (III)$$

Рассмотрим соответствие между прямым произведением $R \times C$ и кривой C , в котором элементу $\Gamma \times P \times R \times C$ сопоставляется дивизор $\gamma(P)$ кривой C , где γ — инволюция, соответствующая Γ . Это соответствие осуществляется подмногообразием X на многообразии $R \times C \times C$ таким, что

$$X \cdot (\Gamma \times P \times C) = \Gamma \times P \times \gamma(P),$$

т. е.

$$\text{пр}_{CII} [X \cdot (\Gamma \times P \times C)] = \gamma(P),$$

где γ — инволюция, соответствующая общему элементу Γ многообразия R . В рассматриваемом соответствии многообразию R отвечает либо конечное множество точек на C , либо сама кривая C , взятая несколько раз. В случае конечного множества точек, как легко видеть, мы получаем конечное множество инволюций, а значит и конечное множество подполей, соответствующих дивизорам системы R . Поэтому предположим, что образом многообразия $R \times P$ в данном соответствии будет кривая C , взятая несколько раз, и придем к противоречию.

Как следует из теоремы 6, § 34 работы (8), в этом случае для любой точки $M \in C$ многообразию $R \times M$ отвечает kC , что означает, что для любых двух точек M_1 и M_2 кривой C найдется инволюция γ такая, что $\gamma(M_1) = \gamma(M_2)$ (для этого достаточно существования такой γ , что $M_2 \in \gamma(M_1)$).

Если в качестве точки M_2 взять P_0 , то из условия $\gamma(M_1) = \gamma(P_0)$ (где γ зависит, вообще говоря, от точки M_1) и из формулы (III) следует $\psi_2(M) = 0$, т. е. для любого γ и любой точки M

$$S\varphi[\gamma(M) - \gamma(P_0)] = 0. \quad (IV)$$

Из основного свойства якобиевого многообразия кривой $I(C)$ и из формулы (IV) следует, что для любых двух точек P_1 и P_2 кривой C

$$\gamma(P_1) - \gamma(P_2) \sim 0.$$

С помощью инволюции $\gamma(P)$ построим подполе Σ' и кривую C' , поле рациональных функций на которой будет полем Σ' . Тогда, как следует из изложенного в начале § 1 и по теореме 4 гл. II работы (9),

$$\sigma(\gamma(P_1) - \gamma(P_1)) = \mu Q_1 - \mu Q_2 \sim 0,$$

т. е. в поле Σ'

$$\mu(Q_1 - Q_2) \sim 0$$

для любых Q_1 и Q_2 , что возможно лишь в случае $g' = 0$. Теорема доказана.

Примеры. 1. Поле Σ может иметь бесконечное число подполей, над которыми оно несепарабельно. Рассмотрим кривую $f(x, y) = 0$ рода больше 1 над полем констант характеристики $p \neq 0$. Обозначим поле функций на этой кривой через $k(\xi, \eta)$. Тогда поле функций $k(\xi^P, \eta^P)$ будет содержаться в $k(\xi, \eta)$. В то же время поле $k(\xi^P, \eta^P)$ будет собственным подполем поля $k(\xi, \eta)$. Действительно, образующие ξ и η можно выбрать таким образом, что $k(\xi^P, \eta^P)$ будет сепарабельным расширением $k(\xi^P)$, в то время как $k(\xi)$ — чисто несепарабельное расширение [см. (6)]. Таким образом, $k(\xi^P, \eta^P) \not\subset k(\xi)$ и, тем более, $k(\xi^P, \eta^P) \not\subset k(\xi, \eta)$.

Повторяя это рассуждение, можно построить бесконечно много различных подполей, над которыми $k(\xi, \eta)$ будет несепарабельно.

2. Теорема неверна, если k — несовершенное поле характеристики $p \neq 0$. Пусть кривая $f(x, y) = 0$ задана над k уравнением:

$$y^p - y = ax^p, \quad a \in k^p.$$

Тогда род кривой f будет равен $g = \frac{(p-1)(p-2)}{2}$ [см. (3)]. Пусть $p > 3$, т. е. $g > 1$. Преобразование $(\xi, \eta) \rightarrow (\xi + \alpha, \eta + \beta)$ дает, как легко видеть, автоморфизмы поля $k(\xi, \eta)$ тогда и только тогда, когда точка (α, β) лежит на кривой f . Очевидно, что если взять поле констант таким, что имеется бесконечное множество точек на f над k (например, k — поле рациональных функций над полем вычетов по p), то мы будем иметь бесконечное множество автоморфизмов конечного порядка в $N \supset k(\xi, \eta)$. Таким образом, мы получаем бесконечно много подполей поля N , каждое из которых соответствует автоморфизму, относительно которого оно инвариантно. Как известно, поле N над ними сепарабельно.

3. Поле рода 1 (поле эллиптических функций) содержит бесконечное число подполей [см. (5)].

Остается открытым вопрос о конечности числа подполей, когда основное поле k — совершенное. Задача перечисления всех случаев, когда имеется бесконечное число подполей, также остается неразрешенной.

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Appell P. u. Goursat E., Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales, Paris, 1895.
 - ² Schmid H. L., Über die Automorphismen eines algebraischen Funktionenkörpers von Primzahlcharakteristik, J. Reine Angew. Math., 179 (1938), 5—15.
 - ³ Rosenlicht M., Automorphisms of functions fields, Trans. Am. Math. Soc., 79, 1 (1955), 1—13.
 - ⁴ De Franchis M., Un teorema sulle involuzioni irrazionali, Palermo Rend., 36 (1913), 368.
 - ⁵ Severi F., Vorlesungen über algebraische Geometrie, Leipzig — Berlin, 1921.
 - ⁶ Hasse H., Zahlentheorie, Berlin, 1949.
 - ⁷ Weil A., Variétés abéliennes et courbes algébriques, Paris, 1948.
 - ⁸ Van der Waerden B. L., Einführung in die algebraische Geometrie, Berlin, 1939.
 - ⁹ Weil A., Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent, Paris, 1948.
-

Б. Я. ЛЕВИН

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ КАРТРАЙТ О ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ КОНЕЧНОЙ СТЕПЕНИ, ОГРАНИЧЕННОЙ НА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ТОЧЕК

(Представлено академиком М. В. Келдышем)

В работе исследуется связь между ростом целой функции конечной степени на последовательности точек вещественной оси и ее ростом на всей оси.

1. Настоящая работа посвящена обобщению следующей теоремы М. Картрайт (1):

Если целая функция $f(z)$ конечной степени удовлетворяет условию $h_f\left(\frac{\pi}{2}\right) + h_f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\tau < 2\pi$, где $h_f(\theta)$ — индикатор функции, т. е.

$$h_f(\theta) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{r},$$

то из неравенств $|f(\pm n)| \leq 1$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) следует неравенство $|f(x)| \leq c(\tau)$, где $c(\tau)$ — постоянная.

Известны различные обобщения этой теоремы [см. (2), (3), (4), (5)]*. В работах С. Агмона (8) и Н. И. Ахиезера (9) даются обобщения теоремы М. Картрайт на случай целой функции конечной степени, растущей на вещественной оси и имеющей мажоранту на последовательности точек.

Настоящая работа примыкает по постановке вопроса к упомянутой работе Н. И. Ахиезера, и основной результат настоящей работы представляет собою существенное обобщение результатов Н. И. Ахиезера. Кроме того, предлагаемая работа дает новый подход ко всему кругу вопросов, связанному с теоремой М. Картрайт.

2. Напомним некоторые понятия и теоремы, относящиеся к классу P целых функций**.

* Асимптотическая при $\tau \rightarrow \pi$ оценка постоянной $c(\tau)$ дается в работах Шеффера (6) и С. Н. Бернштейна (7). В работе (7) показано, что $L_{N-1} < c(\tau) \leq L_N$, где $N = \left\lceil \frac{\pi}{\pi - \tau} \right\rceil$ и

$$L_N = \frac{1}{N} \left[\frac{1}{\sin \frac{\pi}{2N}} + \frac{1}{\sin \frac{3\pi}{4N}} + \dots + \frac{1}{\sin \frac{(2N-1)\pi}{2N}} \right].$$

Асимптотическая оценка имеет вид:

$$c(\tau) \sim \frac{2}{\pi} \ln \frac{\pi}{\pi - \tau}.$$

** Этот класс был введен и исследован автором в работах (10), (11), (12). Подробное изложение см. в книге (13).

Определение. Целая функция $\omega(z)$ называется функцией класса P , если она конечной степени, все ее корни лежат в полуплоскости $\operatorname{Im} z \geq 0$ и $h_\omega\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq h_\omega\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

Пусть

$$\omega(z) = P(z) + iQ(z),$$

причем коэффициенты разложений

$$P(z) = \sum_0^\infty a_n z^n, \quad Q(z) = \sum_0^\infty b_n z^n$$

все вещественные *.

Имеется следующий критерий принадлежности целой функции $\omega(z)$ классу P . Для того чтобы целая функция $\omega(z)$ конечной степени принадлежала классу P , необходимо и достаточно, чтобы все корни функций $P(z)$ и $Q(z)$ были вещественные, чтобы все они, кроме, быть может, их общих корней, были простыми и перемежались **, чтобы индикаторные диаграммы функций $P(z)$ и $Q(z)$ совпадали и хотя бы в одной точке вещественной оси имело место неравенство

$$Q'(x)P(x) - P'(x)Q(x) > 0.$$

Этот критерий является обобщением на целые функции конечной степени известной теоремы Эрмита — Билера ***.

Заметим, что если корни вещественных целых функций $P(z)$ и $Q(z)$ конечной степени все вещественны и все, кроме общих их корней, простые и перемежаются, то их индикаторные диаграммы получаются одна из другой параллельным переносом.

Если индикаторные диаграммы не совпадают, то функция $\omega(z) = P(z) + iQ(z)$ имеет корни в обеих полуплоскостях ($\operatorname{Im} z > 0$ и $\operatorname{Im} z < 0$). Очевидно, что в этом случае достаточно умножить одну из функций $P(z)$ или $Q(z)$ на показательный множитель e^{kz} для того, чтобы их индикаторные диаграммы совпали.

Принадлежность целой функции $\omega(z) = P(z) + iQ(z)$ классу P эквивалентно тому, что $P(z)$ и $Q(z)$ — целые функции конечной степени и их отношение

$$w = \frac{Q(z)}{P(z)}$$

отображает верхнюю полуплоскость плоскости z на верхнюю полуплоскость плоскости w .

Такая мероморфная функция представляется в форме

$$\frac{Q(z)}{P(z)} = az + b + \frac{A_0}{z} + \sum_{-\infty}^\infty A_k \left[\frac{1}{z - \alpha_k} + \frac{1}{\alpha_k} \right], \quad (1)$$

* Такие функции называются вещественными.

** Т. е. между двумя последовательными корнями одной функции должен находиться один корень другой.

*** Обобщениям теоремы Эрмита — Билера посвящено много исследований. Большая часть их изложена в книге Н. Г. Чеботарева и Н. Н. Меймана ⁽¹⁴⁾ [см. также ⁽¹³⁾, гл. VII].

где α_k — корни $P(z)$, $a \geq 0$, b — вещественное число и $-A_k \geq 0$ *.

Из разложения (1) легко следует, что

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{Q(iy)}{iyP(iy)} = a. \quad (2)$$

Поэтому если $a \neq 0$, то в разложении (1) функции

$$w_1 = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad (3)$$

также отображающей верхнюю полуплоскость на верхнюю, будем иметь $a = 0$.

Р. Неванlinna установил следующий общий факт:

Всякая функция $\theta(z)$, голоморфная в верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$ и отображающая верхнюю полуплоскость на верхнюю, представляется в форме:

$$\theta(z) = az + b + \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{t-z} - \frac{t}{1+t^2} \right] d\sigma(t), \quad (4)$$

где $\sigma(t)$ — неубывающая функция и $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{1+t^2} dt < \infty$, $a \geq 0$. Легко видеть, что и в этом более общем случае

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \{(iy)^{-1} \theta(iy)\} = a. \quad (5)$$

Целью настоящей работы является доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\omega(z) = P(z) + iQ(z)$ — целая функция класса P , и в разложении (1) $a = 0$ **. Если целая функция конечной степени $f(z)$ удовлетворяет условию

$$\left| \frac{f(\pm iy)}{\omega(\mp iy)} \right| = O(e^{-\varepsilon|y|}) \quad (6)$$

и во всех корнях $\{\alpha_k\}$ функции $P(z)$ выполняется неравенство

$$|f(\alpha_k)| \leq |\omega(\alpha_k)|, \quad (7)$$

то при всех $h > 0$ справедливо неравенство

$$|f(x)| \leq C_h |\omega(x - ih)| \quad (-\infty < x < \infty),$$

где C_h — постоянная ($C_h \rightarrow 0$ при $h \rightarrow \infty$) ***.

Теорема Картрайт получается из этой теоремы, если положить

$$\omega(z) = e^{i\pi(z + \frac{1}{2})} = -\sin \pi z + i \cos \pi z.$$

* Это разложение впервые было получено Н. Г. Чеботаревым⁽¹⁵⁾ [см. (13) или (14)].

** Если $\omega(z)$ не удовлетворяет этому условию, то ему удовлетворяет функция $e^{i\alpha} \omega(z)$ при любом вещественном α , не кратном числу π .

*** В статье Н. И. Ахиезера⁽⁹⁾ утверждение теоремы — то же, но функция $\omega(z)$ имеет специальный вид: $\omega(z) = e^{ipz} \omega_0(z)$, где $\omega_0(z)$ — целая функция нулевого рода с корнями в верхней полуплоскости, удовлетворяющая некоторым весьма жестким дополнительным требованиям.

Для доказательства теоремы 1 установим предварительно две леммы.

ЛЕММА 1. Пусть функция $\theta(z)$ голоморфна в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ и $\operatorname{Im} \theta(z) > 0$ в этой полуплоскости. Если при этом

$$|\theta(iy) - i| = O(e^{-\varepsilon y}) \quad (8)$$

для некоторого положительного ε и $y \rightarrow +\infty$, то все значения, принимаемые функцией $\theta(z)$ в полуплоскости $\operatorname{Im} z \geq h > 0$, попадают в круг

$$\left| \frac{\theta - i}{\theta + i} \right| < e^{-\varepsilon h} *. \quad (9)$$

Доказательство. Составим функцию

$$w = \frac{\theta(z) - i}{\theta(z) + i}.$$

Она голоморфна в верхней полуплоскости и отображает эту полуплоскость на единичный круг $|w| < 1$. Кроме того,

$$|w(iy)| = O(e^{-\varepsilon y}) \quad (10)$$

при $y \rightarrow +\infty$. Функция

$$\varphi(z) = w(z) e^{-iez},$$

голоморфная и конечной степени в верхней полуплоскости, ограничена на полуоси Oy . Кроме того, при любом $\eta > 0$ и достаточно малом $y > 0$

$$|\varphi(x + iy)| < 1 + \eta. \quad (11)$$

Применяя теорему Фрагмена и Линделефа к функции $\varphi(z)$ в каждом из углов $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2} < \arg z < \pi$, мы получим, что $\varphi(z)$ ограничена в верхней полуплоскости. Применяя снова теорему Фрагмена и Линделефа, найдем:

$$|\varphi(z)| \leq 1 \text{ при } \operatorname{Im} z > 0$$

и, следовательно,

$$\left| \frac{\theta(z) - i}{\theta(z) + i} \right| < e^{-\varepsilon y}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Если вещественная целая функция $f(z)$ конечной степени удовлетворяет условиям (6) и (7) теоремы 1, то корни целой функции $f(z) \pm \tau Q(z)$ ($\tau > 1$) все вещественные, простые и перемежаются с корнями функции $P(z)$.

Доказательство. Выберем для определенности в выражении $f(z) \pm \tau Q(z)$ знак $+$. Неравенство (7) может быть записано в форме

$$|f(\alpha_k)| \leq |Q(\alpha_k)|,$$

где α_k — корни функции $P(z)$. Таким образом, в этих точках знак функции $f(x) + \tau Q(x)$ совпадает со знаком $Q(x)$. Так как корни $Q(x)$ и $P(x)$ — простые и перемежаются **, то величины $Q(\alpha_k)$ и $Q(\alpha_{k+1})$ имеют

* Эта формулировка леммы 1 была дана студентом И. В. Островским.

** Не нарушая общности, можно считать, что функции $P(z)$ и $Q(z)$ не имеют общих корней.

противоположные знаки, откуда заключаем, что между точками α_k и α_{k+1} находится нечетное число корней функции $f(x) + \tau Q(x)$.

Выберем по одному корню β_k в каждом из интервалов (α_k, α_{k+1}) и построим целую функцию

$$\psi(z) = ce^{\sigma z} \prod_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\beta_k}\right) e^{\frac{z}{\beta_k}},$$

где c и σ — вещественные постоянные, которые мы выберем впоследствии.

Покажем, что эта целая функция — конечной степени. Для этого обозначим через $n_\beta(t)$ число точек β_k в круге $|z| \leq t$ и через $n_\alpha(t)$ — число точек α_k в этом же круге.

По известному критерию Линделефа [см. (13), гл. 1], для того чтобы функция $\psi(z)$ была конечной степени, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия:

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{n_\beta(t)}{t} < \infty, \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \left| \sum_{|\beta_k| \leq t} \frac{1}{\beta_k} \right| < \infty. \quad (12)$$

Так как функция $P(z)$ — конечной степени, то

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{n_\alpha(t)}{t} < \infty.$$

Кроме того, $n_\beta(t) \leq n_\alpha(t) + 2$ и, следовательно, выполняется первое из условий (12). Второе из условий (12) следует из того, что

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \left| \sum_{|\alpha_k| \leq t} \frac{1}{\alpha_k} \right| < \infty$$

и ряд

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_k} - \frac{1}{\beta_k} \right)$$

сходится. Таким образом, функция $\psi(z)$ — конечной степени. Итак, целые функции $P(z)$ и $\psi(z)$ — обе конечной степени и их корни перемежаются. Поэтому их индикаторные диаграммы получаются одна из другой параллельным сдвигом.

Выберем вещественную постоянную ε так, чтобы эти индикаторные диаграммы совпадали. Выберем $c = 1$ или -1 так, чтобы в какой-нибудь точке x_0 вещественной оси выполнялось неравенство

$$P'(x_0)\psi(x_0) - P(x_0)\psi'(x_0) > 0.$$

Тогда $\psi(z) + iP(z)$ есть целая функция класса P , а следовательно, мероморфная функция

$$\Phi(z) = \frac{P(z)}{\psi(z)}$$

отображает верхнюю полуплоскость на верхнюю.

Составим теперь функцию

$$\varphi(z) = \frac{f(z) + \tau Q(z)}{\psi(z)}. \quad (13)$$

Так как корни функции $\psi(z)$ простые и находятся среди корней $f(z) + \tau Q(z)$, то $\varphi(z)$ — целая функция и так как числитель и знаменатель суть целые функции конечной степени, то их частное $\varphi(z)$ есть целая функция конечной степени *.

Оценим рост функции $\varphi(z)$ вдоль мнимой оси. Для этого запишем эту функцию в форме

$$\varphi(iy) = \left[\frac{f(iy)}{P(iy)} + \tau \frac{Q(iy)}{P(iy)} \right] \frac{P(iy)}{\psi(iy)}. \quad (14)$$

Для оценки первого слагаемого в квадратной скобке заметим, что

$$\frac{\omega(-iy)}{P(-iy)} = 1 + i \frac{Q(-iy)}{P(-iy)}.$$

Из равенства (2) получаем, что при $y \rightarrow +\infty$

$$\left| \frac{Q(-iy)}{P(-iy)} \right| = O(y)$$

и, следовательно,

$$|P(iy)| = |P(-iy)| = \frac{|\omega(-iy)|}{O(y)}.$$

Мы имеем:

$$\left| \frac{f(iy)}{P(iy)} \right| = \left| \frac{f(iy)}{\omega(-iy)} \right| O(y),$$

и, в силу неравенства (6),

$$\left| \frac{f(iy)}{P(iy)} \right| < O\left(e^{-\frac{\varepsilon}{2}y}\right) \quad (y \rightarrow +\infty). \quad (15)$$

Для оценки второго слагаемого в квадратной скобке формулы (14) мы воспользуемся равенством (2).

Так как, по предположению леммы, $a = 0$, то

$$\left| \frac{Q(iy)}{P(iy)} \right| = o(y). \quad (16)$$

Наконец, то же равенство (2) дает:

$$\left| \frac{P(iy)}{\psi(iy)} \right| = O(y). \quad (17)$$

Подставляя (15), (16) и (17) в (14), мы получаем:

$$|\varphi(iy)| = o(y^2) \quad (y \rightarrow \pm\infty). \quad (18)$$

Из этой оценки следует, что функция $\varphi(z)$ вполне регулярного роста и ее индикаторная диаграмма есть отрезок вещественной оси **.

* См. (13), гл. 1.

** Целая функция $F(z)$ порядка $\rho > 0$ называется функцией вполне регулярного роста, если существует и равен индикатору функции предел

$$h_F(\theta) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(re^{i\theta})|}{r^\rho}$$

при условии, что r стремится к бесконечности, не принимая значений из некоторого исключительного множества E , имеющего нулевую плотность.

По теореме М. Картрайт, существование интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln_+ |F(t)|}{1+t^2} dt$ является достаточным условием того, чтобы целая функция конечной степени была функцией вполне регулярного роста [см. (13), гл. III и V].

Запишем равенство (13) в форме

$$f(z) + \tau Q(z) = \psi(z) \varphi(z). \quad (19)$$

Так как функция $\varphi(z)$ вполне регулярного роста, то индикатор функции $\psi(z)\varphi(z)$ равен сумме индикаторов сомножителей [см. (13), гл. III]. В левой части равенства (19) стоит сумма целых функций конечной степени. Индикаторная диаграмма суммы должна содержаться в наименьшей выпуклой области, охватывающей индикаторные диаграммы обоих слагаемых. Так как индикаторная диаграмма функции $f(z)$ в направлении мнимой оси уже, чем индикаторная диаграмма $Q(z)$ *, то параллельный вещественной оси отрезок I_1 границы индикаторной диаграммы функции $f(z) + \tau Q(z)$ имеет не большую длину, чем длина l соответствующего отрезка в индикаторной диаграмме функции $Q(z)$ **. Длина такого отрезка I_2 у индикаторной диаграммы функции $\psi(z)\varphi(z)$ равна $l + d$, где d — длина индикаторной диаграммы функции $\varphi(z)$. Из равенства (19) получается, что $d = 0$ и, следовательно, индикаторная диаграмма функции $\varphi(z)$ сводится к одной вещественной точке. Эта точка совпадает с нулем, ибо в противоположном случае отрезок I_2 был бы смещен по сравнению с отрезком I_1 , что противоречит равенству (19).

Итак, мы показали, что $\varphi(z)$ — целая функция нулевой степени. Кроме того, заметим для дальнейшего, что совпадают индикаторные диаграммы функций $f(z) + \tau Q(z)$ и функции $\psi(z)$ или, что то же, функции $P(z)$.

Покажем, что $\varphi(z)$ есть полином не выше первой степени. В самом деле, в противном случае функция $\varphi(z)$ имела бы два корня γ_1 и γ_2 и функция

$$\varphi_2(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - \gamma_1)(z - \gamma_2)}$$

была бы ограничена на мнимой оси [см. (18)], а так как эта функция нулевой степени, то она — константа. Но из (18) следует, что $\lim_{y \rightarrow \pm \infty} \varphi_2(iy) = 0$

и, следовательно, $\varphi_2(z) \equiv 0$. Это приводит нас к противоречию. Итак, $\varphi(z) = az + b$, где a и b — вещественные числа.

Покажем еще, что $a = 0$. В самом деле, в противном случае функция $f(z) + \tau Q(z)$ имела бы кроме корней β_k еще точно один вещественный корень $-\frac{b}{a}$ и один из интервалов (α_k, α_{k+1}) содержал бы точно два корня функции $f(z) + \tau Q(z)$, что невозможно. Итак, функция $f(z) + \tau P(z)$ не имеет корней кроме точек β_k . Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Заметим, прежде всего, что достаточно доказать теорему 1 для вещественных функций, ибо если усло-

* Это следует из (15), так как индикаторные диаграммы $P(z)$ и $Q(z)$ совпадают.

** Длина этого отрезка может, в частности, равняться нулю. Тогда вместо отрезка рассматривается точка индикаторной диаграммы, наиболее удаленная от вещественной оси.

виям (6) и (7) теоремы удовлетворяет функция $f(z)$, то этим условиям удовлетворяют также функции

$$f_1(z) = \frac{1}{2} [f(z) + \bar{f}(z)] \text{ и } f_2(z) = \frac{1}{2i} [f(z) - \bar{f}(z)]^*.$$

Итак, можно считать, что $f(z)$ — вещественная целая функция конечной степени, удовлетворяющая условиям (6) и (7) теоремы 1.

По лемме 2, при $\tau > 1$ и $\tau < -1$ корни функции $f_j(z) + \tau Q(z)$ ($j = 1, 2$) и функции $P(z)$ все вещественные и все, кроме общих корней $P(z)$ и $Q(z)$, простые и перемежаются. Кроме того, как было уже замечено, индикаторные диаграммы функций $f_j(z) + \tau Q(z)$ и $\tau P(z)$ совпадают. Поэтому функция

$$\tau \omega(z) + i f(z)$$

принадлежит при $\tau \geq 1$ и $\tau \leq -1$ классу P . Эта функция не обращается в нуль в нижней полуплоскости и поэтому функция

$$\tau_j(z) = \frac{\lambda_j(z)}{i\omega(z)}$$

не принимает в полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$ значений, принадлежащих лучам $x \leq -1$ и $x \geq 1$.

Далее, по условию (6) теоремы 1,

$$|\tau_j(-iy)| = O(e^{-\varepsilon y}) \quad (y \rightarrow +\infty).$$

Положим

$$\theta_j(z) = \sqrt{\frac{\tau_j(z) - 1}{\tau_j(z) + 1}}.$$

Очевидно, что $\operatorname{Im} \theta_j(z) > 0$ при $\operatorname{Im} z < 0$ и

$$|\theta_j(-iy) - i| = O(e^{-\varepsilon y}) \quad (y \rightarrow +\infty).$$

По лемме 1, отсюда следует, что при $\operatorname{Im} z \leq -h$ все значения $\theta_j(z)$ лежат в некоторой окрестности точки i и, следовательно, все значения $\tau_j(z)$ лежат в некоторой окрестности нуля. Мы доказали, что при $\operatorname{Im} z < -h$ ($h < 0$) выполняется неравенство

$$|\tau_j(z)| \leq C_h, \quad (20)$$

где C_h — некоторая постоянная, зависящая от h и стремящаяся к нулю при $h \rightarrow +\infty$. Из неравенства (20) следует, что

$$|f_j(x - ih)| \leq C_h |\omega(x - ih)|.$$

Заметив, что $f(z) = f_1(z) + i f_2(z)$, мы получим:

$$|f(x - ih)| \leq 2C_h |\omega(x - ih)|. \quad (21)$$

Для того чтобы получить утверждение теоремы, следует из оценки (21) для $|f(x - ih)|$ получить оценку для $|f(x)|$. Чтобы это сде-

* $\bar{f}(z)$ — целая функция, у которой коэффициенты степенного разложения сопряжены соответствующим коэффициентам разложения $f(z)$.

заметим, что функция $\bar{f}(z)$ также удовлетворяет условиям (6) и (7) теоремы и, следовательно,

$$|\bar{f}(x - ih)| \leq 2C_h^{(1)} |\omega(x - ih)|.$$

Но $|\bar{f}(x - ih)| = |f(x + ih)|$. Поэтому имеем:

$$|f(x + ih)| \leq 2C_h^{(1)} |\omega(x - ih)|.$$

Функции $f(z + ih)$ и $2C_h^{(1)}\omega(z - ih)$ также удовлетворяют условиям (6) и (7) и, следовательно,

$$|f(x)| < 2C_h^{(2)}C_h^{(1)} |\omega(x - 2ih)|. \quad (22)$$

Отсюда уже прямо следует утверждение теоремы.

Укажем еще некоторые условия, достаточные для того, чтобы в неравенстве (22) можно было функцию $\omega(x - ih)$ заменить функцией $\omega(z)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\omega(z)$ — целая функция класса P , в разложении (1) $a = 0$ и корни $\gamma_k + i\delta_k$ функции $\omega(z)$ удовлетворяют условиям: $\delta_k \geq p > 0$ и при некотором $M > 0$

$$\sum_{k=1}^{\omega} \frac{\delta_k}{(x - \gamma_k)^2 + \delta_k^2} < M \quad (-\infty < x < \infty, \quad \omega \leq \infty). \quad (23)$$

Если целая функция конечной степени $f(z)$ удовлетворяет условию

$$\left| \frac{f(\pm iy)}{\omega(\mp iy)} \right| = (e^{-\varepsilon y}) \quad (y \rightarrow +\infty) \quad (6)$$

во всех корнях $\{\alpha_k\}$ функции $P(z)$ выполняется неравенство

$$|f(\alpha_k)| \leq |\omega(\alpha_k)|, \quad (7)$$

то справедливо неравенство

$$|f(x)| \leq C |\omega(x)|,$$

где C зависит от ε , p и M .

Доказательство. По теореме 1, функция $f(x)$ при любом $h > 0$ удовлетворяет неравенству

$$|f(x)| < C_h \omega(x - ih).$$

Возьмем отношение

$$\left| \frac{\omega(x - ih)}{\omega(x)} \right|.$$

Используя разложение функции $\omega(z)$ в бесконечное произведение

$$\omega(z) = e^{az+b} \prod_1^{\omega} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) e^{\frac{z}{a_k}} \quad (\omega \leq \infty, \quad \operatorname{Im} a \geq p > 0),$$

то можем получить:

$$\ln \left| \frac{\omega(x - ih)}{\omega(x)} \right| = h \left(-\operatorname{Im} a + \sum_1^{\omega} \operatorname{Im} \frac{1}{a_k} \right) + \sum_1^{\omega} \ln \left| 1 + \frac{ih}{x - a_k} \right|.$$

Из разложения $\ln(1 + \alpha)$ легко находим, что при $|\alpha| < \frac{1}{2}$

$$\ln |1 + \alpha| < \operatorname{Re} \alpha + |\alpha|^2.$$

Выбрав $h < \frac{1}{2}p$, мы получим:

$$\ln \left| \frac{\omega(x-ih)}{\omega(x)} \right| < Kh + \sum_1^{\infty} \frac{\delta_k h}{(x-\gamma_k)^2 + \delta_k^2} + \sum_1^{\infty} \frac{h^2}{(x-\gamma_k)^2 + \delta_k^2}, \quad (24)$$

где K — некоторая постоянная. Из (23) и (24) получаем, что

$$\ln \left| \frac{\omega(x-ih)}{\omega(x)} \right| < Kh + 2 \left(1 + \frac{1}{p} \right) Mh.$$

Отсюда и из (22) следует:

$$|f(x)| < C |\omega(x)|.$$

Теорема доказана. Заметим, что условие (23) выполняется, если предположить, что

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{\delta_k} < \infty.$$

Поступило
25. X. 1956

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Cartwright M., On certain integral function of order 1, Quart. J. of Math., (Oxf. ser.), 7 (1936), 46—55.
- ² Duffin R. J. and Schaeffer A. C., Power series with bounded coefficients, Amer. J. Math., 67 (1945), 141—154.
- ³ Ахизер Н. И., Интерполяция целыми функциями конечной степени, Доклады Ак. наук СССР, 65, № 5 (1949), 781—784.
- ⁴ Левин Б. Я., О функциях конечной степени, ограниченных на последовательности точек, Доклады Ак. наук СССР, 65, № 3 (1949), 265—268.
- ⁵ Ахизер Н. И. и Левин Б. Я., Интерполяция целыми функциями конечной степени, Записки матем. отд. физ.-мат. факультета ХГУ и Харьк. мат. об-ва, 23 (1952), 5—26.
- ⁶ Boas R. P. and Schaeffer A. C., A theorem of Cartwright, Duke Math. J., 9 (1942), 879—883.
- ⁷ Бернштейн С. Н., Распространение свойств тригонометрических полиномов на целые функции конечной степени, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 12 (1948), 421—444.
- ⁸ Agmon Sh., Functions of exponential type in an angle and singularities of Taylor series, Trans. Amer. Math. Soc., 70 (1951), 492—508.
- ⁹ Ахизер Н. И., Целые функции, имеющие майоранту на последовательности вещественных точек, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 16 (1952), 353—364.
- ¹⁰ Левин Б. Я., Критерий Эрмита для целых функций экспоненциального типа, Доклады Ак. наук СССР, XI1 (1943), 50—54 и 103—104.
- ¹¹ Левин Б. Я., О некоторых экстремальных свойствах целых функций конечной степени, Доклады Ак. наук СССР, 65, № 5 (1949), 605—608.
- ¹² Левин Б. Я., Об одном специальном классе целых функций и связанных с ним экстремальных свойствах целых функций конечной степени, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 14 (1950), 45—84.
- ¹³ Левин Б. Я., Распределение корней целых функций, М.—Л., ГТТИ, 1956.
- ¹⁴ Чеботарев Н. Г. и Мейман Н. Н., Проблема Рауза — Гурвица для полиномов и целых функций, Труды ин-та им. Стеклова Ак. наук СССР, XXVI, 1949.
- ¹⁵ Чеботарев Н. Г., Über die Realität von Nullstellen ganzer transzendenter Funktionen, Math. Ann., 99 (1928), 660—686.
- ¹⁶ Ахизер Н. И. и Крейн М. Г., О некоторых вопросах теории моментов, М.—Л., ГТТИ, 1938.

О. С. ИВАШЕВ-МУСАТОВ

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ НУЛЬ-РЯДОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым)

В работе даются оценки для коэффициентов тригонометрических нуль-рядов. Показывается, что сумма квадратов модулей этих коэффициентов может расходиться, в некотором смысле слова, как угодно медленно.

Тригонометрические нуль-ряды, т. е. ряды вида

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{inx} \quad (\alpha_n = \bar{\alpha}_{-n}), \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n| > 0,$$

сходящиеся к нулю почти всюду, впервые были открыты Д. Е. Меньшовым ⁽¹⁾ в 1916 г. и данный им метод их построения сохранился во всех работах, посвященных вопросу единственности разложения функций в тригонометрические ряды.

Из общих теорем о тригонометрических рядах [см. ⁽²⁾, гл. 11.11] следует, что для нуль-рядов $\alpha_n \rightarrow 0$ и

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^2 = \infty. \quad (*)$$

Выяснению возможного порядка малости коэффициентов этих рядов был посвящен ряд работ [см. ⁽³⁾—⁽⁷⁾]. Наиболее сильный результат был получен Салемом ⁽⁷⁾: было доказано, что существуют тригонометрические нуль-ряды, коэффициенты которых имеют порядок $O\left(\frac{r(|n|)}{\sqrt{|n|}}\right)$, где $r(x)$ — любая функция, монотонно и неограниченно растущая с ростом x .

В настоящей работе, при сохранении некоторых элементов конструкции работы автора ⁽⁸⁾, показывается, что ряд $(*)$ может расходиться, в некотором смысле слова, как угодно медленно. Именно, имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Для любой положительной, монотонно невозрастающей и непрерывной функции $\chi(y)$, заданной на полупрямой $y \geq 0$ и обладающей свойствами:

- 1) $\phi(y) = \int_0^y \chi^2(\eta) d\eta \rightarrow \infty$ при $y \rightarrow \infty$,
- 2) $y\chi^2(y) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \infty$,
- 3) $y^{1+\varepsilon}\chi^2(y) \rightarrow \infty$ при $y \rightarrow \infty$ для любого $\varepsilon > 0$,

4) существует такое $m > \frac{1}{2}$, что $y^m \chi(y)$ растет монотонно, можно построить тригонометрический нуль-ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{inx} \quad (\alpha_n = \bar{\alpha}_{-n})$$

такой, что

$$\alpha_n = o(\chi(|n|)).$$

Заметим сразу, что нельзя не накладывать никаких ограничений, кроме расходимости интеграла квадрата, на функцию $\chi(y)$, так как из общих теорем работы (2) следует, что не существует лакунарных тригонометрических нуль-рядов.

Доказательство теоремы 1 в основных чертах следует пути, указанному Д. Е. Меньшовым, и основано на следующем предположении:

ОСНОВНАЯ ЛЕММА. На отрезке $[0, 2\pi]$ существует непрерывная, монотонно неубывающая сингулярная функция $F(x)$, постоянная на каждом смежном интервале некоторого совершенного множества меры нуль, преобразование Фурье — Стильтьеса которой удовлетворяет условию

$$\int_0^{2\pi} e^{-iyx} dF(x) = o(\chi(|y|)),$$

где функция $\chi(y)$ обладает свойствами, перечисленными в теореме 1.

Для доказательства основной леммы построим функцию $F(x)$.

Вспомогательные функции и их свойства. Положим

$$\chi_1(y) = \frac{\chi(y)}{\sqrt{\psi(y)+1}} \quad (1)$$

и покажем, что эта функция обладает свойствами 1) — 4), указанными в теореме. Действительно, свойство 2) очевидно для нее, так как

$$\chi_1(y) = o(\chi(y)) \quad (2)$$

в силу (1) и свойства 1) функции $\chi(y)$. Для того чтобы проверить выполнение свойства 1) для функции $\chi_1(y)$, достаточно вычислить

$$\psi_1(x) = \int_0^y \chi_1^2(\eta) d\eta = \int_0^y \frac{\chi^2(\eta)}{\psi(\eta)+1} d\eta = \ln[\psi(y)+1]. \quad (3)$$

Отсюда и из свойства 1) функции $\chi(y)$ следует требуемое. Прежде чем показать, что функция $\chi_1(y)$ обладает свойством 3), докажем неравенство

$$\psi(y) < \chi^2(0) + a \ln y \quad (a = \text{const}). \quad (4)$$

По свойству 2) функции $\chi(y)$, для всех $y \geq 1$

$$\chi^2(y) < \frac{a}{y};$$

отсюда и из монотонности $\chi(y)$ следует, что

$$\psi(y) = \int_0^y \chi^2(\eta) d\eta = \int_0^1 \chi^2(\eta) d\eta + \int_1^y \chi^2(\eta) d\eta <$$

$$< \chi^2(0) + a \int_1^y \frac{d\eta}{\eta} = \chi^2(0) + a \ln y.$$

Далее, для любого $\varepsilon > 0$, в силу неравенства (4), имеем:

$$\begin{aligned} y^{1+\varepsilon} \chi_1^2(y) &= y^{1+\varepsilon} \frac{\chi^2(y)}{\psi(y)+1} = y^{1+\frac{\varepsilon}{2}} \chi^2(y) \frac{y^{\frac{\varepsilon}{2}}}{\psi(y)+1} > \\ &> y^{1+\frac{\varepsilon}{2}} \chi^2(y) \frac{y^{\frac{\varepsilon}{2}}}{\chi^2(0) + a \ln y + 1}, \end{aligned}$$

откуда следует свойство 3) для функции $\chi_1(y)$, так как в силу свойства 3) для функции $\chi(y)$ правая часть неравенства стремится к бесконечности при $y \rightarrow \infty$. Наконец, для того чтобы доказать, что функция $\chi_1(y)$ обладает свойством 4), заметим, что можно подобрать такое $h > 0$, что $\frac{y^h}{V \psi(y)+1}$ есть монотонно растущая функция для всех y . Действительно,

$$\begin{aligned} \left(\frac{y^{2h}}{\psi(y)+1} \right)' &= \frac{2hy^{2h-1} [\psi(y)+1] - y^{2h} \psi'(y)}{[\psi(y)+1]^2} = \\ &= y^{2h-1} \frac{2h [\psi(y)+1] - y \chi^2(y)}{[\psi(y)+1]^2} > 0 \end{aligned}$$

для всех достаточно больших положительных h , так как $y \chi^2(y) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \infty$, по свойству 2) функции $\chi(y)$, а $\psi(y) > 0$. Возьмем такое h и положим $m_1 = m + h$, где m есть величина из свойства 4) для функции $\chi(y)$. Тогда

$$y^{m_1} \chi_1(y) = y^{m+h} \frac{\chi(y)}{V \psi(y)+1} = y^m \chi(y) \frac{y^h}{V \psi(y)+1}$$

есть монотонно растущая функция, как произведение функций, монотонно растущих для всех y , т. е. выполнено свойство 4) для функции $\chi_1(y)$.

Из (3) следует, в силу свойства 1) функции $\chi(y)$, что $\psi_1(y)$ есть монотонно растущая от 0 при $y = 0$ до бесконечности при $y \rightarrow \infty$ и непрерывно дифференцируемая функция. Поэтому на прямой $x \geq 0$ определена обратная к ней функция $y = \bar{\psi}_1(x)$, тоже монотонно растущая от 0 при $x = 0$ до бесконечности при $x \rightarrow \infty$ и непрерывно дифференцируемая. Положим

$$f(x) = \int_0^x \bar{\psi}_1(\xi) d\xi. \quad (5)$$

Очевидно, что функция $f(x)$ имеет две непрерывные производные, причем $f'(x) = \bar{\psi}_1(x)$ есть функция, обратная к $\psi_1(y)$, так что

$$f''(x) = \frac{1}{\bar{\psi}_1'(f'(x))} = \frac{1}{\chi_1^2(f'(x))}. \quad (6)$$

Отметим, кроме того, что $f(x)$, $f'(x)$ и $f''(x)$ положительны, непрерывны и монотонно и неограниченно возрастают с ростом x .

Введем еще одну функцию $u(x)$ с периодом 2π , определенную на отрезке $[-\pi, \pi]$ равенствами:

$$u(x) = \begin{cases} \frac{(2r+1)!!}{2r!!} \int_0^{\frac{10}{\pi}x} (1-\xi^2)^r d\xi, & x \in \left[0, \frac{\pi}{10}\right], \\ 1, & x \in \left(\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{2}\right], \\ u(\pi-x), & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right], \\ -u(-x), & x \in [-\pi, 0), \end{cases} \quad (7)$$

где $r = E(m_1) + 2$ (m_1 — показатель степени y в свойстве 4) функции $\chi_1(y)$). Очевидно, что эта функция нечетна, имеет r непрерывных производных, удовлетворяет условиям:

$$|u(x)| \leq 1, \quad |u'(x)| < 10\sqrt{r}, \quad (8)$$

$$\left| \int_a^b u(x) dx \right| < \pi \quad \text{для любого отрезка } [a, b] \quad (9)$$

и раскладывается в равномерно и абсолютно сходящийся ряд из синусов:

$$u(x) = \sum_{p=1}^{\infty} b_p \sin px \quad (10)$$

такой, что при любом $s \leq m_1 - \frac{1}{2}$

$$\sum_{p=1}^{\infty} p^s |b_p| < \infty. \quad (11)$$

Выберем последовательность чисел

$$1 < c_1 < d_1 = c_1 + 2\pi < c_2 < d_2 < \dots < c_s < d_s < \dots, \quad (12)$$

удовлетворяющих условиям:

$$f'(c_1) > \pi, \quad (\alpha_1)$$

$$\frac{f'(d_{s-1})}{V c_s} < \frac{1}{4^s}, \quad (\alpha_2)$$

$$\frac{f'(d_{s-1})}{\sqrt[3]{f'(c_s)}} < \frac{1}{1000 \sqrt{r} 4^s} \quad (\alpha_3)$$

и условию (α_4) , которое подробно будет объяснено ниже, при построении последовательности функций $\{v_j(x)\}$.

Покажем, что условия $(\alpha_1) - (\alpha_3)$ непротиворечивы и что указанную выше последовательность построить можно. Выбор c_1 , удовлетворяющего условию (α_1) , осуществляется без труда, так как $f'(x)$ растет неограниченно. Выбор c_s и d_s при $s > 1$ производится индуктивно: после того как c_{s-1} и d_{s-1} уже выбраны, c_s выбирают столь большим, чтобы выполнялись условия (α_2) и (α_3) , что всегда возможно, так как при фиксирован-

ных c_{s-1} и d_{s-1} условия (α_2) и (α_3) выполняются для всех достаточно больших c_s . Это непосредственно очевидно для условия (α_2) и вытекает из неограниченного роста $f'(x)$ для условия (α_3) .

Теперь построим на отрезке $[0, 2\pi]$ последовательность функций $\{v_j(x)\}$. Положим

$$v_1(x) = 1 + u[f(c_1 + x) + \gamma_{11}], \quad (13)$$

где c_1 (из последовательности (12)) и γ_{11} подобраны так, что

$$\frac{f(d_1) - f(c_1) + \pi}{2\pi} \text{ и } \frac{f(c_1) + \gamma_{11} + 0,1\pi}{2\pi} \quad (14)$$

суть целые числа. Подобрать c_1 так, чтобы выполнялось первое условие (14), можно, так как числитель есть функция, непрерывная по c_1 ($d_1 = c_1 + 2\pi$) и неограниченно растущая, поскольку

$$f(d_1) - f(c_1) = f(c_1 + 2\pi) - f(c_1) = f'(c_1 + \theta 2\pi) 2\pi > f'(c_1) 2\pi,$$

а $f'(c_1)$ растет неограниченно с ростом c_1 . После того как c_1 выбрано, выбираем γ_{11} так, чтобы выполнялось второе условие (14). Вид функции $v_1(x)$ показан на рис. 1.

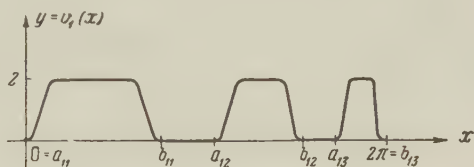


Рис. 1

Построение функции $v_j(x)$ при $j > 1$ осуществляется индуктивно. Пусть $v_{j-1}(x)$ уже построена. Предполагаем, что множество значений x , для которых $v_{j-1}(x) \neq 0$ есть сумма конечного числа интервалов без общих концов (a_{j-1k}, b_{j-1k}) , занумерованных слева направо. Число этих интервалов обозначим через k_{j-1} . Положим

$$v_j(x) = \begin{cases} 1 + u[f(c_j + \delta_{jk} + x) + \gamma_{jk}], & x \in (a_{j-1k}, b_{j-1k}), \\ 0, & x \notin \bigcup_k (a_{j-1k}, b_{j-1k}), \end{cases} \quad (15)$$

где $c_j, \delta_{jk} \geq \delta_{j,k-1}$ ($\delta_{j1} = 0$) и γ_{jk} последовательно подбираются так, чтобы

$$\frac{f(c_j + \delta_{jk} + b_{j-1k}) - f(c_j + \delta_{jk} + a_{j-1k}) + \pi}{2\pi}$$

и

$$\frac{f(c_j + \delta_{jk} + a_{j-1k}) + \gamma_{jk} + 0,1\pi}{2\pi} \quad (16)$$

были целыми числами. Подобрать таким образом c_j, δ_{jk} и γ_{jk} можно. Сначала подбирают c_j , удовлетворяющее первому условию (16) при $k=1, \delta_{j1} = 0$. Что это можно сделать, показывается так же, как при подборе c_1 . Подбрав c_j , последовательно подбирают δ_{jk} , что делается аналогично подбору c_1 . После того как c_j и все δ_{jk} подобраны, подбирают γ_{jk} , удовлетворяющие второму условию (16).

Вид части графика функции $v_j(x)$ изображен на рис. 2.

Наконец, определяем d_j равенством

$$d_j = c_j + \delta_{jk_{j-1}} + b_{j-1k_{j-1}}. \quad (17)$$

Условия (14), (16) и (17), наложенные на последовательность $\{c_j, d_j\}$, и составляют условие (α_4) .

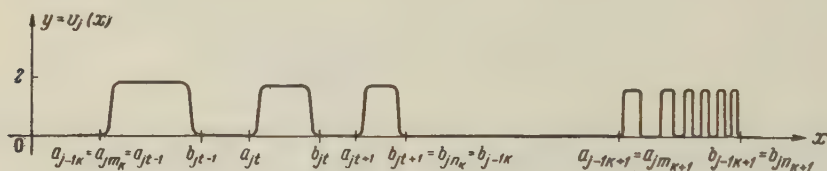


Рис. 2

Оценим величину k_j . Из построения функции $u(x)$ следует, что

$$1,2\pi = f(c_j + \delta_{jk} + b_{jt}) - f(c_j + \delta_{jk} + a_{jt}) = f'(c_j + \delta_{jk} + \xi_{jt})(b_{jt} - a_{jt}),$$

где t таково, что $(a_{jt}, b_{jt}) \subset (a_{j-1k}, b_{j-1k})$, и $a_{jt} < \xi_{jt} < b_{jt}$. Таким образом, для любых k и t имеем:

$$\frac{1,2\pi}{f'(c_j + \delta_{jk} + a_{jt})} > b_{jt} - a_{jt} > \frac{1,2\pi}{f'(c_j + \delta_{jk} + b_{jt})}, \quad (18)$$

или, более грубо,

$$\frac{1,2\pi}{f'(c_j)} > b_{jt} - a_{jt} > \frac{1,2\pi}{f'(d_j)}. \quad (19)$$

С другой стороны, интервалы (a_{jt}, b_{jt}) попарно не пересекаются и все лежат на отрезке $[0, 2\pi]$, поэтому

$$2\pi > \sum_{t=1}^{k_j} (b_{jt} - a_{jt}) > \frac{1,2\pi}{f'(d_j)} k_j,$$

откуда получаем необходимую оценку:

$$k_j < 2 f'(d_j). \quad (20)$$

Построенные функции $v_j(x)$ непрерывно дифференцируемы при любом j , в силу аналогичного свойства функций $u(x)$, $f(x)$ и условий (14) и (16). Покажем, что

$$\max_{0 \leq x \leq 2\pi} |v'_j(x)| \leq 10 \sqrt{r} f'(d_j). \quad (21)$$

Для этого заметим, что этот максимум достигается на одном из отрезков $[a_{j-1k}, b_{j-1k}]$ [см. (13) и (15)], а потому, в силу (18) и (17),

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq x \leq 2\pi} |v'_j(x)| &\leq \max_{c_j \leq x \leq d_j} |u[f(x)]'| = \\ &= \max_{c_j \leq x \leq d_j} |u'[f(x)] f'(x)| \leq 10 \sqrt{r} f'(d_j). \end{aligned}$$

Наконец, построим на отрезке $[0, 2\pi]$ две последовательности функций:

$$Q_l(x) = \prod_{j=1}^l v_j(x) \quad (22)$$

II

$$F_l(x) = \int_0^x Q_l(\xi) d\xi. \quad (23)$$

Эти функции непрерывно дифференцируемы,

$$0 \leq Q_l(x) \leq 2^l, \quad (24)$$

так как

$$0 \leq v_j(x) \leq 2, \quad (25)$$

а функции $F_l(x)$ — монотонно не убывающие, так как

$$F'_l(x) = Q_l(x) \geq 0.$$

Отметим, что для любого отрезка $[a, b] \subset [0, 2\pi]$

$$\max_{a \leq x \leq b} |Q'_l(x)| \leq 10 \sqrt{r} 2^l f'(d_l). \quad (26)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \max_{a \leq x \leq b} |Q'_l(x)| &= \max_{a \leq x \leq b} \left| \sum_{j=1}^l \frac{Q_l(x)}{v_j(x)} v'_j(x) \right| \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^l 2^{l-1} 10 \sqrt{r} f'(d_j) = 10 \sqrt{r} 2^{l-1} f'(d_l) \sum_{j=1}^l \frac{f'(d_j)}{f'(d_l)} < \\ &< 10 \sqrt{r} 2^{l-1} f'(d_l) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{4^s} < 10 \sqrt{r} 2^l f'(d_l), \end{aligned}$$

в силу (25), (21), монотонности $f'(x)$ и условий (α_1) и (α_3) .

Оценки интегралов. Выведем несколько оценок интегралов, которые будут полезны в дальнейшем. Для любого отрезка $[a, b] \subset [0, 2\pi]$ имеем:

$$\begin{aligned} &\left| \int_a^b Q_{l-1}(x) \cos(yx) [v_l(x) - 1] dx \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{k_{l-1}} \sum_{p=1}^{\infty} |b_p| \left| \int_{a_{l-1}t}^{b_{l-1}t} Q_{l-1}(x) \sin \{p[f(c_l + \delta_u + x) + \gamma_u] + yx\} dx \right| + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{k_{l-1}} \sum_{p=1}^{\infty} |b_p| \left| \int_{a_{l-1}t}^{b_{l-1}t} Q_{l-1}(x) \sin \{p[f(c_l + \delta_u + x) + \gamma_u] - yx\} dx \right|, \quad (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left| \int_a^b Q_{l-1}(x) \sin(yx) [v_l(x) - 1] dx \right| < \\ &< \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{k_{l-1}} \sum_{p=1}^{\infty} |b_p| \left| \int_{a_{l-1}t}^{b_{l-1}t} Q_{l-1}(x) \cos \{p[f(c_l + \delta_u + x) + \gamma_u] + yx\} dx \right| + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{k_{l-1}} \sum_{p=1}^{\infty} |b_p| \left| \int_{a_{l-1}t}^{b_{l-1}t} Q_{l-1}(x) \cos \{p[f(c_l + \delta_u + x) + \gamma_u] - yx\} dx \right|. \quad (28) \end{aligned}$$

Обе оценки выводятся одинаково. Выведем формулу (27). Для этого заметим, что, согласно построению $v_{l-1}(x)$, $Q_{l-1}(x) = 0$ всюду вне $\cup (a_{l-1l}, b_{l-1l})$. Поэтому

$$I = \left| \int_a^b Q_{l-1}(x) \cos(yx) [v_l(x) - 1] dx \right| \leq \sum_{l=1}^{k_{l-1}} \left| \int_{a_{l-1l}}^{b_{l-1l}} Q_{l-1}(x) \cos(yx) u[f(c_l + \delta_{ll} + x) + \gamma_{ll}] dx \right|, \quad (29)$$

откуда, в силу (10) и (11), получаем:

$$I \leq \sum_{l=1}^{k_{l-1}} \sum_{p=1}^{\infty} |b_p| \left| \int_{a_{l-1l}}^{b_{l-1l}} Q_{l-1}(x) \cos(yx) \sin p[f(c_l + \delta_{ll} + x) + \gamma_{ll}] dx \right|.$$

Пользуясь равенством

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)],$$

мы приходим к оценке (27).

При выводе оценки (28) следует использовать равенство

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)].$$

Далее, для любого отрезка $[a, b] \subset [0, 2\pi]$ и функции $g(x)$, имеющей на $[a, b]$ непрерывную, монотонную производную $g'(x)$ такую, что $|g'(x)| \geq M > 0$, имеем:

$$\left| \int_a^b Q_l(x) \cos[g(x)] dx \right| \leq \frac{2^{l+1}}{M} [1 + 10 \sqrt{r} f'(d_l)(b-a)], \quad (30)$$

$$\left| \int_a^b Q_l(x) \sin[g(x)] dx \right| \leq \frac{2^{l-1}}{M} [1 + 10 \sqrt{r} f'(d_l)(b-a)], \quad (31)$$

$$\left| \int_a^b Q_l(x) u[g(x)] dx \right| < \frac{\pi 2^l}{M} [1 + 10 \sqrt{r} f'(d_l)(b-a)]; \quad (32)$$

если же функция $g(x)$ такова, что имеет непрерывную вторую производную и $|g''(x)| \geq R > 0$ всюду на отрезке $[a, b]$, то

$$\left| \int_a^b Q_l(x) \cos[g(x)] dx \right| \leq \frac{6 \cdot 2^l}{\sqrt{R}} [1 + 10 \sqrt{r} f'(d_l)(b-a)], \quad (33)$$

$$\left| \int_a^b Q_l(x) \sin[g(x)] dx \right| \leq \frac{6 \cdot 2^l}{\sqrt{R}} [1 + 10 \sqrt{r} f'(d_l)(b-a)]. \quad (34)$$

Докажем оценки (30) и (33). Интегрируя по частям и используя (24) и (26), получаем:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b Q_l(x) \cos[g(x)] dx \right| &= \left| \left[Q_l(x) \int_a^x \cos[g(\xi)] d\xi \right]_a^b - \right. \\ &\quad \left. - \int_a^b \left(\int_a^x \cos[g(\xi)] d\xi \right) Q_l'(x) dx \right| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \leq |Q_l(b)| \left| \int_a^b \cos [g(\xi)] d\xi \right| + \int_a^b \left| \int_a^x \cos [g(\xi)] d\xi \right| |Q'_l(x)| dx \leq \\ & \leq 2^l \max_{a < x \leq b} \left| \int_a^x \cos [g(\xi)] d\xi \right| + \max_{a < x \leq b} \left| \int_a^x \cos [g(\xi)] d\xi \right| 10 \sqrt{r} 2^l f'(d_l) (b-a) = \\ & = 2^l \max_{a < x \leq b} \left| \int_a^x \cos [g(\xi)] d\xi \right| [1 + 10 \sqrt{r} f'(d_l) (b-a)]. \end{aligned} \quad (35)$$

Для вывода оценки (33) остается заметить, что функция $g(x)$ удовлетворяет условиям леммы Ван-дер-Корпута [см. (9), теорема 409] и потому для любого $x \in (a, b)$

$$\left| \int_a^x \cos [g(\xi)] d\xi \right| \leq \frac{6}{\sqrt{R}}.$$

Для того чтобы доказать формулу (30), следует в (35) оценить

$$\max_{a < x \leq b} \left| \int_a^x \cos [g(\xi)] d\xi \right|.$$

Функция $g(x)$ непрерывна и монотонна, так как $g'(x)$ сохраняет знак, а потому имеет непрерывную обратную функцию $\bar{g}(y)$ с непрерывной и монотонной производной, сохраняющей знак. Будем, для определенности, считать, что $\bar{g}'(y)$ монотонно убывает и положительна (остальные случаи рассматриваются аналогично) и сделаем замену переменных $\eta = g(\xi)$ в интеграле

$$\begin{aligned} \left| \int_a^x \cos g(\xi) d\xi \right| &= \left| \int_{\bar{g}(a)}^{\bar{g}(x)} \cos \eta \bar{g}'(\eta) d\eta \right| = \\ &= \left| \bar{g}'(\bar{g}(a)) \int_{\bar{g}(a)}^{\bar{g}(a)} \cos \eta d\eta \right| = \left| \frac{1}{\bar{g}'(a)} \int_{\bar{g}(a)}^{\bar{g}(a)} \cos \eta d\eta \right| \leq \frac{2}{M}; \end{aligned} \quad (36)$$

отсюда и из (35) следует (30).

Вывод оценок (31) и (34) — дословно такой же.

Оценка (32) производится так же и только в последнем шаге формулы (36) в числителе появляется π вместо 2, согласно формуле (9), т. е.

$$\left| \int_a^x u[g(\xi)] d\xi \right| \leq \frac{\pi}{M}. \quad (37)$$

Построение функции $F(x)$. Покажем, что последовательность функций $\{F_l(x)\}$, определенная формулой (23), сходится на $[0, 2\pi]$ равномерно, т. е. существует равномерно по $x \in [0, 2\pi]$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} F_l(x) = F(x). \quad (38)$$

Для этого, пользуясь формулами (23), (22), (29) при $y = 0$, оценкой (32), монотонностью $f'(x)$, оценкой (20) и условиями (α_1) и (α_3) , оценим

разность

$$\begin{aligned}
 |F_{l+1}(x) - F_l(x)| &= \left| \int_0^x [Q_{l+1}(\xi) - Q_l(\xi)] d\xi \right| = \\
 &= \left| \int_0^x Q_l(\xi) [v_{l+1}(\xi) - 1] d\xi \right| \leq \\
 &\leq \sum_{t=1}^{k_l} \left| \int_{a_{lt}}^{b_{lt}} Q_l(\xi) u[f(c_{l+1} + \delta_{l+1t} + \xi) + \gamma_{l+1t}] d\xi \right| \leq \\
 &\leq \sum_{t=1}^{k_l} \frac{\pi 2^l}{f'(c_{l+1})} [1 + 10\sqrt{r} f'(d_l)(b_{lt} - a_{lt})] = \\
 &= \frac{\pi 2^l}{f'(c_{l+1})} \left[k_l + 10\sqrt{r} f'(d_l) \sum_{t=1}^{k_l} (b_{lt} - a_{lt}) \right] < \\
 &< \frac{\pi 2^l}{f'(c_{l+1})} [2f'(d_l) + 10\sqrt{r} f'(d_l) 2\pi] = \\
 &= \pi [1 + 10\pi\sqrt{r}] 2^{l+1} \frac{f'(d_l)}{f'(c_{l+1})} < \frac{1}{2^{l+1}}, \quad (39)
 \end{aligned}$$

откуда следует равномерная сходимость $F_l(x)$. Таким образом, предельная функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[0, 2\pi]$ и монотонно не убывает, так как все $F_l(x)$ монотонно не убывают. Покажем, что функция $F(x)$ не есть тождественная постоянная, для чего достаточно показать, что $F(2\pi) > 0$, так как $F(0) = 0$. В силу формул (23), (22), (13), (37), монотонности $f'(x)$ и условия (α_1) ,

$$\begin{aligned}
 F_1(2\pi) &= \int_0^{2\pi} [1 + u[f(c_1 + \xi) + \gamma_{11}]] d\xi = 2\pi + \int_0^{2\pi} u[f(c_1 + \xi) + \gamma_{11}] d\xi \geq \\
 &\geq 2\pi - \left| \int_0^{2\pi} u[f(c_1 + \xi) + \gamma_{11}] d\xi \right| > 2\pi - \frac{\pi}{f'(c_1)} > 5,
 \end{aligned}$$

но для любого l , в силу (39),

$$|F_1(2\pi) - F_l(2\pi)| \leq \sum_{k=1}^{l-1} |F_k(2\pi) - F_{k+1}(2\pi)| < \sum_{k=1}^{l-1} \frac{1}{2^k} < 1.$$

Из последних двух неравенств следует, что $F(2\pi) > 4$.

Сингулярность. Докажем, что построенная функция $F(x)$ постоянна на каждом смежном интервале некоторого совершенного множества меры нуль. Для этого заметим, что если на некотором отрезке $[a, b]$ функция $F_l(x)$ постоянна, то и все $F_s(x)$ при $s > l$ постоянны на этом же отрезке, и, следовательно, на этом отрезке будет постоянна и предельная функция $F(x)$. Действительно,

$$F'_s(x) = Q_s(x) = \prod_{j=1}^s v_j(x) = Q_l(x) \prod_{j=l+1}^s v_j(x) = F'_l(x) \prod_{j=l+1}^s v_j(x),$$

откуда видно, что если $F'_l(x) = 0$ на $[a, b]$, то и $F'_s(x) = 0$ на $[a, b]$ для всех $s > l$.

Пусть \mathcal{G}_j обозначает множество всех x , для которых $F'_j(x) \neq 0$. Из определения функций $Q_j(x)$, $F_j(x)$ и $v_j(x)$ формулами (13), (15), (22) и

(23) следует, что

$$\mathcal{G}_j = \bigcup_{i=1}^{k_j} (a_{ji}, b_{ji}).$$

Рассмотрим замыкание \mathcal{G}_j :

$$\overline{\mathcal{G}}_j = \bigcup_{i=1}^{k_j} [a_{ji}, b_{ji}]. \quad (40)$$

Отметим, что на каждом смежном интервале множества $\overline{\mathcal{G}}_j$ функция $F_j(x)$ постоянна. Легко видеть [см. рис. 2], что $\overline{\mathcal{G}}_j$ получается из $\overline{\mathcal{G}}_{j-1}$ (считая $\overline{\mathcal{G}}_0 = [0, 2\pi]$) выкидыванием конечного числа интервалов без общих концов, именно, из каждого отрезка $[a_{j-1k}, b_{j-1k}]$, составляющего множество $\overline{\mathcal{G}}_{j-1}$, выкидываются интервалы (b_{ji}, a_{ji+1}) , попавшие на этот отрезок. Из построения функций $v_j(x)$ по формулам (14) и (16) следует, что эти интервалы целиком лежат на соответствующем отрезке. Но это есть процесс построения некоторого совершенного множества

$$\mathcal{G} = \bigcap_{j=1}^{\infty} \overline{\mathcal{G}}_j.$$

На каждом смежном интервале этого совершенного множества функция $F(x)$ постоянна. Действительно, пусть Δ — смежный интервал множества \mathcal{G} . Тогда Δ есть смежный интервал для некоторого $\overline{\mathcal{G}}_j$ и, следовательно, $F_j(x)$ постоянна на Δ , откуда вытекает постоянство $F(x)$ на Δ в силу замечания, сделанного выше. Остается показать, что мера множества \mathcal{G}

$$m\mathcal{G} = 0.$$

Так как $\overline{\mathcal{G}}_j \subset \overline{\mathcal{G}}_{j-1}$, то

$$m\mathcal{G} = m \bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{\mathcal{G}}_j = \lim_{j \rightarrow \infty} m\overline{\mathcal{G}}_j. \quad (41)$$

Оценим меру множества $\overline{\mathcal{G}}_j$. Для этого покажем, что если точки b_{jt-1} , a_{jt} и b_{jt} принадлежат одному и тому же отрезку $[a_{j-1k}, b_{j-1k}]$, то

$$\frac{a_{jt} - b_{jt-1}}{b_{jt} - a_{jt}} > \frac{2}{3}. \quad (42)$$

Чтобы это доказать, заметим, что из построения функций $u(x)$ и $v_j(x)$ следует, что

$$\begin{aligned} 0,8\pi &= f(c_j + \delta_{jk} + a_{jt}) - f(c_j + \delta_{jk} + b_{jt-1}) = \\ &= f'(c_j + \delta_{jk} + \xi_{jt})(a_{jt} - b_{jt-1}), \quad b_{jt-1} < \xi_{jt} < a_{jt}, \end{aligned}$$

или, в силу монотонности $f'(x)$,

$$a_{jt} - b_{jt-1} > \frac{0,8\pi}{f'(c_j + \delta_{jk} + a_{jt})}.$$

Отсюда и из (18) получаем требуемое:

$$\frac{a_{jt} - b_{jt-1}}{b_{jt} - a_{jt}} > \frac{\frac{0,8\pi}{f'(c_j + \delta_{jk} + a_{jt})}}{\frac{1,2\pi}{f'(c_j + \delta_{jk} + a_{jt})}} = \frac{2}{3}.$$

Из (42) следует, что

$$\frac{b_{jt} - a_{jt}}{b_{jt} - b_{jt-1}} = \frac{b_{jt} - a_{jt}}{b_{jt} - a_{jt} + a_{jt} - b_{jt-1}} = \frac{1}{1 + \frac{a_{jt} - b_{jt-1}}{b_{jt} - a_{jt}}} < \frac{1}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{3}{5}. \quad (43)$$

Пользуясь этим неравенством, покажем, что

$$m_{\mathcal{G}_j}^{\overline{\mathcal{O}}} < \frac{3}{4} m_{\mathcal{G}_{j-1}}^{\overline{\mathcal{O}}} \quad (44)$$

для всех номеров j . Обозначим через m_k наименьший индекс t , для которого $a_{jt} \geq a_{j-1k}$, а через n_k — наибольший индекс t , для которого $b_{jt} \leq b_{j-1k}$. Тогда, в силу (40), (43), (19) и замечая, что $a_{jm_k} = a_{j-1k}$ и $b_{jn_k} = b_{j-1k}$ (см. рис. 2), имеем:

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{G}_j}^{\overline{\mathcal{O}}} &= \sum_{t=1}^{k_j} (b_{jt} - a_{jt}) = \sum_{k=1}^{k_{j-1}} \sum_{t=m_k}^{n_k} (b_{jt} - a_{jt}) = \\ &= \sum_{k=1}^{k_{j-1}} \left[(b_{jm_k} - a_{jm_k}) + \sum_{t=m_k+1}^{n_k} (b_{jt} - a_{jt}) \right] = \\ &= \sum_{k=1}^{k_{j-1}} \left[(b_{jm_k} - a_{jm_k}) + \sum_{t=m_k+1}^{n_k} \frac{b_{jt} - a_{jt}}{b_{jt} - b_{jt-1}} (b_{jt} - b_{jt-1}) \right] < \\ &< \sum_{k=1}^{k_{j-1}} \left[(b_{jm_k} - a_{jm_k}) + \sum_{t=m_k+1}^{n_k} \frac{3}{5} (b_{jt} - b_{jt-1}) \right] = \\ &= \frac{3}{5} \sum_{k=1}^{k_{j-1}} \left[\frac{5}{3} (b_{jm_k} - a_{jm_k}) + \sum_{t=m_k+1}^{n_k} (b_{jt} - b_{jt-1}) \right] = \\ &= \frac{3}{5} \sum_{k=1}^{k_{j-1}} \left[\frac{2}{3} (b_{jm_k} - a_{jm_k}) + (b_{jm_k} - a_{jm_k}) + (b_{jn_k} - b_{jm_k}) \right] = \\ &= \frac{3}{5} \sum_{k=1}^{k_{j-1}} \left[\frac{2}{3} (b_{jm_k} - a_{jm_k}) + (b_{jn_k} - a_{jm_k}) \right] = \\ &= \frac{3}{5} \sum_{k=1}^{k_{j-1}} \left[\frac{2}{3} (b_{jm_k} - a_{jm_k}) + (b_{j-1k} - a_{j-1k}) \right] = \\ &= \frac{3}{5} \sum_{k=1}^{k_{j-1}} (b_{j-1k} - a_{j-1k}) \left[\frac{2}{3} \frac{b_{jm_k} - a_{jm_k}}{b_{j-1k} - a_{j-1k}} + 1 \right] < \\ &< \frac{3}{5} \sum_{k=1}^{k_{j-1}} (b_{j-1k} - a_{j-1k}) \left[\frac{2}{3} \frac{\frac{1,2\pi}{f'(c_j)}}{\frac{1,2\pi}{f'(d_{j-1})}} + 1 \right] = \\ &= \frac{3}{5} \left[\frac{2}{3} \frac{f'(d_{j-1})}{f'(c_j)} + 1 \right] m_{\mathcal{G}_{j-1}}^{\overline{\mathcal{O}}} < \frac{3}{4} m_{\mathcal{G}_{j-1}}^{\overline{\mathcal{O}}}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Из (44) и (41) следует, что $m_{\mathcal{G}}^{\overline{\mathcal{O}}} = 0$.

Оценка порядка убывания преобразования Фурье — Стильтьеса функции $F(x)$, т. е. оценка интеграла

$$\int_0^{2\pi} e^{-iyx} dF(x) = \int_0^{2\pi} \cos(yx) dF(x) - i \int_0^{2\pi} \sin(yx) dF(x). \quad (45)$$

Оба интеграла в правой части равенства (45) оцениваются одинаково и эта оценка не зависит от знака y . Будем считать $y > 0$ и оценим интеграл, содержащий косинус. В силу равенства (38) и того, что все $F_l(x)$ имеют ограниченные в совокупности вариации, имеем:

$$\int_0^{2\pi} \cos(yx) dF(x) = \lim_{l \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \cos(yx) dF_l(x) = \lim_{l \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \cos(yx) Q_l(x) dx,$$

т. е. для любого y существует L_y такое, что для всех $l > L_y$

$$\left| \int_0^{2\pi} \cos(yx) dF(x) - \int_0^{2\pi} \cos(yx) Q_l(x) dx \right| < \chi_1(y),$$

или

$$\left| \int_0^{2\pi} \cos(yx) dF(x) \right| < \chi_1(y) + \left| \int_0^{2\pi} \cos(yx) Q_l(x) dx \right|. \quad (46)$$

Покажем, что это неравенство можно переписать в виде

$$\left| \int_0^{2\pi} \cos(yx) dF(x) \right| < O(\chi_1(y)) + \left| \int_0^{2\pi} \cos(yx) Q_k(x) dx \right|, \quad (47)$$

где k таково, что

$$\frac{1}{2} f'(c_k) \leq y < \frac{1}{2} f'(c_{k+1}). \quad (48)$$

Действительно, если $k > L_y$, то неравенство (47) очевидно в силу неравенства (46). Если же $k > L_y$, т. е.

$$\frac{1}{2} f'(c_s) > y \quad (s > k), \quad (49)$$

то при любом $l > L_y$ имеем:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{2\pi} \cos(yx) Q_l(x) dx \right| &\leq \left| \int_0^{2\pi} \cos(yx) Q_k(x) dx \right| + \\ &+ \sum_{s=k+1}^l \left| \int_0^{2\pi} \cos(yx) Q_s(x) dx - \int_0^{2\pi} \cos(yx) Q_{s-1}(x) dx \right|. \end{aligned} \quad (50)$$

Докажем, что при соблюдении неравенства (49)

$$I_{sy} = \left| \int_0^{2\pi} \cos(yx) Q_s(x) dx - \int_0^{2\pi} \cos(yx) Q_{s-1}(x) dx \right| = o\left(\frac{1}{2^s} \chi_1(y)\right). \quad (51)$$

Из (22), (27), (31), (49), (11), (20), условия (α_3) , свойства 3) функции

$\chi_1(y)$ и монотонности $\chi_1(y)$ и $f'(x)$ получаем:

$$\begin{aligned}
 I_{sy} &= \left| \int_0^{2\pi} Q_{s-1}(x) \cos(yx) [v_s(x) - 1] dx \right| \leq \\
 &\leq \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{k_{s-1}} \sum_{p=1}^{\infty} |b_p| \left| \int_{a_{s-1t}}^{b_{s-1t}} Q_{s-1}(x) \sin \{p[f(c_s + \delta_{st} + x) + \gamma_{st}] + yx\} dx \right| + \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{k_{s-1}} \sum_{p=1}^{\infty} |b_p| \left| \int_{a_{s-1t}}^{b_{s-1t}} Q_{s-1}(x) \sin \{p[f(c_s + \delta_{st} + x) + \gamma_{st}] - yx\} dx \right| \leq \\
 &\leq \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{k_{s-1}} \sum_{p=1}^{\infty} |b_p| \frac{2^s}{pf'(c_s) + y} [1 + 10\sqrt{r} f'(d_{s-1})(b_{s-1t} - a_{s-1t})] + \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{k_{s-1}} \sum_{p=1}^{\infty} |b_p| \frac{2^s}{pf'(c_s) - y} [1 + 10\sqrt{r} f'(d_{s-1})(b_{s-1t} - a_{s-1t})] < \\
 &< 2^s \sum_{t=1}^{k_{s-1}} \sum_{p=1}^{\infty} |b_p| \frac{1 + 10\sqrt{r} f'(d_{s-1})(b_{s-1t} - a_{s-1t})}{\frac{1}{2} pf'(c_s)} = \\
 &= \frac{2^{s+1}}{f'(c_s)} \left(\sum_{p=1}^{\infty} p^{-1} |b_p| \right) \sum_{t=1}^{k_{s-1}} [1 + 10\sqrt{r} f'(d_{s-1})(b_{s-1t} - a_{s-1t})] = \\
 &= \frac{2^{s+1}}{f'(c_s)} \left(\sum_{p=1}^{\infty} p^{-1} |b_p| \right) \left[k_{s-1} + 10\sqrt{r} f'(d_{s-1}) \sum_{t=1}^{k_{s-1}} (b_{s-1t} - a_{s-1t}) \right] < \\
 &< \frac{2^{s+1}}{f'(c_s)} \left(\sum_{p=1}^{\infty} p^{-1} |b_p| \right) [2f'(d_{s-1}) + 10\sqrt{r} f'(d_{s-1}) 2\pi] \leq \\
 &\leq [2 + 20\pi\sqrt{r}] \left(\sum_{p=1}^{\infty} p^{-1} |b_p| \right) 2^{s+1} \frac{f'(d_{s-1})}{f'(c_s)} = \\
 &= [2 + 20\pi\sqrt{r}] \left(\sum_{p=1}^{\infty} p^{-1} |b_p| \right) 2^{s+1} \frac{f'(d_{s-1})}{\sqrt[3]{f'(c_s)}} \frac{\chi_1(f'(c_s))}{[f'(c_s)]^{\frac{2}{3}} \chi_1(f'(c_s))} < \\
 &< [2 + 20\pi\sqrt{r}] \left(\sum_{p=1}^{\infty} p^{-1} |b_p| \right) \frac{1}{1000\sqrt{r} 2^{s-1}} \frac{\chi_1(y)}{[f'(c_s)]^{\frac{2}{3}} \chi_1(f'(c_s))} = o\left(\frac{1}{2^s} \chi_1(y)\right),
 \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Из (46), (50) и (51) следует (47).

Остается показать, что для интеграла в правой части неравенства (47) имеет место равенство

$$\int_0^{2\pi} \cos(yx) Q_k(x) dx = o(\chi(y)). \quad (52)$$

Пользуясь определением (22) и оценками (30) и (27), имеем:

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{2\pi} \cos(yx) Q_k(x) dx \right| = \left| \int_0^{2\pi} \cos(yx) Q_{k-1}(x) v_k(x) dx \right| \leq \\ & \leq \left| \int_0^{2\pi} Q_{k-1}(x) \cos(yx) dx \right| + \left| \int_0^{2\pi} Q_{k-1}(x) [v_k(x) - 1] \cos(yx) dx \right| \leq \\ & \leq \frac{2^k}{y} [1 + 10 \sqrt{r} f'(d_{k-1}) 2\pi] + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{k_{k-1}} \sum_{p=1}^{\infty} |b_p| \left| \int_{a_{k-1t}}^{b_{k-1t}} Q_{k-1}(x) \sin \{p[f(c_k + \delta_{kt} + x) + \gamma_{kt}] + yx\} dx \right| + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{k_{k-1}} \sum_{p=1}^{\infty} |b_p| \left| \int_{a_{k-1t}}^{b_{k-1t}} Q_{k-1}(x) \sin \{p[f(c_k + \delta_{kt} + x) + \gamma_{kt}] - yx\} dx \right|. \quad (53) \end{aligned}$$

Для первого слагаемого в правой части (53) при помощи условия (α_1) , соотношений (48), свойства 3) функции $\chi_1(y)$ и условия (α_3) легко получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{2^k}{y} [1 + 10 \sqrt{r} f'(d_{k-1}) 2\pi] < [1 + 20\pi \sqrt{r}] 2^k \frac{f'(d_{k-1})}{\sqrt[3]{y}} \cdot \frac{\chi_1(y)}{y^3 \chi_1(y)} < \\ & < [1 + 20\pi \sqrt{r}] 2^k \frac{f'(d_{k-1})}{\sqrt[3]{\frac{1}{2} f'(c_k)}} o(\chi_1(y)) = o(\chi_1(y)). \quad (54) \end{aligned}$$

Второе слагаемое в правой части (53) оценивается при помощи соотношений (31), (11), (20) и положительности $f'(x)$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{k_{k-1}} \sum_{p=1}^{\infty} |b_p| \left| \int_{a_{k-1t}}^{b_{k-1t}} Q_{k-1}(x) \sin \{p[f(c_k + \delta_{kt} + x) + \gamma_{kt}] + yx\} dx \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{k_{k-1}} \sum_{p=1}^{\infty} |b_p| \frac{2^k}{y} [1 + 10 \sqrt{r} f'(d_{k-1}) (b_{k-1t} - a_{k-1t})] = \\ & = \frac{1}{2} \left(\sum_{p=1}^{\infty} |b_p| \right) \frac{2^k}{y} \left[k_{k-1} + 10 \sqrt{r} f'(d_{k-1}) \sum_{t=1}^{k_{k-1}} (b_{k-1t} - a_{k-1t}) \right] < \\ & < \frac{1}{2} \left(\sum_{p=1}^{\infty} |b_p| \right) \frac{2^k}{y} [2f'(d_{k-1}) + 20\pi \sqrt{r} f'(d_{k-1})] = o(\chi_1(y)), \quad (55) \end{aligned}$$

как и при оценке (54).

Для оценки третьего слагаемого в правой части неравенства (53) переменим порядок суммирования:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{k_{k-1}} \sum_{p=1}^{\infty} |b_p| \left| \int_{a_{k-1t}}^{b_{k-1t}} Q_{k-1}(x) \sin \{p[f(c_k + \delta_{kt} + x) + \gamma_{kt}] + yx\} dx \right| = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} |b_p| \sum_{t=1}^{k_{k-1}} \left| \int_{a_{k-1t}}^{b_{k-1t}} Q_{k-1}(x) \sin \{p[f(c_k + \delta_{kt} + x) + \gamma_{kt}] - yx\} dx \right| \quad (56) \end{aligned}$$

и внутреннюю сумму разобьем на две:

$$\sum_{t=1}^{k_{k-1}} = \sum_{t_1} + \sum_{t_2}, \quad (57)$$

исходя из следующих соображений. Производная аргумента синуса

$$\{p[f(c_k + \delta_{kt} + x) + \gamma_{kt}] - yx\}' = pf'(c_k + \delta_{kt} + x) - y$$

при фиксированных p и y есть монотонно растущая функция от t и x , так как $\delta_{kt} \geq \delta_{k,t-1}$, $b_{k,t-1} < a_{kt} \leq x \leq b_{kt}$ и $f'(x)$ — монотонно растущая функция. Поэтому на отрезке $[0, 2\pi]$ в типичном случае найдутся равно две точки a и b такие, что

$$pf'(c_k + \delta_{kt} + x) - y \leq -\frac{1}{2}y \text{ при } x \in [a_{k-1t}, b_{k-1t}] \cap [0, a] = \Delta_{1t}, \quad (58)$$

$$-\frac{1}{2}y < pf'(c_k + \delta_{kt} + x) - y < \frac{1}{2}y \text{ при } x \in [a_{k-1t}, b_{k-1t}] \cap [a, b] = \Delta_{2t}, \quad (59)$$

$$pf'(c_k + \delta_{kt} + x) - y \geq \frac{1}{2}y \text{ при } x \in [a_{k-1t}, b_{k-1t}] \cap [b, 2\pi] = \Delta_{3t}. \quad (60)$$

Во вторую сумму \sum_2 собираем интегралы по отрезкам Δ_{2t} (формула (59)), а в первую сумму \sum_1 собираем интегралы по всем остальным отрезкам Δ_{1t} (формулы (58), (60)). Сразу заметим, что кроме типичного случая возможны еще следующие два:

1. Не существует ни точки a , ни точки b . Тогда все отрезки интегрирования относятся к одному из типов (58)–(60) и нет надобности в разбиении (57).

2. Не существует одной из точек: или a , или b . Тогда нет отрезков типа (58) или (60), соответственно, и разбиение (57) следует произвести.

Таким образом, для оценки третьего слагаемого из правой части (53) достаточно оценить суммы \sum_1 и \sum_2 .

При оценке \sum_1 следует учесть, что на отрезке интегрирования имеем:

$$|pf'(c_k + \delta_{kt} + x) - y| \geq \frac{1}{2}y.$$

Тогда, воспользовавшись формулами (31), (11) и (20), получаем:

$$\begin{aligned} \sum_t \left| \int_{\Delta_{1t}} Q_{k-1}(x) \sin \{p[f(c_k + \delta_{kt} + x) + \gamma_{kt}] - yx\} dx \right| &\leq \\ &\leq \sum_{t=1}^{k_{k-1}} \frac{2^k}{2} [1 + 10 \sqrt{r} f'(d_{k-1}) (b_{k-1t} - a_{k-1t})] < \\ &< \frac{2^{k+1}}{y} [2f'(d_{k-1}) + 20\pi \sqrt{r} f'(d_{k-1})] = o(\chi_1(y)), \end{aligned} \quad (61)$$

как и при оценке (54).

Оценивая сумму \sum_1 , воспользуемся оценкой (34), монотонностью $f''(x)$, обозначением β_t для левого конца интервала Δ_{2t} , равенствами (6), монотонностью $\chi_1(y)$ и тем, что $f' > \frac{y}{2p}$ в силу (59), оценкой (20) и свойством 4) для функции $\chi_1(y)$. Мы получим:

$$\begin{aligned}
& \sum_t \left| \int_{\Delta_{2t}} Q_{k-1}(x) \sin \{p[f(c_k + \delta_{kt} + x) + \gamma_{kt}] - yx\} dx \right| \leq \\
& \leq \sum_t \frac{6 \cdot 2^{k-1}}{\sqrt{p f''(c_k + \delta_{kt} + \beta_t)}} [1 + 10 \sqrt{r} f'(d_{k-1}) \Delta_{2t}] = \\
& = 3 \frac{2^k}{\sqrt{p}} \sum_t \chi_1(f'(c_k + \delta_{kt} + \beta_t)) [1 + 10 \sqrt{r} f'(d_{k-1}) \Delta_{2t}] < \\
& < 3 \frac{2^k}{\sqrt{p}} \sum_{t=1}^{k_{k-1}} \chi_1\left(\frac{y}{2p}\right) [1 + 10 \sqrt{r} f'(d_{k-1}) \Delta_{2t}] < \\
& < 3 \frac{2^k}{\sqrt{p}} (2p)^{m_1} \chi_1(y) \sum_{t=1}^{k_{k-1}} [1 + 10 \sqrt{r} f'(d_{k-1}) \Delta_{2t}] < \\
& < \frac{3}{\sqrt{p}} 2^k (2p)^{m_1} \chi_1(y) [2f'(d_{k-1}) + 20\pi \sqrt{r} f'(d_{k-1})] = \\
& = 3 \cdot 2^{m_1} p^{m_1 - \frac{1}{2}} [2 + 20\pi \sqrt{r}] 2^k \frac{\chi(y)}{\sqrt{\psi(y) + 1}} f'(d_{k-1}) = o(p^{m_1 - \frac{1}{2}} \chi(y)), \quad (62)
\end{aligned}$$

так как, в силу условий (48), монотонности функции $\chi_1(y)$ и того, что $\psi_1(y)$ и $f'(x)$ — обратные функции [см. (5)],

$$\begin{aligned}
\psi(y) & > \psi_1(y) = \int_0^y \chi_1^2(\eta) d\eta > \int_0^{\frac{1}{2} f'(c_k)} \chi_1^2(\eta) d\eta = \\
& = \frac{1}{2} \int_0^{f'(c_k)} \chi_1^2\left(\frac{1}{2} \zeta\right) d\zeta > \frac{1}{2} \int_0^{f'(c_k)} \chi_1^2(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2} \psi_1(f'(c_k)) = \frac{1}{2} c_k.
\end{aligned}$$

Отсюда и из условия (α_2) получаем:

$$\frac{2^k f'(d_{k-1})}{\sqrt{\psi(y) + 1}} < \frac{2^k f'(d_{k-1})}{\sqrt{\frac{1}{2} c_k}} < \frac{1}{2^{k-1}},$$

что доказывает оценку (62).

Из (62) и (61) следует, в силу (2), что внутренняя сумма в (56) имеет порядок $o(p^{m_1 - \frac{1}{2}} \chi(y))$, и, учитывая (11), получаем оценку третьего слагаемого в правой части (53):

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{k_{k-1}} \sum_{p=1}^{\infty} |b_p| \left| \int_{a_{k-1}t}^{b_{k-1}t} Q_{k-1}(x) \sin \{p[f(c_k + \delta_{kt} + x) + \gamma_{kt}] - yx\} dx \right| = \\
& = \sum_{p=1}^{\infty} |b_p| o(p^{m_1 - \frac{1}{2}} \chi(y)) = o(\chi(y)) \sum_{p=1}^{\infty} p^{m_1 - \frac{1}{2}} |b_p| = o(\chi(y)). \quad (63)
\end{aligned}$$

Окончательно из (63), (55) и (54) следует (52), в силу равенства (2), а из (52) и (47) следует, в силу (2) и (45), что

$$\int_0^{2\pi} e^{-iyx} dF(x) = o(\chi(|y|)).$$

Таким образом, основная лемма полностью доказана.

Доказательство теоремы 1 проводим обычным методом Меньшова. При помощи построенной в основной лемме функции $F(x)$ определим на отрезке $[0, 2\pi]$ одностороннюю функцию

$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} \mathcal{F}(2x), & x \in [0, \pi], \\ \mathcal{F}(4\pi - 2x), & x \in [\pi, 2\pi]. \end{cases} \quad (64)$$

В силу результатов основной леммы, эта функция постоянна на каждом смежном интервале некоторого совершенного множества E меры нуль. Коэффициенты Фурье — Стильтьеса этой функции α_n имеют порядок $o(\chi(|n|))$:

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} d\mathcal{F}(x) = o(\chi(|n|)). \quad (65)$$

(Заметим, что $\alpha_0 = 0$. Поэтому всюду ниже считаем $n \neq 0$.) Действительно, из (64) следует:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} d\mathcal{F}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-inx} dF(2x) + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} e^{-inx} dF(4\pi - 2x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-i\frac{n}{2}\xi} dF(\xi) - \\ &- \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{i\frac{n}{2}\xi} dF(\xi) = o\left(\chi\left(\left|\frac{n}{2}\right|\right)\right) = o(\chi(|n|)), \end{aligned}$$

в силу результатов основной леммы и свойства 4) функции $\chi(y)$.

Покажем, что ряд

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \alpha_n e^{inx} \quad (66)$$

сходится к нулю на каждом смежном интервале множества E , т. е. является тригонометрическим нуль-рядом.

Формально дважды проинтегрированный ряд (66) имеет вид

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} -\frac{\alpha_n}{n^2} e^{inx} \quad (67)$$

и сходится равномерно к непрерывной функции, линейной на каждом смежном интервале множества E .

В самом деле, разложим в равномерно сходящийся ряд Фурье

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} a_n e^{inx} \quad (68)$$

непрерывно дифференцируемую функцию

$$\Phi(x) = \int_0^x [\mathcal{F}(\xi) - a] d\xi, \quad a = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{F}(\xi) d\xi.$$

Для этой функции

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi) = 0, \quad \Phi'(x) = \mathcal{F}(x) - a, \quad \Phi'(0) = \Phi'(2\pi) = -a,$$

в силу определения (64) функции $\mathcal{F}(x)$. Кроме того, $\Phi(x)$ линейна на каждом смежном интервале множества E , так как на этих интервалах $\Phi'(x) = \mathcal{F}(x) - a$ постоянна. Двукратным интегрированием по частям получаем:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} \Phi(x) dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{in} e^{-inx} \Phi(x) \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{in} \int_0^{2\pi} e^{-inx} \Phi'(x) dx \right] = \\ &= \frac{1}{\pi in} \int_0^{2\pi} e^{-inx} \Phi'(x) dx = \frac{1}{\pi in} \left[-\frac{1}{in} e^{-inx} \Phi(x) \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{in} \int_0^{2\pi} e^{-inx} d\Phi(x) \right] = \\ &= -\frac{1}{\pi n^2} \int_0^{2\pi} e^{-inx} d[\mathcal{F}(x) - a] = -\frac{1}{\pi n^2} \int_0^{2\pi} e^{-inx} d\mathcal{F}(x) = -\frac{a_n}{n^2}, \quad (69) \end{aligned}$$

в силу (65), т. е. ряды (67) и (68) совпадают. Но ряд (68), или, что то же, ряд (67), сходится равномерно к $\Phi(x)$, что и доказывает наше утверждение о ряде (67). Отсюда, согласно принципу локализации Римана для тригонометрических рядов [см. (2)], следует, что ряд (66) сходится к нулю на каждом смежном интервале совершенного множества E . Остается только отметить, что из соотношения (69) следует, что не все $a_n = 0$, так как иначе мы имели бы, что все $a_n = 0$, что невозможно.

Теорема 1 полностью доказана.

Простым следствием из основной леммы, кроме теоремы 1, является также теорема о преобразовании Фурье — Стильтеса непрерывной, монотонно не убывающей и сингулярной функции, заданной на всей прямой $-\infty < x < +\infty$. Как известно, интеграл квадрата модуля этого преобразования расходится. Тот же факт, что этот интеграл может расходиться, в некотором смысле, как угодно медленно, утверждает следующая

ТЕОРЕМА 2. На всей прямой $-\infty < x < +\infty$ существует такая непрерывная, монотонно не убывающая функция $\mathcal{F}(x)$, $\mathcal{F}(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$, $\mathcal{F}(x) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow +\infty$, постоянная на каждом смежном интервале некоторого совершенного множества меры нуль и не сводящаяся к тождественной постоянной вне любого отрезка, что ее преобразование

Фурье — Стильтьеса

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyx} d\mathcal{F}(x) = o(\chi(|y|)),$$

где $\chi(y)$ есть функция, обладающая свойствами, перечисленными в теореме 1.

Для доказательства теоремы 2 возьмем числовой ряд с положительными членами a_ν ($\nu = 0, 1, 2, \dots$), сходящийся к единице. Обозначим $b_{-k} = a_{2k}$, $b_{k+1} = a_{2k+1}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$),

$$\sigma_s = \sum_{k=-\infty}^{s-1} b_k \quad (70)$$

и определим функцию

$$\mathcal{F}(x) = \frac{b_s F(x - 2\pi(s-1))}{F(2\pi)} + \sigma_s, \quad x \in [2\pi(s-1), 2\pi s],$$

где $F(x)$ — функция, построенная в основной лемме. Так как $F(0) = 0$, то функция $\mathcal{F}(x)$ непрерывна. Кроме того, $\mathcal{F}(x)$ постоянна на каждом смежном интервале некоторого совершенного множества меры нуль, ибо этим свойством обладает функция $F(x)$. То, что $\mathcal{F}(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$ и $\mathcal{F}(x) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow +\infty$, следует из сходимости к единице ряда (70) и определения функции $\mathcal{F}(x)$. Наконец,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyx} d\mathcal{F}(x) &= \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \frac{b_s}{F(2\pi)} \int_{2\pi(s-1)}^{2\pi s} e^{-iyx} dF(x - 2\pi(s-1)) = \\ &= \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \frac{b_s}{F(2\pi)} e^{-iy 2\pi(s-1)} \int_0^{2\pi} e^{-iy\xi} dF(\xi) = o(\chi(|y|)), \end{aligned}$$

в силу результатов основной леммы.

Теорема 2 полностью доказана.

Приношу глубокую благодарность моему руководителю А. Н. Колмогорову, поставившему передо мной эту задачу и давшему ряд ценных указаний.

Поступило
2. X. 1956

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Меньшов Д. Е., Sur l'unicité du developpement trigonométrique, C. R., 163 (1916), 433—436.
- ² Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М.—Л., 1939.
- ³ Littlewood J. E., On the Fourier coefficients of functions of bounded variations, Quart. J. Math., 7 (1936), 219—226.
- ⁴ Wiener N. and Wintner A., Fourier — Stieltjes transforms and singular infinite convolutions, Am. J. Math., 60 (1938), 513—522.
- ⁵ Wiener N. and Wintner A., On singular distributions, Journ. Math. and Phys., 17 (1938), 233—246.
- ⁶ Schaeffer A. C., The Fourier — Stieltjes coefficients of a function of bounded variation, Am. J. Math., 60 (1939), 934—940.
- ⁷ Salem R., On singular monotonic functions of the Cantor type, Journ. Math. and Phys., 21 (1942), 69—82.
- ⁸ Ивашев-Мусатов О. С., О коэффициентах Фурье — Стильтьеса сингулярных функций, Доклады Ак. наук СССР, 82 (1952), 9—11.
- ⁹ Ландау Е., Введение в дифференциальное и интегральное исчисление, ИЛ, 1948.

И. Д. СТУПИНА

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ A_2 -ОПЕРАЦИИ

(Представлено академиком П. С. Александровым)

В работе показано, что общая теорема о накрытии множеств имеет место в духе непротиворечивости в системе аксиом теории множеств Σ К. Геделя для A_2 -операции над CA_n -множествами в случае точек p -значности, конечнoзначности и точек, определяемых множеством цепей жесткой приведенной базы A_2 -операции, имеющим компактное замыкание.

Введение

Настоящая работа является продолжением ряда работ о накрытии множеств [см. (1), (2), (3), (4)].

В работе показано существование вполне правильного отношения * между произвольным классом множеств Ξ и жесткой базой ** A_2 -операции и, как следствие этого утверждения и общей теоремы о накрытии множеств [см. (3), теорема 1], сформулирован ряд предложений о накрытии множеств.

В работе доказывается, что если класс множеств Ξ инвариантен относительно δs -операций с A_2 -базами, то

$$\Phi_{N_\alpha}^{\delta s}(\Xi) \subset \Xi,$$

где $\Phi_{N_\alpha}^{\delta s}$ — δs -операция, отбирающая точки, определяемые множеством

* Пусть N — некоторая база δs -операции. Через N^n обозначается множество всех цепей базы N , которые содержат натуральное число n . На совокупности баз N и $\{N^n\}$ построим d -систему K , содержащую все конечные пересечения баз этой системы.

Класс множеств Ξ и база N находятся во вполне правильном отношении [см. (2), стр. 126], если

- 1) класс множеств $\Phi_N(\Xi)$ инвариантен относительно счетных сумм и пересечений;
- 2) при любой базе $M \subset K$ имеет место соотношение:

$$\Phi_M(\Xi) \subset \Phi_N(\Xi).$$

** Пусть N — база некоторой δs -операции; цепь $\eta \in N$ называется жесткой цепью базы N , если она не содержит в себе никакой другой цепи базы N .

База N , состоящая из одних только жестких цепей, называется жесткой базой [см. (5)].

цепей жесткой приведенной базы A_2 -операции, не являющимся рассеянным множеством индекса $\leq \alpha$.

При этом же условии

$$\Phi_{\check{N}'\alpha}(\Xi) \subset \Xi,$$

где $\Phi_{\check{N}'\alpha}$ — δs -операция, отбирающая точки, определяемые множеством цепей жесткой приведенной базы $* A_2$ -операции, являющимся суммой рассеянного семейства множеств, замыкание которых компактно, индекса $\leq \alpha$.

§ 1. A_2 -операцией над системой множеств $\{E_{n_1 \dots n_k}^{m_1 \dots m_t}\}$ называется операция вида

$$\begin{aligned} A_2 \{E_{n_1 \dots n_k}^{m_1 \dots m_t}\} &= \sum_{m_1 \dots m_t} \prod_{n_1 \dots n_k} \sum_{k, t} E_{n_1 \dots n_k}^{m_1 \dots m_t} = \\ &= \sum_{m_1 \dots m_t} \Phi_{N'_C} \left\{ \sum_t E_{v(n_1 \dots n_k)}^{m_1 \dots m_t} \right\} = \Phi_{N'_C} \{E_{\sigma[v(n_1 \dots n_k); m_1 \dots m_t]}\}, \end{aligned}$$

где N'_C — жесткая база Γ -операции, $\sigma[v(n_1 \dots n_k); m_1 \dots m_t] = \sigma[v(n_1 \dots n_k); \mu(m_1 \dots m_t)]$ — натуральное число, соответствующее $(v; \mu)$, если перенумеровать всевозможные пары $(v; \mu)$, $v(p_1 \dots p_r) = \mu(p_1 \dots p_r)$ — натуральное число, соответствующее $(p_1 \dots p_r)$, если перенумеровать все кортежи $(p_1 \dots p_r)$.

База A_2 -операции определяется следующим образом [см. (6), теорема XIII].

Обозначим через \mathcal{L}_s^r множество всех таких последовательностей

$$\xi = (p_1, p_2, \dots, p_i, \dots),$$

для которых существуют три последовательности

$$(m_1, m_2, \dots, m_i, \dots), \quad (v_1, v_2, \dots, v_i, \dots), \quad (t_1, t_2, \dots, t_i, \dots)$$

такие, что

$$1) \quad v_r = s,$$

$$2) \quad p_i = \sigma(v_i; m_1 \dots m_{t_i}),$$

и пусть

$$L'_s = \sum_{r=1}^{\infty} \mathcal{L}_s^r.$$

Из построения видно, что множество \mathcal{L}_s^r замкнуто, а следовательно, множество L'_s есть множество типа F_{σ} . Тогда база A_2 -операции определится по формуле:

$$\check{N}'_C = \Phi_{N'_C} \{L'_s\}.$$

* Пусть N — жесткая база некоторой δs -операции. Если каждую цепь базы упорядочить в порядке возрастания элементов цепи, то полученная совокупность цепей называется жесткой приведенной базой и обозначается через \check{N} [см. (4)].

Следовательно, \hat{N}'_C есть CA -множество. При этом если

$$\xi = (p_1, p_2, \dots, p_i, \dots) \in \hat{N}'_C,$$

то существует такая последовательность

$$(\nu_1^*, \nu_2^*, \dots, \nu_i^*, \dots) \in N'_C,$$

что

$$\xi \in \prod_{i=1}^{\infty} L'_{\nu_i^*},$$

т. е. $\xi \in L'_{\nu_i^*}$ при любом i . Но

$$L'_{\nu_i^*} = \sum_{r=1}^{\infty} \mathcal{L}'_{\nu_i^* r_i}.$$

Следовательно, найдется хотя бы одно число r_i такое, что

$$\xi \in \mathcal{L}'_{\nu_i^* r_i}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Это значит, что $\nu_{r_i} = \nu_i^*$ при любом i . Таким образом, для каждой последовательности

$$\xi = (p_1, p_2, \dots, p_i, \dots) \in \hat{N}'_C$$

найдутся такие последовательности

$$(\nu_1^*, \nu_2^*, \dots), \quad (m_1, m_2, \dots), \quad (\nu_1, \nu_2, \dots), \\ (r_1, r_2, \dots), \quad (t_1, t_2, \dots),$$

что:

- 1) $(\nu_1^*, \nu_2^*, \dots, \nu_i^*, \dots) \in N'_C$,
- 2) $\nu_{r_i} = \nu_i^*$,
- 3) $p_i = \sigma(\nu_i; m_1 \dots m_{t_i})$.

Здесь последовательность $(r_1, r_2, \dots, r_i, \dots)$ составлена из различных натуральных чисел; при этом она может и не содержать в себе всех натуральных чисел. Так определенная база \hat{N}'_C еще не является жесткой.

Жесткой базой операции $\Phi_{\hat{N}'_C}$ будет база N'' , которая характеризуется

тем, что последовательность $(r_1, r_2, \dots, r_i, \dots)$ будет представлять собой лишь некоторую перестановку натурального ряда чисел. Другими словами, база δs -операции $\Phi_{N''}$ есть совокупность всех таких цепей $\eta = (p_1, p_2, \dots, p_i, \dots)$, для каждой из которых найдутся последовательности

$$(m_1, m_2, \dots), \quad (\nu_1, \nu_2, \dots), \quad (t_1, t_2, \dots),$$

для которых

- 1) $(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_i, \dots) \in N'_C$,
- 2) $p_i = \sigma(\nu_i; m_1 \dots m_{t_i})$.

Пусть \check{J} обозначает пространство возрастающих последовательностей натуральных чисел.

Обозначим через $N^{(n)}$ жесткую базу A_n -операции, через $N_C^{(n)}$ — жесткую базу CA_n -операции.

ЛЕММА 1. Жесткая приведенная база $\hat{N}^{(n)}$ A_n -операции, $n \geq 2$, является нигде не плотным множеством в пространстве \check{J} .

Доказательство. Цепь $\eta = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i, \dots)$ принадлежит базе $N^{(n)}$ A_n -операции, $n \geq 2$, если найдутся такие последовательности

$$(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_i, \dots), \quad (m_1, m_2, \dots, m_i, \dots), \quad (t_1, t_2, \dots, t_i, \dots),$$

что:

$$1) \quad (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_i) \in N_C^{(n-1)},$$

$$2) \quad \sigma_i = \sigma(\nu_i; m_1 \dots m_{t_i}).$$

Пусть цепь $\eta = \{\sigma_i\} \in \check{N}^{(n)}$ и $\eta \in \delta_{n_1 \dots n_k}$. Тогда

$$\sigma_i = \sigma(\nu_i; m_1 \dots m_{t_i}) = n_i, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Пусть $\delta_{m_1 \dots m_r}$ — такой интервал Бэра, что $\sigma(\nu_k; m_1 \dots m_r) > n_k$. Интервал $\delta_{n_1 \dots n_k n_{k+1}}$, где $n_{k+1} = \sigma(\nu_k; m_1 \dots m_r)$, не содержит ни одной цепи базы $\check{N}^{(n)}$. Действительно, допустим, что существует цепь

$$\eta^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*, \dots, \sigma_i^*, \dots) \in \check{N}^{(n)}$$

такая, что $\eta^* \in \delta_{n_1 \dots n_k n_{k+1}}$. Тогда

$$\sigma_i^* = n_i = \sigma(\nu_i; m_1 \dots m_{t_i}), \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

$$\sigma_{i+1}^* = \sigma(\nu_k; m_1 \dots m_r).$$

Так как, по предположению, цепь $\eta^* \in \check{N}^{(n)}$, то должны существовать такие последовательности

$$(\nu_1^*, \nu_2^*, \dots, \nu_i^*, \dots), \quad (m_1^*, m_2^*, \dots, m_i^*, \dots), \quad (t_1^*, t_2^*, \dots, t_i^*, \dots),$$

что:

$$1) \quad (\nu_1^*, \nu_2^*, \dots, \nu_i^*, \dots) \in N_C^{(n-1)},$$

$$2) \quad \sigma_i^* = \sigma(\nu_i^*, m_1^* \dots m_{t_i^*}^*).$$

Ясно, что

$$\nu_i^* = \nu_i, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad \nu_{k+1}^* = \nu_k,$$

т. е. $\nu_k^* = \nu_{k+1}^*$. Но это противоречит тому, что цепь $\{\nu_i^*\} \in N_C^{(n-1)}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Жесткая база A_2 -операции N'' находится во вполне правильном отношении с любым классом множеств Ξ .

Доказательство. Действительно, A_2 -операция инвариантна относительно счетных сумм и пересечений по отношению к любому классу множеств Ξ [см. (7), теорема III].

Для существования вполне правильного отношения между базой N'' и классом множеств Ξ остается показать, что

$$\Phi_{N''\sigma_1 \dots \sigma_k}(\Xi) \subset \Phi_{N''}(\Xi),$$

где $N^{\sigma_1 \dots \sigma_k}$ есть множество всех цепей базы N'' , которые содержат натуральные числа $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$, где

$$\sigma_i = \sigma [v(n_1^i \dots n_{k_i}^i); m_1 \dots m_{t_i}], \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Пусть

$$r_l = \max [r_1, r_2, \dots, r_k], \quad t_m = \max [t_1, t_2, \dots, t_k].$$

Выберем и обозначим через $\sigma_1^1, \sigma_2^1, \dots, \sigma_{q_1}^1$ все такие бэровские интервалы первого ранга, каждый из которых либо совпадает, либо содержит в себе хотя бы один из интервалов

$$\{\delta_{n_1^i \dots n_{r_i}^i}\}, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

и вне интервалов $\sigma_1^1, \sigma_2^1, \dots, \sigma_{q_1}^1$ не найдется ни одного интервала

$$\delta_{n_1^i \dots n_{r_i}^i}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Очевидно, если среди интервалов

$$\{\delta_{n_1^i \dots n_{r_i}^i}\}, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

имеются интервалы первого ранга, то они войдут в систему

$$\{\sigma_i^1\}, \quad i = 1, 2, \dots, q_1.$$

Пусть $\sigma_1^i, \dots, \sigma_{q_i}^i$ — интервалы i -го ранга, выделенные на i -м шагу. В эту систему войдут те из интервалов

$$\{\delta_{n_1^i \dots n_{r_i}^i}\}, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

ранг которых совпадает с i . Пусть $\sigma_1^{*i}, \sigma_2^{*i}, \dots, \sigma_{s_i}^{*i}$ — те из интервалов $\sigma_1^i, \sigma_2^i, \dots, \sigma_{q_i}^i$, которые не совпадают ни с одним из интервалов

$$\{\delta_{n_1^i \dots n_{r_i}^i}\}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Через $\sigma_1^{i+1}, \sigma_2^{i+1}, \dots, \sigma_{q_{i+1}}^{i+1}$ обозначим все интервалы $(i+1)$ -го ранга такие, что каждый из интервалов

$$\{\sigma_l^{i+1}\}, \quad l = 1, 2, \dots, q_{i+1},$$

либо совпадает, либо содержит хотя бы один из интервалов

$$\{\delta_{n_1^i \dots n_{r_i}^i}\}, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

принадлежит одному из интервалов системы

$$\{\sigma_l^{*i}\}, \quad l = 1, 2, \dots, q_i,$$

и среди интервалов из системы

$$\{\delta_{n_1^i \dots n_{r_i}^i}\}, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

вложенных в интервалы $\sigma_1^{*i}, \sigma_2^{*i}, \dots, \sigma_{s_i}^{*i}$, не найдется ни одного, который бы находился вне интервалов

$$\sigma_1^{i+1}, \sigma_2^{i+1}, \dots, \sigma_{q_{i+1}}^{i+1}.$$

Очевидно, если среди интервалов

$$\{\delta_{n_1^i \dots n_{r_i}^i}\}, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

имеются интервалы $(i+1)$ -го ранга, то они войдут в систему интервалов

$$\{\sigma_l^{i+1}\}, \quad l = 1, 2, \dots, q_{i+1}.$$

Легко видеть, что система интервалов $\sigma_1^{r_l}, \dots, \sigma_{q_{r_l}}^{r_l}$ состоит из всех тех интервалов из системы

$$\{\delta_{n_1^i \dots n_{r_i}^i}\}, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

ранг которых совпадает с r_l .

Расположим в одну последовательность все баровские интервалы первого ранга, за исключением интервалов $\{\sigma_i^1\}$, $i = 1, 2, \dots, q_1$, все интервалы второго ранга, содержащиеся в интервалах

$$\{\sigma_i^{*1}\}, \quad i = 1, 2, \dots, s_1,$$

за исключением интервалов

$$\{\sigma_i^2\}, \quad i = 1, 2, \dots, q_2,$$

и т. д., все интервалы r_l -го ранга, содержащиеся в интервалах

$$\{\sigma_i^{*r_l-1}\}, \quad i = 1, 2, \dots, s_{r_l-1},$$

за исключением интервалов

$$\{\sigma_i^{r_l}\}, \quad i = 1, 2, \dots, q_{r_l}.$$

Пусть $\sigma'_1, \sigma'_2, \dots, \sigma'_i, \dots$ — эта последовательность интервалов.

Образует систему множеств $\{E_\sigma^*\}$ следующим образом.

Если $t \leq t_m$, то, каков бы ни был интервал $\delta_{m_1^* \dots m_t^*}$ и число n_1 , положим

$$E_{\sigma[(v(n_1); m_1 \dots m_t)]}^* = E_{\sigma[(v(n_1^* \dots n_r^*); m_1 \dots m_t)]}^*,$$

где $\delta_{n_1^* \dots n_r^*}$ является n_1 -м элементом последовательности $\{\sigma'_i\}$ и

$$E_{\sigma[(v(n_1 \dots n_k); m_1^* \dots m_t^*)]}^* = E_{\sigma[(v(n_1^* \dots n_r^* n_{r+1}^* \dots n_{r+k-1}^*); m_1 \dots m_t)]}^*,$$

где $\delta_{n_1^* \dots n_r^*}$ является n_1 -м элементом последовательности $\{\sigma'_i\}$ и $n_{r+i}^* = n_{i+1}$.

$i = 1, 2, \dots, k-1$.

Если $t > t_m$, то, каков бы ни был интервал $\delta_{m_1 \dots m_t}^*$ и число n_1 , положим

$$E_{\sigma}^* [v(n_1); m_1^* \dots m_t^*] = E_{\sigma} [v(n_1^* \dots n_r^*); m_1 \dots m_t m_{t_m+1}^* \dots m_t^*],$$

где $\delta_{n_1^* \dots n_r^*}^*$ является n_1 -м элементом последовательности $\{\sigma_i'\}$, и, каковы бы ни были интервалы $\delta_{n_1 \dots n_k}$ и $\delta_{m_1 \dots m_t}^*$, положим

$$E_{\sigma} [v(n_1 \dots n_k); m_1^* \dots m_t^*] = E_{\sigma} [v(n_1^* \dots n_r^* n_{r+1}^* \dots n_{r+k-1}^*); m_1 \dots m_t m_{t_m+1}^* \dots m_t^*],$$

где $\delta_{n_1^* \dots n_r^*}^*$ является n_1 -м элементом последовательности $\{\sigma_1'\}$ и $n_{r+i}^* = n_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, k-1$.

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \Phi_{\sigma N}^* \sigma [v(n_1^1 \dots n_{r_1}^1); m_1 \dots m_{t_1}] \dots \sigma [v(n_1^k \dots n_{r_k}^k); m_1 \dots m_{t_k}] \{E_{\sigma}\} = \\ = \prod_{i=1}^k E_{\sigma [v(n_1^i \dots n_{r_i}^i); m_1 \dots m_{t_i}]} \cdot \Phi_{N^*}^* \{E_{\sigma}^*\}. \end{aligned}$$

Отсюда следует:

$$\Phi_{N^* \sigma_1 \dots \sigma_k}^* (\mathbb{E}) \subset \Phi_{N^*}^* (\mathbb{E}),$$

что и требовалось доказать.

Пусть N — жесткая база некоторой δs -операции.

Точка x называется точкой $(N-p)$ -значности последовательности множеств $\{E_n\}$, если существует p и только p различных цепей базы N , в ядра которых входит точка x .

Через N^* обозначается множество всех цепей, каждая из которых содержит по крайней мере две различные цепи базы N .

Через Φ_{N^*} обозначается δs -операция, которая отбирает точки, входящие не менее чем в два различных ядра, определяемых цепями базы N .

Через $\Phi_{[N_p]^*}$ обозначается δs -операция, которая отбирает точки, входящие не менее чем в $(p+1)$ различных ядер, определяемых цепями базы N .

Точки x называются точками N -конечнозначности последовательности множеств $\{E_n\}$, если они являются точками $(N-p)$ -значности последовательности множеств $\{E_n\}$ при некотором натуральном числе $p(x)$, зависящем от x .

Через $\Phi_{N^{**}}$ обозначается δs -операция, которая отбирает точки, входящие не менее чем в счетное число ядер, определяемых цепями базы N .

На основании леммы 2 и теорем 3. И. Козловой [см. (2), теоремы 1, 2, 4], получаем следующие утверждения:

Следствие 1. *Каков бы ни был класс множеств Ξ ,*

$$\Phi_{[N^* \cdot p]^*} \Xi \subset \Xi, \quad \Phi_{[N^* \cdot p]^* n}(\Xi) \subset \Xi,$$

$$\Phi_{N^{**}}(\Xi) \subset \Xi, \quad \Phi_{N^{**} n}(\Xi) \subset \Xi.$$

Следствие 2. *Если Ξ — проективный класс множеств не ниже третьего или класс A_2 -множеств, то*

$$\Phi_{[N^* \cdot p]^*}(\Xi) \subset \Xi, \quad \Phi_{[N^* \cdot p]^* n}(\Xi) \subset \Xi,$$

$$\Phi_{N^{**}}(\Xi) \subset \Xi, \quad \Phi_{N^{**} n}(\Xi) \subset \Xi.$$

Так как в системе аксиом теории множеств Σ Гёделя [см. (8)] П. С. Новиковым установлена непротиворечивость утверждения, что, начиная с некоторого n , законы отделимости для проективных множеств n -го класса совпадают с законами отделимости для проективных множеств второго класса [см. (9)], то, в силу следствия 2 леммы 2 и общей теоремы о накрытии множеств, изложенной в работе 3. И. Козловой [см. (8), теорема 1], в этой системе аксиом будет непротиворечиво

Следствие 3. *Начиная с некоторого $n > 2$, для всякой последовательности SA_n -множеств $\{E_n\}$ таких, что каждая точка множества $\Phi_{N^*} \{E_n\}$ является точкой не более чем $(N'' - p)$ -значности (N'' -конечнозначности) последовательности множеств $\{E_n\}$, найдется такая последовательность B_n -множеств $\{H_n\}$, что $H_n \supset E_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) и каждая точка множества $\Phi_{N^*} \{H_n\}$ является точкой не более чем $(N'' - p)$ -значности (N'' -конечнозначности) последовательности множеств $\{H_n\}$.*

Пусть N — жесткая база δs -операции Φ_N .

Через $\Phi_{\check{N}}$ обозначим δs -операцию, отбирающую точки, определяемые δs -операцией Φ_N , каждая из которых определяется множеством цепей жесткой приведенной базы \check{N} , имеющим некомпактное замыкание.

Так как произвольный класс множеств Ξ и база N'' находятся во вполне правильном отношении, то, на основании теоремы о сравнении δs -операции $\Phi_{\check{N}}$ с исходной δs -операцией Φ_N , изложенной в работе автора (4) (теорема 2), справедливы следующие утверждения:

Следствие 4. *Каков бы ни был класс множеств Ξ ,*

$$\Phi_{\check{N}''}(\Xi) \subset \Phi_{N''}(\Xi), \quad \Phi_{\check{N}'' n}(\Xi) \subset \Phi_{N''}(\Xi).$$

Следствие 5. *Если Ξ — проективный класс множеств не ниже третьего или класс A_2 -множеств, то*

$$\Phi_{\check{N}''}(\Xi) \subset \Xi, \quad \Phi_{\check{N}'' n}(\Xi) \subset \Xi.$$

В силу утверждения П. С. Новикова [см. (9)], общей теоремы о накрытии множеств [см. (8), теорема 1] и следствия 2 леммы 2, в системе аксиом теории множеств Σ непротиворечиво

Следствие 6. Начиная с некоторого $n > 2$, для всякой последовательности SA_n -множеств $\{E_n\}$ таких, что каждая точка множества $\Phi_{N^*}\{E_n\}$ определяется компактным множеством цепей базы \check{N}'' (множеством цепей базы \check{N}'' , имеющим компактное замыкание), существует такая последовательность B_n -множеств $\{H_n\}$, что $H_n \supset E_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) и каждая точка множества $\Phi_{N^*}\{H_n\}$ определяется множеством цепей базы \check{N}'' , имеющим компактное замыкание.

§ 2. Рассеянным (clairseme) множеством называется всякое множество точек, не имеющее подмножества, плотного в себе. Такое множество счетно [см. $(^{10})$].

Пусть $E = E^{[0]}$ есть линейное множество. Если $\alpha = \alpha^* + 1$, то через $E^{[\alpha]}$ обозначается множество всех неизолированных точек множества $E^{[\alpha-1]}$; если α — трансфинитное число второго рода, то, по определению,

$$E^{[\alpha]} = \prod_{\alpha' < \alpha} E^{[\alpha']}.$$

Если множество E рассеянное, то найдется такое число β , что

$$E^{[\beta]} = E^{[\beta+1]} = \dots = 0.$$

Наименьшее число β , обладающее этим свойством, называется *индексом* рассеянного множества E .

Пусть $\mathcal{M}_x = \{\eta_i\}$ обозначает для данной последовательности множеств $\{E_n\}$ и жесткой базы N множество всех таких цепей $\eta \in \check{N}$, что

$$x \in \prod_{n_i \in \eta} E_{n_i}.$$

Построим операцию $\Phi_{\check{N}_\alpha}$, которая отбирает точки, получаемые δs -операцией Φ_N , каждая из которых определяется множеством цепи базы \check{N} , не являющимся рассеянным множеством индекса $\leq \alpha$, т. е. для каждой из которых множество $\mathcal{M}_x^{[\alpha]}$ не пусто.

Пусть $\alpha = 1$ и $n_1 < n_2 < \dots < n_k$. Положим

$$\mathcal{G}_{n_1 \dots n_k}^1 = \Phi_{[N^{n_1 \dots n_k}]^*}(\{E_n^*\}),$$

где $E_n^* = 0$, если $n \neq n_i$, $i = 1, 2, \dots, k-1$, $n < n_k$, и $E_n^* = E_n$ во всех остальных случаях. Ясно, что множество $\mathcal{G}_{n_1 \dots n_k}^1$ состоит из всех таких точек $x \in \Phi_N\{E_n\}$, для каждой из которых порция $\mathcal{M}_x \cdot \delta_{n_1 \dots n_k}$ содержит не менее двух точек.

Множество

$$\Phi_{\check{N}_1}\{E_n\} = \sum_{n_1 \dots n_k \dots \in \check{N}} \prod_k \mathcal{G}_{n_1 \dots n_k}^1.$$

Действительно, пусть

$$x \in \sum_{n_1 \dots n_k \dots \in \check{N}} \prod_k \mathcal{G}_{n_1 \dots n_k}^1.$$

Тогда найдется цепь $\eta = \{n_i\} \in \check{N}$ такая, что

$$x \in \prod_{k=1}^{\infty} \mathcal{G}_{n_1 \dots n_k}^1.$$

Следовательно, цепь $\eta = (n_1, n_2, \dots, n_i, \dots) \in \mathcal{M}_x$ и, в силу определения множеств $\mathcal{G}_{n_1 \dots n_l}^1$, каково бы ни было k , порция $\mathcal{M}_x \cdot \delta_{n_1 \dots n_k}$ содержит цепь η' , отличную от η . Следовательно, цепь $\eta \in M_x^{[1]}$, т. е. множество $\mathcal{M}_x^{[1]}$ не пусто.

Каждой точке $\zeta = (n_1, n_2, \dots, n_i, \dots) \in I$ поставим в соответствие точку

$$\varphi(\zeta) = (\nu(n_1), \nu(n_1 n_2), \nu(n_1 \dots n_i), \dots),$$

где натуральным числом $\nu(m_1 \dots m_l)$ занумерован кортеж $(m_1 \dots m_l)$. Это соответствие гомеоморфное. Тогда множество

$$\Phi_{\check{N}_1} \{E_n\} = \sum_{\varphi(n_1 \dots n_k \dots) \in \varphi(\check{N})} \prod_{\nu \in \varphi(n_1 \dots n_k \dots)} \mathcal{G}_{\nu(n_1 \dots n_k)}^1 = \Phi_{\varphi(\check{N})} \{\mathcal{G}_{\nu(n_1 \dots n_k)}^1\},$$

где $\varphi(\check{N})$ — гомеоморф базы \check{N} .

Пусть $\alpha = \alpha^* + 1$ и для всякого $\alpha' < \alpha$ построены операции, отбирающие точки, определяемые операцией Φ_N , для каждой из которых множество $\mathcal{M}_x^{[\alpha]}$ не пусто, причем

$$\Phi_{\check{N}_{\alpha'}} \{E_n\} = \sum_{\varphi(n_1 \dots n_k \dots) \in \varphi(\check{N})} \prod_{\nu \in \varphi(n_1 \dots n_k \dots)} \mathcal{G}_{\nu(n_1 \dots n_k)}^{\alpha'} = \Phi_{\varphi(\check{N})} \{\mathcal{G}_{\nu(n_1 \dots n_k)}^{\alpha'}\}.$$

Обозначим через $\check{N}^{(n_1 \dots n_k)_1}$ множество всех цепей базы \check{N} , первые k элементов которых соответственно равны n_1, \dots, n_k .

Положим

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{n_1 \dots n_k}^{\alpha} &= \Phi_{\varphi[\check{N}^{(n_1 \dots n_k)_1}]} \{\mathcal{G}_{\nu(m_1 \dots m_l)}^{\alpha^*}\} = \\ &= \sum_{\substack{i; (n_1 \dots n_k \dots n_{k+i}): p \neq 0 \\ n_1 < \dots < n_k < \dots < n_{k+i} < p \\ n_1 < \dots < n_k < \dots < n_{k+i} < s}} \Phi_{\varphi[\check{N}^{(n_1 \dots n_k \dots n_{k+i} p)_1}]} \\ &\quad \cdot \Phi_{\varphi[\check{N}^{(n_1 \dots n_k \dots n_{k+i} s)_1}]} \{\mathcal{G}_{\nu(m_1 \dots m_l)}^{\alpha^*}\}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Phi_{\check{N}_{\alpha}} \{E_n\} &= \sum_{n_1 \dots n_k \dots \in \check{N}} \prod_{k=1}^{\infty} \mathcal{G}_{n_1 \dots n_k}^{\alpha} = \\ &= \sum_{\varphi(n_1 \dots n_k \dots) \in \varphi(\check{N})} \prod_{\nu \in \varphi(n_1 \dots n_k \dots)} \mathcal{G}_{\nu(n_1 \dots n_k)}^{\alpha} = \Phi_{\varphi(\check{N})} \{\mathcal{G}_{\nu(n_1 \dots n_k)}^{\alpha}\}. \end{aligned}$$

Пусть α — трансфинитное число второго рода и для всякого $\alpha' < \alpha$ построены операции, отбирающие точки, определяемые операцией Φ_N , для каждой из которых множество $M_x^{[\alpha']}$ не пусто, причем

$$\Phi_{\check{N}^{\alpha'}}\{E_n\} = \Phi_{\varphi(\check{N})}\{\mathcal{G}_{\nu(m_1 \dots m_t)}^{\alpha'}\}.$$

Пусть

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \dots < \alpha_n < \dots \rightarrow \alpha.$$

Тогда

$$\Phi_{\check{N}^{\alpha_n}}\{E_n\} = \Phi_{\varphi(\check{N})}\{\mathcal{G}_{\nu(n_1 \dots n_k)}^{\alpha_n}\} = \sum_{\varphi(n_1 \dots n_k \dots) \in \varphi(\check{N})} \prod_{\nu \in \varphi(n_1 \dots n_k \dots)} \mathcal{G}_{\nu(n_1 \dots n_k)}^{\alpha_n}.$$

Множество

$$\Phi_{\check{N}^{\alpha}}\{E_n\} = \sum_{\varphi(n_1 \dots n_k \dots) \in \varphi(\check{N})} \prod_{\nu \in \varphi(n_1 \dots n_k \dots)} \prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_{\nu(n_1 \dots n_k)}^{\alpha_n} = \Phi_{\varphi(\check{N})}\left\{\prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_{\nu(n_1 \dots n_k)}^{\alpha_n}\right\}.$$

ТЕОРЕМА 1. Если класс множеств Ξ инвариантен относительно δ -операций Φ_N , где база N есть A_2 -множество, то

$$\Phi_{\check{N}^{\alpha}}(\Xi) \subset \Xi.$$

Если же класс множеств Ξ^* таков, что $\Phi_{N^*}(\Xi^*)$ входит в класс A_2 -множеств θ , то

$$\Phi_{\check{N}^{\alpha}}(\Xi^*) \subset \theta.$$

Доказательство. В силу вышеприведенной конструкции, операция $\Phi_{\check{N}^{\alpha}}$ сводится к повторному применению операций вида

$$\Phi_{N^{n_1 \dots n_k}}, \quad \Phi_{\varphi(\check{N}^*)}, \quad \Phi_{\varphi[\check{N}^{(n_1 \dots n_k)_1}]}$$

счетного суммирования и счетного пересечения.

Как показал А. Д. Тайманов⁽¹¹⁾, жесткая приведенная база A_2 -операции может быть получена как разность двух A -множеств, т. е. \check{N}'' входит в класс B_2 -множеств.

Так как соответствие φ гомеоморфное, то B_2 -множеству \check{N}'' будет соответствовать также B_2 -множество $\varphi(\check{N}'')$.

Обозначим через $\check{J}^{(n_1 \dots n_k)_1}$ множество возрастающих последовательностей натуральных чисел, первые k элементов которых соответственно равны n_1, n_2, \dots, n_k . Это множество замкнутое. Тогда

$$\check{N}''^{(n_1 \dots n_k)_1} = \check{N}'' \cdot \check{J}^{(n_1 \dots n_k)_1},$$

т. е. $\check{N}''^{(n_1 \dots n_k)_1}$ и $\varphi(\check{N}''^{(n_1 \dots n_k)_1})$ являются B_2 -множествами.

В силу вполне правильного отношения класса множеств Ξ^* с базой Λ'' ,

$$\Phi_{N^{n_1 \dots n_k}}(\Xi^*) \subset \Phi_{N^*}(\Xi^*) \subset \theta.$$

А так как класс множеств $\Xi(\theta)$ находится во вполне правильном отношении с базой N'' и инвариантен относительно δs -операций с A_2 -базами, то он инвариантен и относительно операций счетного суммирования, счетного пересечения и операций вида

$$\Phi_{N''}, \quad \Phi_{N'' n_1 \dots n_k}, \quad \Phi_{\varphi(\check{N}'')}, \quad \Phi_{\varphi[\check{N}''] (n_1 \dots n_k)_1}.$$

Следовательно,

$$\Phi_{\check{N}''_\alpha}(\Xi) \subset \Xi, \quad [\Phi_{\check{N}''_\alpha}(\Xi^*) \subset \theta],$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Если Ξ есть проективный класс A_n -множеств, $n \geq 2$, то

$$\Phi_{\check{N}''_\alpha}(\Xi) \subset \Xi.$$

§ 3. Множество E называется множеством абсолютно первого класса, если на всяком компактном множестве, пересекающемся с ним, у него найдется компактная порция или точка локальной компактности [см. (12)]. Такое множество можно представить как сумму рассеянного * семейства компактных множеств.

Пусть $E = E^{(0)}$ есть линейное множество абсолютно первого класса. Если α — трансфинитное число первого рода, то через $E^{(\alpha)}$ обозначается множество, которое получается из множества $E^{(\alpha-1)}$ путем выбрасывания всех его компактных порций; если α — трансфинитное число второго рода, то, по определению,

$$E^{(\alpha)} = \prod_{\alpha' < \alpha} E^{(\alpha')}.$$

Наименьшее трансфинитное число β такое, что

$$E^{(\beta)} = 0,$$

называется подклассом множества E . Известно существование множеств абсолютно первого класса как угодно высоких подклассов.

Будем рассматривать линейные множества E , являющиеся суммами рассеянного семейства множеств, замыкание которых компактно.

Пусть $E = E^{(0)}$. Если α — трансфинитное число первого рода, то через $E^{(\alpha)}$ обозначается множество, которое получается из множества $E^{(\alpha-1)}$ путем удаления всех его изолированных порций, замыкание которых компактно; если α — трансфинитное число второго рода, то, по определению,

$$E^{(\alpha)} = \prod_{\alpha' = \alpha} E^{(\alpha')}.$$

* Семейство множеств $\{E\}$ называется рассеянным, если во всяком его подсемействе найдется множество E , которое отделимо от суммы всех остальных множеств класса нуль или просто порций.

Наименьшее число β такое, что

$$E^{(\beta)} = 0,$$

называется индексом множества E .

Замечание. Если E есть множество абсолютно первого класса юд-класса α , то индекс множества E не превосходит α .

Обозначим через $\Phi_{\check{N}^{(\alpha)}} \delta s$ -операцию, отбирающую точки, получаемые δs -операцией Φ_N , каждая из которых определяется множеством цепей базы N , не являющимся суммой рассеянного семейства множеств, замыкание которых компактно, индекса $\leq \alpha$, т. е. для каждой из которых множество $M_x^{(\alpha)}$ не пусто.

Пусть

$$E = \Phi_N \{E_n\}.$$

Множество всех точек $x \in \Phi_N \{E_n\}$ таких, что множество \mathcal{M}_x имеет некомпактное замыкание, определяется δs -операцией:

$$\Phi_{\check{N}_*} \{E_n\} = \sum_{\substack{k; (n_1 \dots n_k) \\ n_1 < \dots < n_k}} \overline{\lim}_n E_{n_1 \dots n_k (n_k + n)},$$

где

$$E_{m_1 \dots m_t} = \Phi_{N_{m_1 \dots m_t}} \{E_n^*\},$$

причем $E_n^* = 0$, если $n \neq m_i$, $i = 1, 2, \dots, t-1$, $n < m_t$ и $E_n^* = E_n$ во всех остальных случаях.

Множество $\mathcal{G}_{n_1 \dots n_k}^1$ всех таких точек $x \in \Phi_N \{E_n\}$, для каждой из которых порция $\mathcal{M}_x \cdot \delta_{n_1 \dots n_k}$ содержит точки в счетном числе интервалов $\delta_{n_1 \dots n_k \dots n_k + r n_k + r + 1}$ при постоянных значениях $n_1, \dots, n_k, \dots, n_{k+1}$, определится равенством

$$\mathcal{G}_{n_1 \dots n_k}^1 = \sum_{\substack{r; (n_1 \dots n_k \dots n_k + r) \\ n_1 < \dots < n_k < \dots < n_k + r}} \overline{\lim}_n E_{n_1 \dots n_k \dots n_k + r (n_k + r + n)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Phi_{\check{N}_*^{(1)}} \{E_n\} &= \sum_{n_1 \dots n_k \dots \in \check{N}} \prod_{k=1}^{\infty} \mathcal{G}_{n_1 \dots n_k}^1 = \\ &= \sum_{\varphi(n_1 \dots n_k \dots) \in \varphi(\check{N})} \prod_{\forall \varphi(n_1 \dots n_k \dots)} \mathcal{G}_{\varphi(n_1 \dots n_k)}^1 = \Phi_{\varphi(\check{N})} \{\mathcal{G}_{\varphi(n_1 \dots n_k)}^1\}. \end{aligned}$$

Действительно, пусть

$$x \in \sum_{n_1 \dots n_k \dots \in \check{N}} \prod_{k=1}^{\infty} \mathcal{G}_{n_1 \dots n_k}^1.$$

Тогда найдется цепь $\eta = (n_1, n_2, \dots, n_i, \dots) \in \check{N}$ такая, что

$$x \in \prod_{k=1}^{\infty} \mathcal{G}_{n_1 \dots n_k}^1.$$

Следовательно, цепь $\gamma_i = (n_1, n_2, \dots, n_i, \dots) \in M_x$ и, в силу определения множеств $\mathcal{G}_{n_1 \dots n_k}^1$, каково бы ни было k , порция $\mathcal{M}_x \cdot \delta_{n_1 \dots n_k}$ имеет некомпактное замыкание. Следовательно, цепь $\gamma_i \in M_x^{(1)}$, т. е. множество $M_x^{(1)}$ не пусто.

Пусть $\alpha = \alpha^* + 1$ и для всякого $\alpha' < \alpha$ построена операция, отбирающая точки, получаемые δ -операцией Φ_N , для каждой из которых множество $\mathcal{M}_x^{(\alpha')}$ не пусто, причем

$$\Phi_{\check{N}_*^{(\alpha')}} \{E_n\} = \Phi_{\varphi(\check{N})} \{\mathcal{G}_{\nu(n_1 \dots n_k)}^{\alpha'}\}.$$

Пусть, как и ранее, $\check{N}^{(m_1 \dots m_t)_1}$ есть множество всех цепей базы \check{N} , первые t элементов которых соответственно равны m_1, \dots, m_t .

Положим

$$E_{m_1 \dots m_t}^{\alpha} = \Phi_{\varphi[\check{N}^{(m_1 \dots m_t)_1}]} \{\mathcal{G}_{\nu(p_1 \dots p_t)}^{\alpha^*}\}$$

и пусть

$$\mathcal{G}_{n_1 \dots n_k}^{\alpha} = \sum_{\substack{i: (n_1 \dots n_k \dots n_{k+r}) \\ n_1 < \dots < n_k < \dots < n_{k+r}}} \overline{\lim}_n E_{n_1 \dots n_k \dots n_{k+r} (n_{k+r} + n)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Phi_{\check{N}_*^{(\alpha)}} \{E_n\} &= \sum_{n_1 \dots n_k \dots \in \check{N}} \prod_{k=1}^{\infty} \mathcal{G}_{n_1 \dots n_k}^{\alpha} = \\ &= \sum_{\varphi(n_1 \dots n_k \dots) \in \varphi(\check{N})} \prod_{\nu \in \varphi(n_1 \dots n_k \dots)} \mathcal{G}_{\nu(n_1 \dots n_k)}^{\alpha} = \Phi_{\varphi(\check{N})} \{\mathcal{G}_{\nu(n_1 \dots n_k)}^{\alpha}\}. \end{aligned}$$

Пусть α — трансфинитное число второго рода и для всех $\alpha' < \alpha$

$$\Phi_{\check{N}_*^{(\alpha')}} \{E_n\} = \sum_{\varphi(n_1 \dots n_k \dots) \in \varphi(\check{N})} \prod_{\nu \in \varphi(n_1 \dots n_k \dots)} \mathcal{G}_{\nu(n_1 \dots n_k)}^{\alpha'} = \Phi_{\varphi(\check{N})} \{\mathcal{G}_{\nu(n_1 \dots n_k)}^{\alpha'}\}.$$

Пусть, далее,

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \dots \rightarrow \alpha.$$

Тогда

$$\Phi_{\check{N}_*^{(\alpha_n)}} \{E_n\} = \sum_{\varphi(n_1 \dots n_k \dots) \in \varphi(\check{N})} \prod_{\nu \in \varphi(n_1 \dots n_k \dots)} \mathcal{G}_{\nu(n_1 \dots n_k)}^{\alpha_n} = \Phi_{\varphi(\check{N})} \{\mathcal{G}_{\nu(n_1 \dots n_k)}^{\alpha_n}\}.$$

Множество

$$\Phi_{\check{N}_*^{(\alpha)}} \{E_n\} = \sum_{\varphi(n_1 \dots n_k \dots) \in \varphi(\check{N})} \prod_{\nu \in \varphi(n_1 \dots n_k \dots)} \prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_{\nu(n_1 \dots n_k)}^{\alpha_n} = \Phi_{\varphi(\check{N})} \left\{ \prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_{\nu(n_1 \dots n_k)}^{\alpha_n} \right\}.$$

ТЕОРЕМА 2. Если класс множеств Ξ инвариантен относительно δs -операций Φ_N , где база N есть A_2 -множество, то

$$\Phi_{\check{N}^*}^{**}(\alpha)(\Xi) \subset \Xi.$$

Если же класс множеств Ξ^* таков, что $\Phi_{N^*}(\Xi^*)$ входит в класс A_2 -множеств θ , то

$$\Phi_{\check{N}^*}^{**}(\alpha)(\Xi^*) \subset \theta.$$

Доказательство. В силу вышеприведенной конструкции, операция $\Phi_{\check{N}^*}^{**}(\alpha)$ сводится к повторному применению операций вида

$$\Phi_{N^{**}n_1 \dots n_k}, \quad \overline{\text{lim}}, \quad \Phi_{\varphi(\check{N}^*)}, \quad \Phi_{[\check{N}^*]^{**}(n_1 \dots n_k)_1}.$$

В силу вполне правильного отношения класса множеств Ξ^* с базой N^* ,

$$\Phi_{N^{**}n_1 \dots n_k}(\Xi^*) \subset \Phi_{N^*}(\Xi^*) \subset \theta.$$

А так как класс множеств Ξ (θ) находится во вполне правильном отношении с базой N^* и инвариантен относительно δs -операций с A_2 -базами, то он инвариантен и относительно операций

$$\Phi_{N^{**}n_1 \dots n_k}, \quad \overline{\text{lim}}, \quad \Phi_{\varphi(\check{N}^*)}, \quad \Phi_{[\check{N}^*]^{**}(n_1 \dots n_k)_1}.$$

Следовательно,

$$\Phi_{\check{N}^*}^{**}(\alpha)(\Xi) \subset \Xi, \quad [\Phi_{\check{N}^*}^{**}(\alpha)(\Xi^*) \subset \theta],$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Если Ξ есть проективный класс A_n -множестве, $n \geq 2$, то

$$\Phi_{\check{N}^*}^{**}(\alpha)(\Xi) \subset \Xi.$$

Поступило
7.V.1956

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Ляпунов А. А., Об операциях над множествами, допускающих трансфинитные индексы, Успехи матем. наук, т. XI. вып. 1 (67) (1956), 243—244.
- 2 Козлова З. И., О накрытии множеств, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 19 (1955), 125—132.
- 3 Козлова З. И., О накрытии множеств. II, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 21 (1957), 349—370.
- 4 Ступина И. Д., О некоторых свойствах Г-операции, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 21 (1957), 329—348.
- 5 Очан Ю. С., О переместимости δs -операций, Математ. сборн., 10 (52): 3 (1942), 151—163.
- 6 Канторович Л. В. и Ливенсон Е. М., Memoir on the analytical operations and projective Sets. I, Fundamenta Mathematicae, XVIII (1932), 214—271.
- 7 Канторович Л. В. и Ливенсон Е. М., Sur quelques théorèmes concernant

- la théorie des ensembles projectifs, Comptes Rendus de Paris, 204, № 5 (1937), 466—468.
- ⁸ Г ё д е л ь К., Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств, перевод А. А. Маркова, Успехи матем. наук, т. III, вып. 1 (23) (1948), 96—149.
- ⁹ Н о в и к о в П. С., О непротиворечивости некоторых положений дескриптивной теории множеств, Труды Матем. института им. В. А. Стеклова Ак. наук СССР, XXXVIII (1951), 279—316.
- ¹⁰ D e l a V a l l é e - P o u s s i n Ch., Integrales de Lebesgue. Fonctions d'ensembles. Classes de Baire., Paris, 1934.
- ¹¹ Т а й м а н о в А. Д., О жестких базах δ -операций, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 14 (1950), 443—448.
- ¹² П р о с к у р я к о в И. В., О некоторых свойствах локально-компактных и локально-бикompактных пространств, Ученые записки МГУ, Математика, вып. XX, книга 3-я, 1939.
-

А. Ф. ТИМАН

ДОБАВЛЕНИЕ К РАБОТЕ А. В. ЕФИМОВА «ОЦЕНКА МОДУЛЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИЙ КЛАССА \tilde{H}_2^1 »

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым)

В работе дается асимптотически точная оценка модуля непрерывности и роста произвольной, квазигладкой функции, заданной на всей оси, либо на полуоси.

1. В указанной работе А. В. Ефимова ⁽¹⁾ устанавливается, что известное неравенство [см. ⁽²⁾]:

$$\omega_x(f; h) = \sup_{|t| \leq h} |f(x) - f(x+t)| \leq \frac{1}{\ln 2} h |\ln h| + O(h) \quad (1)$$

для модуля непрерывности функции $f(x)$, заданной на некотором конечном отрезке $[a, b]$ и удовлетворяющей там условию

$$\left| f(x_1) - 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + f(x_2) \right| \leq |x_1 - x_2|, \quad x_1, x_2 \in [a, b], \quad (2)$$

асимптотически точное на классе всех таких функций, на подклассе периодических функций может быть заменено неравенством

$$\omega_x(f; h) \leq \frac{1}{\ln(\sqrt{2}+1)} h |\ln h| + O(h), \quad (3)$$

которое на данном подклассе при $h \rightarrow 0$ является асимптотически точным*.

Цель этого добавления — установить, что неравенство (3) при любых значениях $h > 0$ справедливо на более широком классе, а именно для всех функций $f(x)$, заданных на числовой оси $(-\infty, \infty)$ и удовлетворяющих там условию (2).

* Возможность понижения константы $\frac{1}{\ln 2}$ в неравенстве (1) на подклассе периодических функций была показана мною ранее в работе ⁽³⁾ (гл. III, § 5, стр. 88—91), где для этого случая получено неравенство:

$$\omega_x(f; h) \leq \frac{4}{3 \ln 3} h |\ln h| + O(h). \quad (4)$$

Если в (1) зафиксировать отрезок $[a, b]$ и считать $f(b) = f(a)$, а в (3) и (4) зафиксировать период, то величины $O(1)$ во вторых слагаемых в правых частях этих неравенств будут равномерно ограничены относительно x и f .

2. ТЕОРЕМА 1. Если функция $f(x)$, заданная на всей вещественной оси, для любых x_1 и x_2 удовлетворяет условию (2), то при произвольном $h > 0$

$$\omega_x(f; h) \leq \frac{1}{\ln(\sqrt{2}+1)} h |\ln h| + C[1 + |f(1) - f(0)|(1 + |x|) + |x \ln |x||] h, \quad (5)$$

где C — абсолютная константа. Коэффициент $\frac{1}{\ln(\sqrt{2}+1)}$ в этом неравенстве не может быть понижен как при $h \rightarrow 0$, так и при $h \rightarrow \infty$. Существует функция $f(x)$, заданная на $(-\infty, \infty)$, для которой при $h \rightarrow \infty$ и $h \rightarrow 0$ это неравенство обращается в асимптотическое равенство.

Пусть для любой рассматриваемой функции $f(x)$

$$f_x(t) = \frac{1}{2} [f(x+t) - f(x-t)].$$

Очевидно, что

$$\omega_x(f; h) = \sup_{|t| \leq h} |f_x(t)| + \theta h \quad (0 \leq \theta \leq 1).$$

Так как функция $f_x(t)$ при любом x является нечетной относительно t и удовлетворяет условию (2), то, подобно тому, как при доказательстве неравенства (4) [см. (3), гл. III, § 5, стр. 89—91], достаточно убедиться в том, что для всякой нечетной функции $f(x)$ из рассматриваемого класса

$$|f(x)| \leq \frac{1}{\ln(\sqrt{2}+1)} |x \ln |x|| + C[1 + |f(1)|]|x|. \quad (6)$$

Но если $0 < |x| < 1$, то, полагая $\gamma = \sqrt{2} - 1$, так же, как и в (1), получим, что

$$C_{m+1}f(\gamma^m) + C_m f(\gamma^{m+1}) \leq \sqrt{2} \sum_{k=1}^m C_k \gamma^k + |f(1)|,$$

где

$$C_m = \frac{1}{2\sqrt{2}} [\gamma^{-m} + (-1)^{m-1} \gamma^m].$$

Отсюда при помощи условия (2) и неравенства для максимума модуля квазигладкой функции [см. (2), лемма 1], используя те же рассуждения, что в периодическом случае, придем к неравенству (6), если $|x| < 1$.

Пусть теперь $|x| > 1$. В этом случае положим $\gamma = \sqrt{2} + 1$.

Из условия (2) непосредственно следует, что при любом целом $k \geq 0$

$$|f(\gamma^{k+1}) - 2f(\gamma^k) - f(\gamma^{k-1})| \leq 2\sqrt{2} \gamma^k.$$

Поэтому если

$$b_k = \frac{1}{\gamma^2 + 1} [\gamma^{k+2} + (-1)^k \gamma^{-k}], \quad (7)$$

то каким бы ни было натуральное число $m \geq 1$

$$\begin{aligned} |f(\gamma^m) - b_m f(1) - b_{m-1} f(\gamma^{-1})| &\leq \frac{2\sqrt{2}}{\gamma^2 + 1} \gamma^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} [\gamma^2 + (-1)^k \gamma^{-2k}] = \\ &= m\gamma^m + \gamma^{m-2} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \gamma^{-2k} = m\gamma^m + O(\gamma^m). \end{aligned}$$

Поскольку $f(x)$ — нечетная непрерывная функция, то

$$|f(\gamma^{-1})| \leq A[|f(1)| + 1],$$

где A — константа, не зависящая от f .

Стало быть, в силу (7), равномерно относительно всех $m \geq 1$

$$|f(\gamma^m)| \leq m\gamma^m + B[1 + |f(1)|]\gamma^m.$$

Отсюда, если воспользоваться леммой 1 из нашей работы (2), мы получим неравенство (6) для всех значений x , для которых $|x| > 1$. Остается учесть, что функция

$$f(x) = \frac{1}{\ln(\sqrt{2} + 1)} x \ln \frac{1}{|x|} \quad (8)$$

удовлетворяет условию (2) на всей числовой оси. Нам достаточно лишь показать, что она удовлетворяет этому условию на полуоси $[0, \infty)$ [см. (1)]. Но это непосредственно вытекает из того, что при любом $0 \leq \alpha \leq 1$

$$(1 + \alpha) \ln(1 + \alpha) + (1 - \alpha) \ln(1 - \alpha) \leq 2\alpha \ln 2 < 2\alpha \ln(\sqrt{2} + 1). \quad (9)$$

3. Заметим, что неравенство (5) перестает быть верным, если вместо класса функций, удовлетворяющих условию (2) на всей числовой оси, перейти к более широкому классу функций, удовлетворяющих этому условию только на полуоси. Здесь так же, как и в случае конечного отрезка, при любых значениях $h > 0$ справедливо неравенство (1), в котором коэффициент $\frac{1}{\ln 2}$ на данном классе функций понизить нельзя.

ТЕОРЕМА 2. Если функция $f(x)$, заданная на полуоси $[a, \infty)$, для любых x_1 и x_2 удовлетворяет условию (2), то при произвольном $h > 0$ имеет место неравенство:

$$\omega_x(f; h) \leq \frac{1}{\ln 2} h |\ln h| + C[1 + |f(a+1) - f(a)|(1 + |x|) + |x \ln |x||] h, \quad (10)$$

где C — абсолютная константа. Коэффициент $\frac{1}{\ln 2}$ в этом неравенстве не может быть понижен как при $h \rightarrow 0$, так и при $h \rightarrow \infty$. Существует функция $f(x)$, заданная на рассматриваемой полуоси, для которой при $x \geq a$, $h \rightarrow \infty$ и $h \rightarrow 0$, $x = a$ это неравенство обращается в асимптотическое равенство.

Не ограничивая общности, можно рассматривать полуось $[0, \infty)$ и считать, что $f(0) = 0$. Справедливость неравенства (10) при $h < 1$ вытекает из прежних результатов автора [см. (2), теорема 3]. Для остальных значений h рассуждения аналогичны. Мы рассматриваем функцию

$$\lambda(x) = \begin{cases} (n + 2 + |f(1)|)x - 2^{n+1}, & 2^n \leq x < 2^{n+1}, \\ |f(1)|x, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

которая, как это нетрудно проверить, удовлетворяет условию (2),

и учитываем, что при всех $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$|f(2^n)| \leq n2^n + 2^n |f(1)|.$$

Пользуясь леммой 1 работы (2), можно убедиться в справедливости неравенства

$$|f(x)| \leq \lambda(x) + A|x| \leq \frac{1}{\ln 2} x |\ln x| + C[1 + |f(1)|]x, \quad (11)$$

где A и C — константы, не зависящие от x и f . Отсюда нетрудно получить оценку (10) для всех $h > 1$.

Для функции

$$f(x) = \frac{1}{\ln 2} x \ln \frac{1}{x}, \quad (12)$$

которая, в силу (9), удовлетворяет условию (2) на полуоси $[0, \infty)$, неравенство (10) при $x = 0$, $h \rightarrow 0$ и $x \geq 0$, $h \rightarrow \infty$ обращается в асимптотическое равенство.

4. В заключение отметим, что неравенства (6) и (11) соответственно для всей оси и полуоси дают оценки:

$$\omega_x(f; h) \leq \frac{1}{\ln(\sqrt{2} + 1)} h |\ln h| + O\{|f(x+1) - f(x-1)| + 1\}h,$$

$$\omega_x(f; h) \leq \frac{1}{\ln 2} h |\ln h| + O\{|f(x+1) - f(x)| + 1\}h,$$

в которых величины $O(1)$ равномерно ограничены относительно x и f . Следовательно, если \mathfrak{M} — ограниченный класс функций, заданных на всей оси (соответственно, на полуоси) и удовлетворяющих там условию (2), то для верхней грани

$$\omega^*(h) = \sup_{f \in \mathfrak{M}} \sup_x \omega_x(f; h)$$

остаются в силе те же неравенства, что и в периодическом случае (соответственно, в случае конечного отрезка).

Если же функция $f(x)$, заданная на всей оси (соответственно, на полуоси) и удовлетворяющая там условию (2), неограничена, то, как это следует из (5) (соответственно из (10)), ее рост при $|x| \rightarrow \infty$ мажорируется правой частью неравенства

$$|f(x)| \leq \frac{1}{\ln(\sqrt{2} + 1)} |x \ln |x|| + O\{|f(1) - f(-1)| + 1\}|x|,$$

соответственно,

$$|f(x)| \leq \frac{1}{\ln 2} |x \ln |x|| + O\{|f(a+1) - f(a)| + 1\}|x|,$$

в котором $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная относительно x и f . Примеры (8) и (12) показывают, что эти оценки при $|x| \rightarrow \infty$ являются асимптотически точными.

Поступило
15.X.1956

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Ефимов А. В., Оценка модуля непрерывности функций класса H_2^* , Известия Ак. наук СССР, серия матем., 21 (1957), 283—288.
- 2 Тиман А. Ф., О квазитгладких функциях, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 15 (1951), 243—254.
- 3 Тиман А. Ф., Исследования по теории приближения функций, Докторская диссертация, Харьков, 1951.

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

В работе «О решении задачи Коши для уравнения $\Delta u - q(x_1, \dots, x_n)u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ по методу С. Л. Соболева», опубликованной в Известиях Ак. наук СССР, серия матем., 20 (1956), 337—376, по недосмотру автора на стр. 355 помещен не тот рисунок, на который в работе делаются ссылки, что может привести к недоразумению. Ниже указан правильный рисунок.

Пользуясь случаем, внесем некоторые дополнения и исправления в шестой параграф работы. В формуле (6.6) при переходе к сферическим координатам переменные углы интегрирования мы обозначили через $\theta_1, \dots, \theta_n$, в то время как во втором параграфе мы обозначили этими же буквами углы между вектором r_{xy} и фиксированной системой координат (x_1, \dots, x_n) , а переменные углы были обозначены через $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Это может привести к недоразумению и поэтому в формуле (6.6) и дальше углы $\theta_1, \dots, \theta_n$ лучше заменить на $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

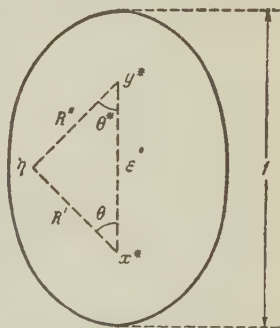
При этом необходимо учесть следующее. В теоремах 2.1 и 2.2 коэффициенты суть целые многочлены не только от синусов и косинусов углов θ_i , но и углов α_i . Это видно из формул (2.6) и (2.9), если в формуле (2.11) оператор Δ записать в прямоугольной системе координат, а не в сферической.

В результате вычислений мы получим, что в формуле (6.18) величины a суть целые многочлены от элементов $\gamma_{ij}^{(n)}$ из формулы (2.6) с коэффициентами вида $a(x) \cdot b(y)$, где $a(x)$ и $b(y)$ — дифференцируемые функции. При дальнейших итерациях необходимо в коэффициентах $a(x)$ заменить x на z и $\gamma_{ij}^{(n)}$ — на $\tilde{\gamma}_{ij}^{(n)}$. Последние числа определяются аналогично числам $\gamma_{ij}^{(n)}$, если ось x_1 совместить с вектором r_{yz} .

Это преобразование можно рассматривать как последовательное совмещение оси x_1 сначала с вектором r_{xy} , а затем с вектором r_{yz} . Поэтому матрица $\{\tilde{\gamma}_{ij}^{(n)}\}$ есть произведение матрицы $\{\gamma_{ij}^{(n)}\}$ и матрицы такого же вида, но в которой углы θ_i заменены на углы α_i^* (см. лемму 2.3).

Это показывает, что $\tilde{\gamma}_{ij}^{(n)}$ суть целые многочлены от $\gamma_{ij}^{(n)}$, а также от синусов и косинусов углов α_i . Далее, $a(z)$ можно разложить по степеням $r'' = |y - z|$, причем коэффициенты разложения суть целые многочлены от $\gamma_{ij}^{(n)}$, а также от синусов и косинусов углов α_i . Таким образом, к последовательным итерациям применима индукция. Окончательная формулировка теоремы 6.2 не меняется.

Б. М. Левитан



Зам. главного редактора доктор физ.-мат. наук И. Р. Шафаревич

Т-08947	Подписано к печати 11/X 1957 г.	Формат бум. $70 \times 108^{1/16}$	Зак. 1992
Уч.-изд.-л. 11,7	Бум. л. $4^{3/4}$	Печ. л. 13,02	Тираж 2575 экз.

2-я типография Издательства Академии наук СССР. Москва, Шубинский пер., 10





40 ЛЕТ СОВЕТСКОЙ МАТЕМАТИКИ

Великая Октябрьская социалистическая революция в России, превратившая нашу родину в могучий Союз Советских Социалистических Республик, явилась тем рубежом, который ознаменовал начало новой эры во всех областях отечественной науки. Это, конечно, относится в полной мере и к точным наукам: математике, физике, химии, на примере которых с большой яркостью видны те новые огромные сдвиги, начало которых было заложено в октябре 1917 года.

Если в прошлой истории, вплоть до первых десятилетий нашего века, русская наука насчитывала ученых единицами, научных школ было мало и деятели их немногочисленны, то уже с 30-х годов разбуженные творческие силы народа начинают бить ключом в различных областях культуры, и мир оказывается свидетелем многих и разнообразных первоклассных научных достижений в нашей стране. Знамением времени в точных науках в Советском Союзе после октябрьского периода явился большой охват различных новых областей, расширение горизонтов науки. Растут и развиваются новые направления внутри каждой области знаний и среди них как наиболее глубокие теоретические, так и прикладные.

Середина XX века в мировой науке — это время изучения атомного ядра, эпоха открытия методов использования атомной энергии, а также эпоха рождения математических и логических машин, несущих человечеству раскрепощение от наиболее тяжелых и изнурительных форм умственного и нервного труда, — тех машин, которые делают эпоху коммунизма близкой, как никогда ранее.

В это время советская наука показывает свою возросшую силу. Несмотря на то что Советский Союз понес самые тяжелые, по сравнению со всеми крупными европейскими странами, потери в мировой войне, наша родина значительно опережает в самых актуальных направлениях все эти страны и в ряде случаев оказывается вообще впереди всех стран мира.

В современном мире, где прогресс любого государства немыслим без своей большой и широкой науки, Советский Союз прочно занял достойное место. Наша страна, ее успехи и достижения стоят сейчас в самом центре внимания мировой общественности.

Почти во всех областях науки мы можем назвать ряд серьезных достижений советских ученых, по праву снискавших себе широкую известность.

Прекрасными результатами отмечен и путь советской математики. Этот путь хочется проиллюстрировать, подводя итоги 40-летию Советской власти. Перечислить все наиболее важные результаты советской математики было бы невозможно, и мы укажем лишь на некоторые из них.

С первых шагов Советской власти в 1917—1918 гг., во время гражданской войны, в годы, когда вызванная интервенцией и войной тяжелая

разруха сковала народное хозяйство страны, молодое советское государство заботится об ученых. По инициативе В. И. Ленина ученым создаются условия труда и быта, обеспечивающие широкие возможности, какие вообще могла создать в то время страна.

В этот первый период советской власти в математике были наиболее представлены те направления, которые исторически сохранились от предреволюционных. Такими направлениями были разрабатывавшиеся в трудах петербургской математической школы теория чисел и алгебра, которым были посвящены исследования Чебышева, Коркина, Золотарева, Маркова; теория вероятностей, основанная трудами Чебышева, Ляпунова и Маркова; некоторые разделы механики, значительно продвинутые вперед замечательными исследованиями Ляпунова, Жуковского и Чаплыгина, а также ряд проблем теории уравнений в частных производных, в которых работали Ляпунов и Стеклов. Слабее сохранились традиции в области геометрии, хотя в этой области Россия подарила миру гениальные исследования Лобачевского. Сравнительно незадолго до этого начались у нас исследования по теории функций Егоровым, Лузиным и другими учеными.

После окончания гражданской войны и периода восстановления народного хозяйства вместе с бурным развитием советской экономики быстро развивалась и советская наука. Создаются такие научно-исследовательские институты, как Физико-математический институт Академии наук, основанный В. А. Стекловым и впоследствии давший начало двум институтам: Математическому им. В. А. Стеклова и Физическому им. П. В. Лебедева, возникают научно-исследовательские институты в крупнейших университетах, появляются новые академии наук в национальных республиках: на Украине, в Грузии, Армении и в других. Ленинская национальная политика — политика предоставления всех культурных возможностей бывшим угнетенным народам — начинает приносить свои плоды.

Советская власть широко раскрыла двери высшей школы перед массами. Хлынувший в университеты поток жаждущей знаний активной творческой молодежи приносит советской науке и, в частности, советской математике большие возможности роста.

Одновременно с этим укрепляются и международные связи советских ученых, выходящих в мировую науку в качестве большого организованного коллектива.

В результате этой политики к тридцатым годам наступает период расцвета советской математики, характерным для которого является появление большого числа новых направлений исследования. Помимо этого и в старых классических вопросах были достигнуты новые сильные результаты.

В области теории чисел в это время были созданы новые глубокие методы, основанные на оценках тригонометрических сумм. Этот метод привел к решению классических задач Варинга и Гольдбаха и оказался плодотворным в самых различных теоретико-числовых задачах. Параллельно с этим был достигнут существенный успех в теории трансцендентных чисел, доказана трансцендентность обширного нового класса чисел. В задачах аддитивной теории чисел методом теории плотности последовательности были также получены новые результаты.

Большое количество замечательных исследований появилось в теории

функций вещественного и комплексного переменного. Исследования по дескриптивной и метрической теории функций и теории множеств послужили базой для развития топологии и функционального анализа. Топология приобретает самостоятельное значение, превращаясь также в орудие классического математического анализа. Впервые в нашей стране топологическими методами решается ряд трудных и весьма интересных задач анализа.

В тридцатые же годы возникает теория обобщенных функций, перетворенная за границей 15 лет спустя под названием «распределений». На почве идей функционального анализа глубоко исследуются классические уравнения математической физики. Возникают основы новой теории системы уравнений в частных производных, новая их классификация, теория лакун и т. п., а также решается ряд задач математической физики при помощи новых глубоко разработанных методов, таких, как метод барьеров, метод малого параметра и др. Успешно разрабатывается и качественная теория уравнений в частных производных. Новые сильные результаты получаются в теоремах существования, единственности и устойчивости классических задач.

Наконец, и для теории вероятностей это время знаменуется новыми фундаментальными достижениями. Создание трудами советских ученых новой аксиоматики в теории вероятностей превратило эту дисциплину в мощную современную науку и привело к новым постановкам целого ряда задач.

В годы войны, несмотря на огромные материальные и человеческие жертвы, советская наука и, в частности, советская математика неуклонно продолжает свое развитие. После победоносного окончания войны начинается бурный расцвет советской науки. В эти годы опять сказывается непрерывная забота Коммунистической партии и Советского правительства о науке и об ученых. Осуществляется ряд серьезных мероприятий, направленных на создание максимально благоприятных условий для научного творчества, которые дают возможность сравнительно быстро залечить раны, нанесенные войной.

Конец 40-х и начало 50-х годов ознаменованы новыми успехами советской математики. Наряду с теорией чисел, являющейся традиционной для советской математики, где в эти годы получены важные результаты в теории рядов Дирихле, в теории простых чисел, в арифметических прогрессиях, можно указать на новые результаты в алгебре, в теории групп Ли и в теории представлений групп.

Успешно развивается в эти годы функциональный анализ и его применения к дифференциальным уравнениям и к теоретической физике.

В теории вероятностей создается теория стохастических процессов, открывающая новую главу этой науки.

Новым этапом в развитии советской науки, как и всего советского государства, явился исторический XX съезд КПСС. Этот съезд открыл перед советской наукой и, в частности, перед советской математикой новые возможности. В самое последнее время мы явились свидетелями крупных успехов в теории информации, в общей теории алгоритмов, в математической логике вообще и в прикладной математической логике в част-

ности. Особо важным успехом было обнаружение алгоритмической неразрешимости некоторых классических математических задач.

К числу примеров, иллюстрирующих успехи советской математики последнего периода, можно отнести такие серьезные результаты, как установление числа предельных циклов у обыкновенных дифференциальных уравнений с рациональной правой частью, решение обратной задачи теории Галуа для разрешимых групп, а также, разумеется, большие успехи вычислительной математики, в результате которых чрезвычайно расширились ее применения в самых разнообразных областях науки и техники.

Новые задачи, поставленные XX съездом КПСС, потребовали от советских ученых совершенно иных масштабов научной работы. Это относится в полной мере и к советским математикам.

Политика мира и дружбы между народами, последовательно проводимая Советской страной, привела к заметному оживлению международных связей советских математиков и контактов с учеными разных стран.

Существовавшая до сих пор концентрация математических научных учреждений вокруг небольшого числа центров преимущественно в Европейской части СССР, в ближайшее время должна смениться широким распространением математической науки по всему Союзу.

Предстоит примерно такой же важности преобразование, как то, которое было связано с постройкой новой промышленности на востоке и в Сибири. В свое время эта промышленная революция открыла широкие перспективы индустриализации нашей родины, дав ей новые неисчерпаемые резервы.

До самых в прошлом отдаленных уголков нашего Союза должна дотянуться сеть университетов, где будут готовиться новые математики, сеть вычислительных центров и математических институтов, способных двигать вперед математическую науку и ее всевозможные применения и готовых для той совершенно новой роли, которую будет играть наука в коммунистическом обществе.

Мы стоим на пороге великих свершений в нашей стране. Эти свершения готовятся всем советским народом, среди которого советские ученые и, в частности, советские математики, несомненно, будут играть достойную роль.

Л. С. ПОНТЯГИН

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ВЫСШИХ ПРОИЗВОДНЫХ

В работе выводятся асимптотические формулы для решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных на переходных участках.

Различные задачи теории колебаний приводят к изучению систем дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при старших производных.

Пусть

$$\begin{aligned}x &= (x^1, \dots, x^k), \\y &= (y^1, \dots, y^l)\end{aligned}$$

— неизвестные функции времени t и

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x}^i &= f^i(x^1, \dots, x^k, y^1, \dots, y^l), \quad i = 1, \dots, k, \\ \dot{y}^j &= g^j(x^1, \dots, x^k, y^1, \dots, y^l), \quad j = 1, \dots, l,\end{aligned} \tag{1}$$

— система уравнений, управляющая их изменением, где ε — малый положительный параметр, а функции f^i и g^j несколько раз дифференцируемы по своим аргументам. Систему уравнений (1) в векторной форме можно записать в виде:

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y).\end{aligned} \tag{1'}$$

Говоря, что параметр ε мал, мы имеем в виду приближенное изучение решений системы уравнений (1) с отбрасыванием величин той или иной степени малости относительно ε . Пусть

$$x = \varphi(t, \varepsilon), \quad y = \psi(t, \varepsilon) \tag{2}$$

— некоторое решение системы (1). Можно поставить вопрос: стремится ли решение (2) к некоторому пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, т. е. может ли оно быть записано в виде:

$$x = \varphi_1(t) + \Delta_1 \varphi(t, \varepsilon), \quad y = \psi_1(t) + \Delta_1 \psi(t, \varepsilon), \tag{3}$$

где функции $\Delta_1 \varphi(t, \varepsilon)$ и $\Delta_1 \psi(t, \varepsilon)$ стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$? Возможно, что это имеет место лишь на некотором интервале изменения времени t , возможно, что это имеет место лишь для одной из функций $\varphi(t, \varepsilon)$ или $\psi(t, \varepsilon)$. Если хотя бы одна из функций $\Delta_1 \varphi(t, \varepsilon)$ и $\Delta_1 \psi(t, \varepsilon)$ стремится

ся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$, то можно выяснить порядок величины этой функции относительно ε . Например, может оказаться, что

$$\Delta_1 \varphi(t, \varepsilon) = \varepsilon^{\frac{2}{3}} \varphi_2(t) + \Delta_2 \varphi(t, \varepsilon),$$

где $\Delta_2 \varphi(t, \varepsilon)$ стремится к нулю уже быстрее, чем $\varepsilon^{\frac{2}{3}}$ — скажем, как $\varepsilon \ln \varepsilon$; тогда функция $\varphi(t, \varepsilon)$ может быть записана в виде:

$$\varphi(t, \varepsilon) = \varphi_1(t) + \varepsilon^{\frac{2}{3}} \varphi_2(t) + \varepsilon \ln \varepsilon \varphi_3(t) + \Delta_3 \varphi(t, \varepsilon), \quad (4)$$

где $\Delta_3 \varphi(t, \varepsilon)$ стремится к нулю уже быстрее, чем $\varepsilon \ln \varepsilon$. Таким образом, речь может идти об асимптотическом разложении решения (2) в ряд и о вычислении нескольких членов этого ряда. При этом, конечно, вполне может случиться, что на отдельных участках изменения t будут иметь место различные разложения. Может также оказаться, что запись функции $\varphi(t, \varepsilon)$ в виде (4), где $\varphi_1(t)$ уже не зависит от ε , невозможна, но окажется возможной запись в виде:

$$\varphi(t, \varepsilon) = \varphi_1(t, \varepsilon) + \Delta_1 \varphi(t, \varepsilon), \quad (5)$$

где $\Delta_1 \varphi(t, \varepsilon)$ стремится к нулю вместе с ε , а функция $\varphi_1(t, \varepsilon)$ хотя и зависит от ε , но может быть вычислена. В этом случае порядок стремления к нулю функции $\Delta_1 \varphi(t, \varepsilon)$ также представляет интерес, и также можно поставить вопрос о выделении главной части функции $\Delta_1 \varphi(t, \varepsilon)$. Такова, в общих чертах, постановка вопроса.

Переменные x и y в системе уравнений (1) не равноправны: вектор v фазовой скорости в пространстве переменных x и y распадается на два вектора:

$$\dot{v} = \left(\frac{1}{\varepsilon} f(x, y), g(x, y) \right) = \left(\frac{1}{\varepsilon} f(x, y), 0 \right) + (0, g(x, y)), \quad (6)$$

причем второй из них не зависит от ε , а первый стремится к бесконечности при $\varepsilon \rightarrow 0$, если только $f(x, y) \neq 0$. На основании этого, переменные (1) можно назвать *быстро меняющимися*, а переменные (2) — *медленно меняющимися*.

Основной подход к системе (1) заключается в том, что сперва изучается поведение быстро меняющихся переменных при постоянных значениях медленно меняющихся переменных. Таким образом, первоначально рассматривается система уравнений

$$\varepsilon \dot{x} = f(x, y), \quad (7)$$

в которой y есть постоянный вектор. Относительно поведения решений системы (7) при постоянном y можно делать различные предположения. В настоящей работе рассматривается тот случай, когда система уравнений (7) своими стационарными решениями имеет лишь положения равновесия и каждое решение системы (7) при $t \rightarrow \infty$ стремится к некоторому устойчивому положению равновесия. (Другой важный и естественный случай, когда система (7) имеет среди своих стационарных решений и устойчивые предельные циклы, в настоящей работе не рассматривается.)

Пусть

$$x = \varphi(y) \quad (8)$$

— некоторое устойчивое положение равновесия системы (7). Оно зависит от векторного параметра y и в некоторой области Γ изменения параметра y сохраняет свою устойчивость. Подставляя (8) в систему

$$\dot{y} = g(x, y), \quad (9)$$

мы получаем для переменных y систему

$$\dot{y} = g(\varphi(y), y). \quad (10)$$

Эта последняя уже не содержит неизвестных функций x . Пусть

$$y = \psi(t) \quad (11)$$

— ее решение. Подставляя величину y в правую часть (8), получаем

$$x = \varphi(\psi(t)), \quad (12)$$

и можно ожидать, что совокупность формул (11) и (12) даст нам приближенное решение системы (1). Это действительно было доказано в работах А. Н. Тихонова [см. (1)]. Можно доказать также, что полученное таким образом приближенное решение отличается от точного на величину порядка ϵ .

Так как положение равновесия (8) определяется из уравнения

$$f(x, y) = 0, \quad (13)$$

то мы можем сказать, что приближенное решение (11), (12) системы (1) есть точное решение вырожденной системы

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 0, \\ \dot{y} &= g(x, y), \end{aligned} \quad (14)$$

получающейся из (1) при $\epsilon = 0$.

Описанная операция осуществима до тех пор, пока положение равновесия (8) остается устойчивым, т. е. пока все собственные числа матрицы

$$A = \left\| \frac{\partial f^i}{\partial x^\alpha} \right\| \quad (15)$$

имеют в соответствующих точках отрицательные действительные части («экспоненциальная устойчивость»). Предположим теперь, что на интервале $-\alpha < t < 0$ решение (11) определено и положение равновесия (8) экспоненциально устойчиво, а при $t = 0$ экспоненциальная устойчивость решения (8) теряется, и у матрицы (15) появляется одно нулевое собственное значение кратности один, в то время как остальные собственные значения сохраняют отрицательные действительные части. Таким образом, на интервале $-\alpha < t < 0$ определено решение

$$x = x_0(t), \quad y = y_0(t) \equiv \psi(t) \quad (16)$$

вырожденной системы (14).

Введем в рассмотрение фазовое пространство R^{k+l} системы (1). Оно естественно распадается в прямую сумму своих подпространств X^k и Y^l

так, что каждая его точка записывается в виде пары (x, y) . Пространство всех пар (x, y) с фиксированным вектором y обозначим через X_y^k . Оно является фазовым пространством системы (7). При изменении t вдоль интервала $-\alpha < t < 0$ положение равновесия (8) меняется, а при $t = 0$ в пространстве $X_{\psi(0)}^k$ возникает вырожденное положение равновесия (x_1, y_1) . Из того, что все собственные значения матрицы (15) в точке (x_1, y_1) имеют отрицательные действительные части, за исключением одного, которое равно нулю, следует, что у системы (10) при $y = y_1$ имеется (при некоторых дополнительных предположениях общего характера) лишь одна траектория, входящая в положение равновесия x_1 при $t \rightarrow -\infty$. Эта траектория лежит в подпространстве $X_{\psi(0)}^k$ пространства R^{k+l} .

Рассмотрим решение

$$x = x(t, \varepsilon), \quad y = y(t, \varepsilon) \quad (17)$$

системы (1) с начальными значениями при $t = -\alpha$, отклоняющимися от начальных значений решения (16) вырожденной системы (14) на величины порядка ε . Как мы уже отмечали, при $-\alpha < t < -p$, где p — малое положительное, но не зависящее от ε число, решение (17) отличается от решения (16) на величины порядка ε . Более того, сравнительно легко доказать, что решение (17) раскладывается на этом участке в асимптотический ряд по целым степеням ε . Однако при $t \rightarrow 0$ его поведение становится более сложным.

В настоящей работе получено асимптотическое разложение решения (17) при значениях t , включающих и $t = 0$, с точностью до величин порядков $\varepsilon^{\frac{2}{3}}$ и $\varepsilon \ln \varepsilon$ и с пренебрежением величинами порядка ε . Кроме того, с этой же точностью вычислена величина отклонения решения (17) от k -мерной плоскости $X_{\psi(0)}^k$ на некотором конечном протяжении траектории решения (17).

Все вычисления, проведенные в работе, тщательно проверил В. Г. Болтынский, за что я выражаю ему благодарность.

Основные результаты настоящей работы в кратком виде были ранее опубликованы в работе (3). Приведенная в работе (3) формула (5) неверна.

§ 1. Вычисление решений вблизи участков медленного движения

Пусть

$$\begin{aligned} x^i &= x_0^i(t), \\ y^j &= y_0^j(t) \end{aligned} \quad (1.1)$$

— некоторое решение системы (14), идущее при $\bar{t} \leq t \leq \bar{\bar{t}}$ (не исключается случай $\bar{t} = +\infty$) по поверхности F , выделяемой уравнением (13), на конечном, не зависящем от ε расстоянии от $(l-1)$ -мерной поверхности Φ , уравнение которой:

$$f(x, y) = 0, \quad \det \left\| \frac{\partial f^i}{\partial x^\alpha} \right\| = 0.$$

Пусть, далее,

$$\begin{aligned} x^i &= x^i(t, \varepsilon), \\ y^j &= y^j(t, \varepsilon) \end{aligned} \quad (1.2)$$

— решение системы (1) с начальными значениями $x^i(\bar{t}, \varepsilon) = \bar{x}^i$, $y^j(\bar{t}, \varepsilon) = \bar{y}^j$, удовлетворяющими условиям

$$\bar{x}^i - x_0^i(\bar{t}) = O(\varepsilon), \quad \bar{y}^j - y_0^j(\bar{t}) = O(\varepsilon).$$

Без большого труда можно доказать, что решение (1.2) при $t \leq \bar{t} \leq \bar{t}$ представляется в виде

$$\begin{aligned} x^i &= x_0^i(t) + M_1^i(t, \varepsilon), \\ y^j &= y_0^j(t) + N_1^j(t, \varepsilon), \end{aligned} \quad (1.3)$$

причем функции M_1^i и N_1^j стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Более того, оказывается [это также следует из результатов А. Н. Тихонова (1) и А. Б. Васильевой (2)], что функции M_1^i и N_1^j имеют порядок ε и даже могут быть представлены в виде

$$M_1^i = \varepsilon x_1^i(t) + M_2^i(t, \varepsilon), \quad N_1^j = \varepsilon y_1^j(t) + N_2^j(t, \varepsilon),$$

где M_2^i и N_2^j имеют порядок ε^2 . Можно идти и дальше по этому пути и для решения (1.2) получить асимптотические формулы

$$\begin{aligned} x^i &= x_0^i(t) + \varepsilon x_1^i(t) + \dots + \varepsilon^k x_k^i(t) + M_{k+1}^i(t, \varepsilon), \\ y^j &= y_0^j(t) + \varepsilon y_1^j(t) + \dots + \varepsilon^k y_k^j(t) + N_{k+1}^j(t, \varepsilon), \end{aligned} \quad (1.4)$$

где M_{k+1}^i и N_{k+1}^j имеют порядок $O(\varepsilon^{k+1})$. Для получения формул (1.4) требуется, конечно, соответствующая гладкость функций f^i и g^j .

На доказательстве справедливости разложений (1.3) и (1.4) мы здесь не останавливаемся. Отметим только, что их можно вывести, комбинируя результаты А. Н. Тихонова (1) и А. Б. Васильевой (2). Впрочем, в нашей следующей работе мы приведем простое прямое доказательство справедливости разложения (1.4).

Предположим, что решение (1.1) вырожденной системы (14) при некотором значении $t = t_1 \geq \bar{t}$ приходит в точку $s(x_1, y_1)$, где $\det \left\| \frac{\partial f^i}{\partial x^\alpha} \right\| = 0$. Элементарный расчет показывает, что при значениях t , достаточно близких к t_1 , суммы

$$\sum_{r=0}^k \varepsilon^r x_r^i(t), \quad \sum_{r=0}^k \varepsilon^r y_r^j(t)$$

уже не представляют с указанной точностью решение (1.2), а при $t = t_1$ вообще не имеют смысла.

Нашей ближайшей задачей является изучение поведения решения (1.2) при $t \rightarrow t_1$. Для этой цели систему уравнений (1) в окрестности точки $s(x_1, y_1)$ оказывается удобным записать в некоторой специальной форме.

Предположим, что точка $s(x_1, y_1)$ (в дальнейшем мы будем называть ее *точкой срыва*) имеет «общий тип», т. е. а) не является положением равновесия системы (1), б) все собственные числа матрицы $\left\| \frac{\partial f^i}{\partial x^\alpha} \right\|$ в точ-

ке $s(x_1, y_1)$ имеют отрицательные действительные части, кроме одного, которое обращается в нуль. Тогда, при выполнении некоторых дополнительных условий невырожденности, система (1) в окрестности точки $s(x_1, y_1)$ может быть записана в форме:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi}^i &= (\xi^1)^2 + \eta^1 + b_{\beta'}^1 \eta^{\beta'} + c_{\beta'}^1 \xi^1 \eta^{\beta'} + d_1^1 (\xi^1)^3 + e_{\alpha'}^1 \xi^1 \xi^{\alpha'} + \dots, \\ \dot{\xi}^{\alpha'} &= a_{\alpha'}^i \xi^{\alpha'} + b_{\beta'}^i \eta^{\beta'} + c_0^i (\xi^1)^2 + d_1^i (\xi^1)^3 + e_{\alpha'}^i \xi^1 \xi^{\alpha'} + c_{\beta'}^i \xi^1 \eta^{\beta'} + \dots, \\ \dot{\eta}^1 &= 1 + \alpha_1^1 \xi^1 + \dots, \\ \dot{\eta}^j &= \alpha_1^j \xi^1 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

$$(i = 2, \dots, k, \quad j = 2, \dots, l),$$

причем $\det \|a_{\alpha'}^{i'}\| \neq 0$. (Здесь мы выписали только члены, которые нам непосредственно понадобятся для расчетов. Отметим, что в (1.5), так же как и всюду в дальнейшем, суммирование по штрихованному индексу начинается с двух:

$$a_{\alpha'}^i \xi^{\alpha'} = \sum_{\alpha'=2}^k a_{\alpha'}^i \xi^{\alpha'}, \quad b_{\beta'}^1 \eta^{\beta'} = \sum_{\beta'=2}^l b_{\beta'}^1 \eta^{\beta'}$$

и т. д.) В § 3 мы укажем соответствующую систему координат и найдем нужные нам выражения от коэффициентов правых частей системы (1.5) в инвариантной форме. Там же будет указано, какие дополнительные условия невырожденности точки срыва $s(x_1, y_1)$ мы предполагаем выполненными.

Систему (1.5) коротко перепишем так:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi}^i &= \Phi^i(\xi^1, \dots, \xi^k, \eta^1, \dots, \eta^l), \\ \dot{\eta}^j &= \Psi^j(\xi^1, \dots, \xi^k, \eta^1, \dots, \eta^l). \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

Решение вырожденной системы

$$\left. \begin{aligned} \Phi^i(\xi^1, \dots, \xi^k, \eta^1, \dots, \eta^l) &= 0, \\ \dot{\eta}^j &= \Psi^j(\xi^1, \dots, \xi^k, \eta^1, \dots, \eta^l), \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

соответствующее в системе координат ξ^i, η^j решению (1.1), [пусть будет

$$\left. \begin{aligned} \xi^i &= \xi_0^i(t), \\ \eta^j &= \eta_0^j(t). \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

Точкой срыва для решения (1.8) будет теперь начало координат $\xi = 0$, $\eta = 0$.

Прежде всего мы вычислим траекторию решения (1.8), приняв вдоль нее за независимую переменную координату ξ^1 . Очевидно, что

$$\left| \begin{array}{cccc} \frac{\partial \Phi^1}{\partial \eta^1} & \frac{\partial \Phi^1}{\partial \xi^2} & \dots & \frac{\partial \Phi^1}{\partial \xi^k} \\ \frac{\partial \Phi^2}{\partial \eta^1} & \frac{\partial \Phi^2}{\partial \xi^2} & \dots & \frac{\partial \Phi^2}{\partial \xi^k} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{\partial \Phi^k}{\partial \eta^1} & \frac{\partial \Phi^k}{\partial \xi^2} & \dots & \frac{\partial \Phi^k}{\partial \xi^k} \end{array} \right| \neq 0 \quad (1.9)$$

при $\xi = 0$, $\eta = 0$. Поэтому из k соотношений

$$\Phi^i(\xi^1, \dots, \xi^k, \eta^1, \dots, \eta^l) = 0 \quad (1.10)$$

величины $\eta^1, \xi^2, \dots, \xi^k$ можно выразить через $\xi^1, \eta^2, \dots, \eta^l$. Непосредственно проверяется, что эти выражения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \eta^1 &= -(\xi^1)^2 + h^1(\xi^1, \eta^2, \dots, \eta^l), \\ \xi^i &= K^i(\xi^1)^2 + h^i(\xi^1, \eta^2, \dots, \eta^l), \quad i = 2, \dots, k, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где K^i — числовые коэффициенты, а функции h^1, \dots, h^k не содержат членов вида $p\xi^1$, $q \cdot (\xi^1)^2$. Дифференцируя по t первое соотношение (1.11), получим:

$$\dot{\eta}^1 = -2\xi^1 \cdot \dot{\xi}^1 + h_{\xi^1}^1 \cdot \dot{\xi}^1 + h_{\eta^{\beta'}}^1 \cdot \dot{\eta}^{\beta'}, \quad (1.12)$$

откуда

$$\dot{\xi}^1 = \frac{\dot{\eta}^1 - h_{\eta^{\beta'}}^1 \cdot \dot{\eta}^{\beta'}}{-2\xi^1 + h_{\xi^1}^1}, \quad (1.13)$$

или, подставляя сюда вместо $\dot{\eta}^1$, $\dot{\eta}^{\beta'}$ их значения из (1.5):

$$\dot{\xi}^1 = \frac{1 + \alpha_1^1 \xi^1 + \dots - h_{\eta^{\beta'}}^1 \cdot (\alpha_1^{\beta'} \xi^1 + \dots)}{-2\xi^1 + h_{\xi^1}^1(\xi^1, \eta^2, \dots, \eta^l)}. \quad (1.14)$$

Далее, заменяя в (1.14) и в уравнениях

$$\dot{\eta}^j = \Psi^j(\xi^1, \dots, \xi^k, \eta^1, \dots, \eta^l), \quad j = 2, \dots, l, \quad (1.15)$$

$\eta^1, \xi^2, \dots, \xi^k$ их выражениями (1.11), мы получим следующую систему дифференциальных уравнений для $\xi^1, \eta^2, \dots, \eta^l$:

$$\dot{\xi}^1 = \frac{1 + \alpha_1^1 \xi^1 + \dots}{-2\xi^1 + \dots}, \quad (1.16)$$

$$\dot{\eta}^j = \alpha_1^j \xi^1 + \dots, \quad j = 2, \dots, l$$

В многогоном здесь заменены выражения, не содержащие членов вида $p, q\xi^1$. Вместо системы (1.16) рассмотрим следующую систему:

$$\frac{d\eta^j}{d\xi^1} = \frac{-2\alpha_1^j(\xi^1)^2 + \dots}{1 + \alpha_1^1 \xi^1 + \dots}, \quad j = 2, \dots, l. \quad (1.17)$$

Ее решение, проходящее через начало координат, как легко убедиться, будет

$$\eta^j = -\frac{2}{3} \alpha_1^j (\xi^1)^3 + \dots, \quad (1.18)$$

где не выписаны более высокие степени ξ^1 . Подставляя (1.18) в (1.11) и проводя небольшие дальнейшие вычисления, найдем η^1, \dots, η^l и ξ^2, \dots, ξ^k :

$$\left. \begin{aligned} \eta^1 &= -(\xi^1)^2 + \left(\frac{2}{3} \alpha_1^{\beta'} b_{\beta'}^1 + c_1^1 - d_1^1 - e_2^1 \theta^{\alpha'} \right) (\xi^1)^3 + \dots, \\ \eta^j &= -\frac{2}{3} \alpha_1^j (\xi^1)^3 + \dots, \\ \xi^i &= \theta^i \cdot (\xi^1)^2 + \Pi^i \cdot (\xi^1)^3 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

Здесь θ^i и Π^i — числовые коэффициенты, явные выражения которых мы не выписываем.

Таким образом, мы вычислили траекторию решения (1.8), приняв за независимое переменное вдоль нее ξ^1 .

Возвратимся теперь к системе (1.5). На участке $-p \leq \xi^1 \leq p$, где p — достаточно малое, но не зависящее от ε число, величину ξ^1 примем за независимую переменную и вместо системы (1.6) будем рассматривать систему:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi^i}{d\xi^1} &= \frac{\Phi^i(\xi^1, \dots, \xi^k, \eta^1, \dots, \eta^l)}{\Phi^1(\xi^1, \dots, \xi^k, \eta^1, \dots, \eta^l)}, \quad i = 2, \dots, k, \\ \frac{d\eta^j}{d\xi^1} &= \varepsilon \frac{\Psi^j(\xi^1, \dots, \xi^k, \eta^1, \dots, \eta^l)}{\Phi^1(\xi^1, \dots, \xi^k, \eta^1, \dots, \eta^l)}, \quad j = 1, \dots, l. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Участок $(-p, p)$ мы разобьем теперь на три участка: $(-p, -\sigma_1)$, $(-\sigma_1, \sigma_2)$, (σ_2, p) , где $\sigma_1 = \varepsilon^{\frac{2}{7}}$, $\sigma_2 = \varepsilon^{\frac{2}{9}}$. На каждом из полученных трех участков система (1.20) решается по-разному. В этом параграфе мы решим ее с точностью до $O(\varepsilon)$ на участке $-p \leq \xi^1 < -\sigma_1$.

Решение системы (1.20):

$$\begin{aligned} \xi^i &= \xi^i(\xi^1, \varepsilon), \\ \eta^j &= \eta^j(\xi^1, \varepsilon), \end{aligned} \quad (1.21)$$

начальные значения которого в точке $\xi^1 = -p$ отклоняются от начальных значений вычисленного выше решения (1.19) системы (1.7) на величины порядка $O(\varepsilon)$, естественно попытаться представить приближенно в виде сумм:

$$\begin{aligned} \xi^{i,n} &= \xi_0^i(\xi^1) + \varepsilon \xi_1^i(\xi^1) + \dots + \varepsilon^n \xi_n^i(\xi^1), \\ \eta^{j,n} &= \eta_0^j(\xi^1) + \varepsilon \eta_1^j(\xi^1) + \dots + \varepsilon^n \eta_n^j(\xi^1). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Оказывается, что такое представление возможно. Иными словами, оказывается, что для всякого решения (1.21), удовлетворяющего упомянутым выше начальным условиям, на участке $-p \leq \xi \leq -\sigma_1$ можно построить суммы вида (1.22), представляющие это решение с точностью до величин любого порядка малости относительно ε . Доказательство соответствующей теоремы не просто, требует проведения довольно громоздких вычислений и будет опубликовано отдельно. Здесь мы ограничимся лишь построением вторых приближений решения (1.21):

$$\begin{aligned} \xi^{i,2} &= \xi_0^i(\xi^1) + \varepsilon \xi_1^i(\xi^1) + \varepsilon^2 \xi_2^i(\xi^1), \\ \eta^{j,2} &= \eta_0^j(\xi^1) + \varepsilon \eta_1^j(\xi^1) + \varepsilon^2 \eta_2^j(\xi^1) \end{aligned} \quad (1.23)$$

и констатацией факта, что эти приближения представляют решения (1.21) на участке $(-p, -\sigma_1)$ с точностью до величин порядка $O(\varepsilon)$. При этом сами приближения (1.23) мы определим как функции, удовлетворяющие системе (1.20) «с точностью до ε^2 ».

Функции $\xi_0^i(\xi^1)$ и $\eta_0^j(\xi^1)$ мы уже вычислили [см. (1.19)]. Проведем вычисление функций $\xi_1^i(\xi^1)$ и $\eta_1^j(\xi^1)$.

Подставляя (1.23) в правую и левую части уравнения

$$\frac{d\eta^1}{d\xi^1} = \varepsilon \frac{\Psi^1(\xi^\alpha, \eta^\beta)}{\Phi^1(\xi^\alpha, \eta^\beta)} \quad (1.24)$$

и приравнявая свободные члены (в разложении по степеням ε), найдем:

$$(\eta_0^1)' = \frac{\Psi^1(\xi^1, \xi_0^{\alpha'}(\xi^1), \eta_0^\beta(\xi^1))}{\delta\Phi^1}, \quad (1.25)$$

где

$$\delta\Phi^1 = \frac{\partial}{\partial\xi^{\alpha'}} [\Phi^1(\xi^1, \xi_0^{\alpha'}(\xi^1), \eta_0^\beta(\xi^1))] \cdot \xi_1^{\alpha'} + \frac{\partial}{\partial\eta^\beta} [\Phi^1(\xi^1, \xi_0^{\alpha'}(\xi^1), \eta_0^\beta(\xi^1))] \cdot \eta_1^\beta. \quad (1.26)$$

Следовательно,

$$\delta\Phi^1 = \frac{1}{(\eta_0^1)'} \Psi^1(\xi^1, \xi_0^{\alpha'}(\xi^1), \eta_0^\beta(\xi^1)). \quad (1.27)$$

Далее, подставляя в уравнения

$$\frac{d\eta^j}{d\xi^1} = \varepsilon \frac{\Psi^j(\xi^\alpha, \eta^\beta)}{\Phi^1(\xi^\alpha, \eta^\beta)}, \quad j = 2, \dots, l, \quad (1.28)$$

выражения (1.23) и приравнявая затем свободные члены и коэффициенты при ε , после небольших вычислений получим:

$$(\eta_0^j)' = \frac{\Psi^j(\xi^1, \xi_0^{\alpha'}(\xi^1), \eta_0^\beta(\xi^1))}{\delta\Phi^1}, \quad (1.29)$$

$$(\eta_1^j)' = \frac{(\eta_0^j)'}{\Psi^1(\xi^1, \xi_0^{\alpha'}(\xi^1), \eta_0^\beta(\xi^1))} \cdot [\partial\Psi^j - (\eta_0^j)' \delta^2\Phi^1]. \quad (1.30)$$

Здесь через $\delta^2\Phi^1$ мы обозначили коэффициент при ε^2 в разложении по степеням ε функции $\Phi^1(\xi^1, \xi^{\alpha',2}, \eta^{\beta,2})$. Этот коэффициент легко вычислить. Действительно, так как

$$(\eta_0^1)' + \varepsilon (\eta_1^1)' = \frac{\Psi^1(\xi^1, \xi_0^{\alpha'}(\xi^1), \eta_0^\beta(\xi^1)) + \varepsilon \delta\Psi^1 + \dots}{\delta\Phi^1 + \varepsilon \delta^2\Phi^1},$$

то

$$\delta\Psi^1 = (\eta_0^1)' \delta^2\Phi^1 + \delta\Phi^1 (\eta_1^1)',$$

откуда

$$\delta^2\Phi^1 = \frac{\delta\Psi^1 - (\eta_1^1)' \cdot \delta\Phi^1}{(\eta_0^1)'}. \quad (1.31)$$

Подставляя это выражение в (1.30), после небольших преобразований получим:

$$(\eta_1^j)' = \frac{1}{\Psi^1} [(\eta_0^j)' \delta\Psi^j - (\eta_0^j)' \delta\Psi^1] + \frac{(\eta_0^j)' (\eta_1^1)'}{(\eta_0^1)'}, \quad j = 2, \dots, l. \quad (1.32)$$

Совершенно аналогично, из уравнений

$$\frac{d\xi^i}{d\xi^1} = \frac{\Phi^i(\xi^\alpha, \eta^\beta)}{\Phi^1(\xi^\alpha, \eta^\beta)}, \quad i = 2, \dots, k, \quad (1.33)$$

найдем:

$$(\xi_0^i)' = \frac{\delta \Phi^i}{\delta \Phi^1}, \quad (1.34)$$

откуда, принимая во внимание (1.27), получаем:

$$\frac{\partial \Phi^i}{\partial \xi^{\alpha'}} \cdot \xi_1^{\alpha'} + \frac{\partial \Phi^i}{\partial \eta^\beta} \eta_1^\beta = (\xi_0^i)' \frac{\Psi^1(\xi^1, \xi_0^{\alpha'}, \eta_0^\beta)}{(\eta_0^1)',} \quad i = 2, \dots, k. \quad (1.35)$$

Кроме того, соотношение (1.27) в развернутом виде выглядит так:

$$\frac{\partial \Phi^1}{\partial \xi^{\alpha'}} \xi_1^{\alpha'} + \frac{\partial \Phi^1}{\partial \eta^1} \eta_1^1 + \frac{\partial \Phi^1}{\partial \eta^\beta} \eta_1^\beta = \frac{\Psi^1(\xi^1, \xi_0^{\alpha'}, \eta_0^\beta)}{(\eta_0^1)'}. \quad (1.36)$$

Принимая во внимание конкретный вид функции Φ^1 , соотношение (1.36) можно записать более определенно:

$$(1 + B^1(\xi^1)) \eta_1^1 = \frac{\Psi^1}{(\eta_0^1)' } - \frac{\partial \Phi^1}{\partial \eta^\beta} \eta_1^\beta + A_{\alpha'}^1(\xi^1) \xi_1^{\alpha'}, \quad (1.37)$$

причем

$$B^1(0) = A_{\alpha'}^1(0) = 0.$$

Объединяя (1.35), (1.37) и (1.32), получаем следующую систему дифференциальных уравнений для ξ_1^i , $i = 2, \dots, k$, и η_1^j , $j = 1, \dots, l$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi^i}{\partial \xi^{\alpha'}} \cdot \xi_1^{\alpha'} + \frac{\partial \Phi^i}{\partial \eta^\beta} \eta_1^\beta &= (\xi_0^i)' \frac{\Psi^1}{(\eta_0^1)',} \\ (1 + B^1(\xi^1)) \eta_1^1 &= - \frac{\partial \Phi^1}{\partial \eta^\beta} \eta_1^\beta + A_{\alpha'}^1(\xi^1) \xi_1^{\alpha'} + \frac{\Psi^1}{(\eta_0^1)',} \\ (\eta_1^j)' &= \frac{1}{\Psi^1} [(\eta_0^1)' \delta \Psi^j - (\eta_0^j)' \delta \Psi^1] + \frac{(\eta_0^j)' \cdot (\eta_1^1)'}{(\eta_0^1)'}. \end{aligned} \right\} \quad (1.38)$$

Разберемся в этой системе. Выражая из первых $k-1$ соотношений функции $\xi_1^{\alpha'}$ через η_1^β и подставляя полученные выражения

$$\xi_1^{\alpha'} = G_{\beta}^{\alpha'}(\xi^1) \eta_1^\beta + D^{\alpha'}(\xi^1) \quad (1.39)$$

в правые части последних $(l-1)$ уравнений (1.38), после небольших вычислений получим:

$$(\eta_1^j)' = \tilde{N}^j(\xi^1) + \tilde{N}_{\beta}^j(\xi^1) \eta_1^\beta + \frac{(\eta_0^j)' (\eta_1^1)'}{(\eta_0^1)'}, \quad (1.40)$$

причем $\tilde{N}^j(0) = \tilde{N}_{\beta}^j(0) = 0$.

С другой стороны, подставляя (1.39) во второе из выписанных соотношений (1.38), без труда убедимся, что

$$\eta_1^1 = \left\{ \left[- \frac{\partial \Phi^1}{\partial \eta^{\beta'}} + \tilde{A}_{\beta'}(\xi^1) \right] \eta_1^{\beta'} + \tilde{B}(\xi') + \frac{\Psi^1}{(\eta_0^1)'} \right\} \frac{1}{1 + B^1(\xi')}, \quad (1.41)$$

причем $\tilde{A}_{\beta'}(0) = \tilde{B}(0) = 0$.

Систему уравнений (1.40) и (1.41) можно решить. Дифференцируя (1.41) и подставляя полученное выражение в (1.40), получим после вычислений:

$$(\eta_1^j)' = P^j(\xi^1) + N_{\beta'}^j(\xi^1) \eta_1^{\beta'} + Q_{\beta'}^j(\xi^1) (\eta_1^{\beta'})', \quad j = 2, \dots, l, \quad (1.42)$$

причем функция $P^j(\xi^1)$ имеет в нуле полюс первого порядка и ее главный член будет $\frac{\alpha_2^j}{2}$, а $N_{\beta'}^j(0) = Q_{\beta'}^j(0) = 0$. Решение системы (1.42) будем искать в форме

$$\eta_1^j = K^j(\xi^1) \ln |\xi^1| + L^j(\xi^1), \quad (1.43)$$

где $K^j(\xi^1)$ — функции, непрерывно дифференцируемые при $-p \leq \xi^1 \leq 0$. Подставляя (1.43) в (1.42), получаем:

$$\begin{aligned} (K^j)' \ln |\xi^1| + \frac{K^j}{\xi^1} + (L^j)' &= P^j(\xi^1) + N_{\beta'}^j K^{\beta'} \ln |\xi^1| + \\ &+ N_{\beta'}^j L^{\beta'} + Q_{\beta'}^j \left[(K^{\beta'})' \ln |\xi^1| + \frac{K^{\beta'}}{\xi^1} + (L^{\beta'})' \right]. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Приравнявая коэффициенты при $\ln |\xi^1|$, получаем систему дифференциальных уравнений для определения $K^j(\xi^1)$:

$$(K^j)' = N_{\beta'}^j K^{\beta'} + Q_{\beta'}^j (K^{\beta'})'. \quad (1.45)$$

Решая ее при начальных значениях $K^j(0) = \frac{\alpha_1^j}{2}$, однозначно определим функции $K^j(\xi^1)$. После этого из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(L^j)' = P^j(\xi^1) - \frac{K^j(\xi^1)}{\xi^1} + Q_{\beta'}^j \frac{K^{\beta'}}{\xi^1} + N_{\beta'}^j L^{\beta'} + Q_{\beta'}^j L^{\beta'} \quad (1.46)$$

можно определить и функции L^j . Они не имеют особенностей.

Итак,

$$\eta_1^j = \frac{\alpha_1^j}{2} \ln |\xi^1| + O(1), \quad j = 2, \dots, l. \quad (1.47)$$

Далее, из (1.41) следует:

$$\eta_1^1 = -\frac{1}{2\xi^1} - \frac{\partial \Phi^1}{\partial \eta^{\beta'}} \frac{\alpha_2^{\beta'}}{2} \ln |\xi^1| + O(1). \quad (1.48)$$

Наконец, из первых $k-1$ соотношений (1.38) получаем:

$$\xi_1^i = \frac{m^i}{\xi^1} + n^i \ln |\xi^1| + O(1), \quad i = 2, \dots, k, \quad (1.49)$$

где m^i, n^i — константы (их явные выражения мы не выписываем).

Таким образом, мы вычислили суммы

$$\begin{aligned} \eta^{j,1} &= \eta_0^j(\xi^1) + \varepsilon \eta_1^j(\xi^1), \quad j = 1, \dots, l, \\ \xi^{i,1}(\xi^1) &= \xi_0^i(\xi^1) + \varepsilon \xi_1^i(\xi^1), \quad i = 2, \dots, k. \end{aligned}$$

Вычисление функций $\xi_2^i(\xi^1)$, $i = 2, \dots, k$, $\eta_2^j(\xi^1)$, $j = 1, \dots, l$, более громоздко. Однако для целей настоящей работы нам достаточно знать

лишь главные члены функций $\xi_2^i(\xi^1)$ и $\eta_2^j(\xi^1)$. Проведя необходимые выкладки, найдем:

$$\begin{aligned}\eta_2^1(\xi^1) &= -\frac{1}{8(\xi^1)^4} + \delta^1(\xi^1), \quad \eta_2^j(\xi^1) = \delta^j(\xi^1), \quad j = 2, \dots, l, \\ \xi_2^i(\xi^1) &= \frac{Q^i}{(\xi^1)^4} + \gamma^i(\xi^1), \quad i = 2, \dots, k,\end{aligned}\quad (1.49')$$

где Q^i — числовые коэффициенты, явные выражения которых мы не выписываем, а функции $\delta^j(\xi^1)$, $j = 1, \dots, l$, и $\gamma^i(\xi^1)$, $i = 2, \dots, k$, таковы, что величины $\varepsilon^2 \delta^j(\xi^1)$ и $\varepsilon^2 \gamma^i(\xi^1)$ суть величины порядка $o(\varepsilon)$ на всем участке $-p \leq \xi^1 \leq -\sigma_1$.

Как уже отмечалось выше, можно доказать, что на участке $-p \leq \xi^1 \leq -\sigma_1$ решение (1.21) представимо в виде:

$$\begin{aligned}\eta^j &= \eta_0^j(\xi^1) + \varepsilon \eta_1^j(\xi^1) + \varepsilon^2 \eta_2^j(\xi^1) + S^{j,2}(\xi^1, \varepsilon), \\ \xi^i &= \xi_0^i(\xi^1) + \varepsilon \xi_1^i(\xi^1) + \varepsilon^2 \xi_2^i(\xi^1) + R^{i,2}(\xi^1, \varepsilon),\end{aligned}$$

где функции $S^{j,2}(\xi^1, \varepsilon)$ и $R^{i,2}(\xi^1, \varepsilon)$ имеют на всем этом участке величину порядка не более $O(\varepsilon)$. Следовательно, для решения (1.21) на участке $-p \leq \xi^1 \leq -\sigma_1$ мы получили асимптотические формулы:

$$\left. \begin{aligned}\eta^1 &= -(\xi^1)^2 + \left(\frac{2}{3} \alpha_1^{\beta'} b_{\beta'}^1 + c_1^1 - d_1^1 - e_{\alpha'}^1 \theta^{\alpha'} \right) (\xi^1)^3 + \dots + \\ &\quad + \varepsilon \left(-\frac{1}{2\xi^1} - \frac{1}{2} b_{\beta'}^1 \alpha_1^{\beta'} \ln |\xi^1| \right) + \varepsilon^2 \left[-\frac{1}{8(\xi^1)^4} \right] + S^1(\xi^1, \varepsilon), \\ \eta^j &= -\frac{2}{3} \alpha_1^j (\xi^1)^3 + \dots + \varepsilon \left(\frac{\alpha_1^j}{2} \ln |\xi^1| \right) + S^j(\xi^1, \varepsilon), \quad j = 2, \dots, l, \\ \xi^i &= \theta^i (\xi^1)^2 + \Pi^i (\xi^1)^3 + \dots + \varepsilon \left(\frac{m_i}{\xi^1} + n^i \ln |\xi^1| \right) + \varepsilon^2 \frac{Q^i}{(\xi^1)^4} + R^i(\xi^1, \varepsilon).\end{aligned} \right\} \quad (1.50)$$

В этих формулах многоточием заменены члены порядка $(\xi^1)^4$ и выше, а функции $S^j(\xi^1, \varepsilon)$, $R^i(\xi^1, \varepsilon)$ имеют на участке $-p \leq \xi^1 \leq -\sigma_1$ величину порядка $O(\varepsilon)$.

§ 2. Вычисление решений на переходном участке

В настоящем параграфе решение (1.21) будет продолжено на участок $-\sigma_1 \leq \xi^1 \leq \sigma_2$. Мы увидим, что здесь решение (1.21) значительно сильнее отклоняется от соответствующего решения вырожденной системы, а именно на величины порядка $\varepsilon^{\frac{2}{3}}$ и $\varepsilon \ln \varepsilon$.

Замена переменных

$$\xi^1 = \mu u^1, \quad \xi^i = \mu^2 u^i, \quad \eta^1 = \mu^2 v^1, \quad \eta^j = \mu^3 v^j, \quad t = \mu^3 \tau, \quad \mu^3 = \varepsilon \quad (2.1)$$

приводит систему (1.5) к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned}\dot{u}^1 &= (u^1)^2 + v^1 + \mu (b_{\beta'}^1 v^{\beta'} + c_1^1 u^1 v^1 + d_1^1 (u^1)^3 + e_{\alpha'}^1 u^1 u^{\alpha'}) + \dots, \\ \mu \dot{u}^i &= a_{\alpha'}^i u^{\alpha'} + b_1^i v_1 + c_0^i (u^1)^2 + \mu (b_{\beta'}^i v^{\beta'} + d_1^i (u^1)^3 + c_1^i u^1 v^1 + \\ &\quad + e_{\alpha'}^i u^1 u^{\alpha'}) + \dots, \\ \dot{v}^1 &= 1 + \mu \alpha_1^1 u^1 + \dots, \\ \dot{v}^j &= \alpha_1^j u^1 + \dots\end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

(здесь точкой мы обозначаем дифференцирование по τ).

Более коротко систему (2.2) запишем так:

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}^1 &= \varphi^1(u^\alpha, v^\beta, \mu), \\ \mu \dot{u}^i &= \varphi^i(u^\alpha, v^\beta, \mu), \\ \dot{v}^j &= \psi^j(u^\alpha, v^\beta, \mu). \end{aligned} \right\} \quad (2.2')$$

Примем u^1 за независимое переменное и вместо системы (2.2') будем изучать систему

$$\begin{aligned} \mu \frac{du^i}{du^1} &= \frac{\varphi^i(u^\alpha, v^\beta, \mu)}{\varphi^1(u^\alpha, v^\beta, \mu)}, \quad i = 2, \dots, k, \\ \frac{dv^j}{du^1} &= \frac{\psi^j(u^\alpha, v^\beta, \mu)}{\varphi^1(u^\alpha, v^\beta, \mu)}, \quad j = 1, \dots, l. \end{aligned} \quad (2.3)$$

При $\mu = 0$ система (2.3) вырождается:

$$\left. \begin{aligned} \text{a)} \quad a_\alpha^i u^{\alpha'} + b_1^i v^1 + c_0^i (u^1)^2 &= 0, \\ \text{b)} \quad \frac{dv^1}{du^1} &= \frac{1}{(u^1)^2 + v^1}, \\ \text{c)} \quad \frac{dv^j}{du^1} &= \frac{\alpha_1^j u^1}{(u^1)^2 + v^1}. \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

Эта вырожденная система имеет много решений. Для нас особую роль будет играть одно определенное частное решение, которое мы сейчас укажем.

Уравнение б) в системе (2.4) есть уравнение Рикатти. Его решения определены при $-\infty < u^1 < +\infty$. Мы возьмем частное решение этого уравнения $v_0^1(u^1)$, которое при отрицательных значениях u^1 представляется в виде $-(u^1)^2 + z_0(u^1)$, где $z_0(u^1)$ — добавок, стремящийся к нулю при $u^1 \rightarrow -\infty$. Для $z_0(u^1)$ сразу же получаем дифференциальное уравнение

$$-2u^1 + z_0'(u^1) = \frac{1}{z_0(u^1)} \quad (2.5)$$

и асимптотическое представление при больших отрицательных значениях u^1 :

$$z_0(u^1)^- = -\frac{1}{2u^1} - \frac{1}{8(u^1)^4} + O\left(\frac{1}{(u^1)^7}\right). \quad (2.6)$$

Таким образом,

$$v_0^1(u^1)^- = -(u^1)^2 - \frac{1}{2u^1} - \frac{1}{8(u^1)^4} + O\left(\frac{1}{(u^1)^7}\right). \quad (2.7)$$

Без труда можно получить асимптотическое представление функции $v_0^1(u^1)$ и при больших положительных значениях u^1 :

$$v_0^1(u^1) = \Omega - \frac{1}{2u^1} + O\left(\frac{1}{(u^1)^3}\right), \quad (2.8)$$

где $\Omega = \text{const} = v_0^1(\infty)$. (Разложения (2.7) и (2.8) можно получить, если воспользоваться асимптотическими свойствами функций Бесселя, так как решение уравнения Рикатти выражается через функции Бесселя. Однако

их проще получить непосредственно из самого дифференциального уравнения Рикатти.)

Исходя из вычисленного решения $v_0^1(u^1)$, мы можем найти функции $v_0^j(u^1)$, $j = 2, \dots, l$:

$$v_0^j = \alpha_1^j \int \frac{u^1}{(u^1)^2 + v_0^1(u^1)} du^1. \quad (2.9)$$

Мы видим, что v_0^j определяются с точностью до констант. Выберем вполне определенные v_0^j , а именно *:

$$v_0^j(u^1) = \alpha_1^j \int_0^{u^1} \frac{u^1 du^1}{(u^1)^2 + v_0^1(u^1)} + \frac{\alpha_1^j}{2} \ln \mu. \quad (2.10)$$

Непосредственно проверяется, что при больших отрицательных значениях u^1 получаются следующие асимптотические разложения:

$$v_0^j(u^1)^- = -\frac{2}{3} \alpha_1^j (u^1)^3 + \frac{\alpha_1^j}{2} \ln |u^1| + \frac{\alpha_1^j}{2} \ln \mu + \dots, \quad (2.11)$$

а при больших положительных значениях u^1

$$v_0^j(u^1)^+ = \alpha_1^j \ln |u^1| + \frac{1}{2} \alpha_1^j \ln \mu + \dots \quad (2.12)$$

(в формулах (2.11) и (2.12) многоточием заменены члены, ограниченные при $u^1 \rightarrow -\infty$, соответственно, при $u^1 \rightarrow +\infty$).

Теперь из первых $k-1$ уравнений системы (2.4) можно однозначно определить и функции $u_0^i(u^1)$. Проведя небольшие вычисления, получаем для них следующие асимптотические разложения при больших отрицательных и при больших положительных значениях u^1 :

$$\begin{aligned} u_0^i(u^1)^- &= \theta^i (u^1)^2 + \frac{m^i}{u^1} + \frac{Q^i}{(u^1)^4} + O\left(\frac{1}{(u^1)^7}\right), \\ u_0^i(u^1)^+ &= B_0^i (u^1)^2 + O\left(\frac{1}{(u^1)^3}\right) + O(1). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Итак, найдено вполне определенное частное решение вырожденной системы уравнений (2.4):

$$\begin{aligned} v^j &= v_0^j(u^1), \quad j = 1, \dots, l, \\ u^i &= u_0^i(u^1), \quad i = 2, \dots, k. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Заметим, что это решение определено при $-\infty < u^1 < +\infty$.

Систему функций (2.14) мы будем называть «нулевым приближением» истинного решения невырожденной системы уравнений (2.3), имеющего соответствующие начальные значения.

Исходя из (2.14), построим далее формально «первое приближение» **::

* Заметим, что если положить

$$v_0^j(u^1) = \alpha_1^j \int_0^{u^1} \frac{du^1}{(u^1)^2 + v_0^1} + \frac{1}{2} \alpha_1^j \ln \mu + C^j,$$

где C^j — произвольная, но не зависящая от μ константа, то, как это будет видно, функции $v_1^1(u^1)$, $u_1^1(u^1)$, вычисляемые дальше, изменятся также лишь на некоторые константы, не зависящие от μ .

** Первое приближение функции v^j нас не интересует.

$$\left. \begin{aligned} v^1 &= v_0^1(u^1) + \mu v_1^1(u^1), \\ v^j &= v_0^j(u^1), \quad j = 2, \dots, l, \\ u^i &= u_0^i(u^1) + \mu u_1^i(v^1), \quad i = 2, \dots, k, \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

где функции $v_1^1(u^1)$, $u_1^i(u^1)$ определяются следующим образом.

Подставляем функции (2.15) в правую и левую части уравнения

$$\frac{dv^1}{du^1} = \frac{\Psi^1(u^\alpha, v^\beta, \mu)}{\Phi^1(u^\alpha, v^\beta, \mu)} \quad (2.16)$$

и затем приравниваем коэффициенты при μ , получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dv^1}{du^1} + \frac{v_1^1}{[(u^1)^2 + v_0^1]^2} = H_1(u^1) - \frac{1}{2} \ln \mu \frac{b_{\beta'}^1 \alpha_1^{\beta'}}{[(u^1)^2 + v_0^1]^2}, \quad (2.17)$$

где

$$H_1(u^1) = - \frac{b_{\beta'}^1 \widetilde{v}_0^{\beta'} + c_1^1 u^1 v_0^1 + d_1^1 (u^1)^3 + e_{\alpha'}^1 u^1 u^{\alpha'} + \alpha_1^1 u^1 [(u^1)^2 + v_0^1]}{[(u^1)^2 + v_0^1]^2} \quad (2.18)$$

$$\left(\text{здесь } \widetilde{v}_0^{\beta'} = \alpha_1^{\beta'} \int_0^{u^1} \frac{u^1 du^1}{(u^1)^2 + v_0^1} \right).$$

Функцию $v_1^1(u^1)$ мы определим как частное решение этого линейного уравнения:

$$v_1^1 = \frac{1}{G(u^1)} \int_{-\infty}^{u^1} H_1(u^1) G(u^1) du^1 - \frac{1}{2} b_{\beta'}^1 \alpha_1^{\beta'} \ln \mu, \quad (2.19)$$

где

$$G(u^1) = \exp \left\{ \int_0^{u^1} \frac{du^1}{[(u^1)^2 + v_0^1]^2} \right\}. \quad (2.20)$$

Из формулы (2.19), учитывая асимптотические разложения функций v_0^1 , $v_0^{\beta'}$, $u_0^{\alpha'}$, полученные выше [см. формулы (2.7), (2.8), (2.11), (2.12), (2.13)], найдем асимптотические разложения функции $v_1^1(u^1)$ при больших отрицательных и при больших положительных значениях u^1 . Выпишем эти разложения:

$$\begin{aligned} v_1^1(u^1)^- &= \left(\frac{2}{3} \alpha_1^{\beta'} b_{\beta'}^1 + c_1^1 - d_1^1 - e_{\alpha'}^1 \theta^{\alpha'} \right) (u^1)^5 - \\ &\quad - \frac{1}{2} b_{\beta'}^1 \alpha_1^{\beta'} \ln |u^1| - \frac{1}{2} b_{\beta'}^1 \alpha_1^{\beta'} \ln \mu + \dots, \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$v_1^1(u^1)^+ = (\alpha_1^1 - d_1^1 - e_{\alpha'}^1 B_0^{\alpha'}) \ln u^1 - \frac{1}{2} b_{\beta'}^1 \alpha_1^{\beta'} \ln \mu + \dots \quad (2.22)$$

В этих формулах многоточием заменены члены, остающиеся ограниченными при неограниченно возрастающем модуле u^1 .

Функции $u_1^i(u^1)$, $i = 2, \dots, k$, определяются проще. Именно, подставляя выражения (2.15) в первые $k-1$ уравнений (2.3) и приравнивая затем коэффициенты при μ , для $u_1^i(u^1)$ получаем линейные алгебраические уравнения. Из них, пользуясь уже известными асимптотическими разложениями функций u_0^i , v_0^j , v_1^1 , легко находим асимптотические разложения для $u_1^i(u^1)$. Не проводя здесь подробно этих совершенно эле-

ментарных, хотя и довольно громоздких выкладок, сразу выпишем окончательный результат:

$$u_1^i(u^1)^- = \Pi^i(u^1)^3 + n^i \ln |u^1| + n^i \ln \mu + O(1)_{u^1 \rightarrow -\infty}, \quad (2.21')$$

$$u_1^i(u^1)^+ = O((u^1)^3) + O(\ln \mu) + O(1)_{u^1 \rightarrow +\infty}. \quad (2.22')$$

Подчеркнем только, что числовые коэффициенты Π^i , n^i , фигурирующие в формуле (2.21'), суть те же самые, что и одноименные коэффициенты в формулах (1.50).

Таким образом, мы вычислили «первое приближение» (2.15). При этом сами функции (2.15) определены нами как удовлетворяющие с той или иной степенью точности невырожденной системе уравнений (2.3). Вопрос же о том, насколько эти функции приближают истинное решение уравнения (2.3), пока не обсуждался. В действительности оказывается, что на участке $-\omega_1 \leq u^1 \leq \omega_2$, где $\omega_i = \frac{\sigma_i}{\mu}$ ($i = 1, 2$), $\omega_i \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, система функций (2.15) приближает с вполне определенной точностью всякое истинное решение уравнения (2.3), начальные значения которого в точке $u^1 = -\omega_1$ совпадают с соответствующей точностью с начальными значениями функций (2.15). Более подробно: *всякое решение*

$$\begin{aligned} v^j &= v^j(u^1, \mu), \\ u^i &= u^i(u^1, \mu) \end{aligned} \quad (2.23)$$

уравнения (2.3), удовлетворяющее начальным условиям:

$$\left. \begin{aligned} v^1(-\omega_1) - [v_0^1(-\omega_1) + \mu v_1^1(-\omega_1)] &= O(\mu), \\ v^j(-\omega_1) - v_0^j(-\omega_1) &= 0, \\ u^i(-\omega_1) - [u_0^i(-\omega_1)] + \mu u_1^i(-\omega_1) &= O(\mu), \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

можно представить на участке $-\omega_1 \leq u^1 \leq \omega_2$ в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} v^1 &= v_0^1(u^1) + \mu v_1^1(u^1) + r^1(u^1, \mu), \\ v^j &= v_0^j(u^1) + r^j(u^1, \mu), \\ u^i &= u_0^i(u^1) + \mu u_1^i(u^1, \mu) + s^i(u^1, \mu), \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

причем на всем этом участке функции $r^1(u^1, \mu)$, $s^i(u^1, \mu)$ имеют величину порядка $O(\mu)$, а функции $r^j(u^1, \mu)$, $j \geq 2$, имеют величину порядка $O(1)$.

Доказательство этого факта требует проведения некоторых дальнейших вычислений и также будет опубликовано отдельно.

Возвратимся теперь к старым переменным ξ^i, η^j . Участок $-\omega_1 \leq u^1 \leq \omega_2$, перейдет в участок $-\sigma_1 \leq \xi^1 \leq \sigma_2$, а функции (2.15) в этих переменных запишутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \eta^1 &= \mu^2 v_0^1\left(\frac{\xi^1}{\mu}\right) + \mu^3 v_1^1\left(\frac{\xi^1}{\mu}\right), \\ \eta^j &= \mu^3 v_0^j\left(\frac{\xi^1}{\mu}\right), \quad j = 2, \dots, l, \\ \xi^i &= \mu^2 u_0^i\left(\frac{\xi^1}{\mu}\right) + \mu^3 u_1^i\left(\frac{\xi^1}{\mu}\right), \quad i = 2, \dots, k. \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

Пользуясь асимптотическими разложениями функций $v_0^1(u^1)$, $v_1^1(u^1)$, $v_0^j(u^1)$, $u_0^i(u^1)$, $u_1^i(u^1)$ при больших отрицательных значениях u^1 [см. формулы (2.11), (2.21), (2.13), (2.21')], легко вычислить значения функций (2.26) в точке $\xi^1 = -\sigma_1$. Проведем это вычисление. Для этого подставим в (2.15) асимптотические разложения функций v_0^1 , v_1^1 , v_0^j , u_0^i , u_1^i при больших отрицательных значениях u^1 . Получим:

$$v^1 = (-u^1)^2 - \frac{1}{2u^1} - \frac{1}{8(u^1)^4} + O\left(\frac{1}{(u^1)^7}\right) + \mu \left\{ \left(\frac{2}{3} \alpha_1^{\beta'} b_{\beta'}^1 + c_1^1 - d_1^1 - e_{\alpha'}^1 \theta^{\alpha'} \right) (u^1)^3 - \frac{1}{2} b_{\beta'}^1 \alpha_1^{\beta'} \ln |u^1| - \frac{1}{2} b_{\beta'}^1 \alpha_1^{\beta'} \ln \mu + \dots \right\}, \quad (2.27)$$

$$v^j = \left[-\frac{2}{3} (u^1)^3 + \frac{1}{2} \ln(u^1) + \frac{1}{2} \ln \mu + \dots \right] \alpha_1^j, \quad j = 2, \dots, l,$$

$$u^i = \theta^i (u^1)^2 + \frac{m^i}{u^1} + \frac{Q^i}{(u^1)^4} + O\left(\frac{1}{(u^1)^7}\right) + \mu [\Pi^i (u^1)^3 + n^i \ln |u^1| + n^i \ln \mu + \dots].$$

Переходя опять к переменным ξ^i , η^j , получим выражения функций (2.26) для значений ξ^1 , близких к $-\sigma_1$:

$$\left. \begin{aligned} \eta^1 &= (-\xi^1)^2 + \left(\frac{2}{3} \alpha_1^{\beta'} b_{\beta'}^1 + c_1^1 - d_1^1 - e_{\alpha'}^1 \theta^{\alpha'} \right) (\xi^1)^3 + \\ &\quad + \varepsilon \left[-\frac{1}{2\xi^1} - \frac{1}{2} b_{\beta'}^1 \alpha_1^{\beta'} \ln |\xi^1| \right] + \varepsilon^2 \frac{-1}{8(\xi^1)^4} + O(\varepsilon), \\ \eta^j &= -\frac{2}{3} \alpha_1^j (\xi^1)^3 + \varepsilon \cdot \frac{1}{2} \alpha_1^j \ln |\xi^1| + O(\varepsilon), \\ \xi^i &= \theta^i \cdot (\xi^1)^2 + \Pi^i \cdot (\xi^1)^3 + \varepsilon \left[\frac{m^i}{\xi^1} + n^i \ln |\xi^1| \right] + \varepsilon^2 \frac{Q^i}{(\xi^1)^4} + O(\varepsilon). \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

Отсюда, в частности, можно получить и значения функций (2.26) в точке $\xi^1 = -\sigma_1$.

Сравним теперь формулы (2.28) и (1.50). Мы увидим, что при $\xi^1 = -\sigma_1$

$$\begin{aligned} \eta^j_{(1.50)} &= \eta^j_{(2.28)} + O(\varepsilon), \\ \xi^i_{(1.50)} &= \xi^i_{(2.28)} + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Следовательно, вычисленные нами функции (2.28) являются, с соответствующей точностью, продолжением решения (1.50) на участок $-\sigma_1 \leq \xi^1 \leq \sigma_2$. А так как — что уже отмечалось — они приближают на этом участке истинное решение системы уравнений (1.20), то задача о продолжении решения (1.50) на участок $-\sigma_1 \leq \xi^1 \leq \sigma_2$ решена: это продолжение дается следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} \eta^1 &= \mu^2 v_0^1 \left(\frac{\xi^1}{\mu} \right) + \mu^3 v_1^1 \left(\frac{\xi^1}{\mu} \right) + H^1(\xi^1, \mu), \\ \eta^j &= \mu^3 v_0^j \left(\frac{\xi^1}{\mu} \right) + H^j(\xi^1, \mu), \\ \xi^i &= \mu^2 u_0^i \left(\frac{\xi^1}{\mu} \right) + \mu^3 u_1^i \left(\frac{\xi^1}{\mu} \right) + G^i(\xi^1, \mu), \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

где функции $H^j(\xi^1, \mu)$ и $G^i(\xi^1, \mu)$ имеют порядок $O(\varepsilon)$.

Если учесть асимптотические разложения (2.8), (2.12) и (2.22), то отсюда можно получить, в частности, значения функций η^j в точке $\xi^1 = \sigma_2$:

$$\left. \begin{aligned} \eta^1(\sigma_2) &= \varepsilon^{\frac{2}{3}} \Omega - \frac{1}{3} \varepsilon \ln \varepsilon \cdot (\alpha_1^1 - d_1^1 - e_{\alpha'}^1 B_0^{\alpha'} + \frac{1}{2} b_{\beta'}^1 \alpha_1^{\beta'}) + \\ &\quad + \varepsilon \ln \sigma_2 \cdot (\alpha_1^1 - d_1^1 - e_{\alpha'}^1 B_0^{\alpha'}) - \frac{\varepsilon}{\sigma_2} + O(\varepsilon), \\ \eta^j(\sigma_2) &= \varepsilon \alpha_1^j \ln \sigma_2 - \frac{1}{6} \alpha_1^j \varepsilon \ln \varepsilon + O(\varepsilon), \quad j = 2, \dots, l. \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

Эти значения нам сейчас понадобятся.

§ 3. «Вектор смещения» и его вычисление

Пусть

$$\begin{aligned} \eta^j &= \eta^j(\xi^1, \varepsilon), \quad j = 1, \dots, l, \\ \xi^i &= \xi^i(\xi^1, \varepsilon), \quad i = 2, \dots, k, \end{aligned} \quad (3.1)$$

— точное продолжение решения (2.30) на участок $\sigma_2 \leq \xi^1 \leq p$, где p уже не зависит от ε . Прежде всего можно доказать, что

$$\begin{aligned} \eta^j(\xi^1, \varepsilon) &= o_{\varepsilon \rightarrow 0}(1), \\ \xi^i(\xi^1, \varepsilon) &= B_0^i(\xi^1)^2 + \dots + o_{\varepsilon \rightarrow 0}(1) \end{aligned} \quad (3.2)$$

здесь многоточием заменены члены более высокой степени по ξ^1 .

Действительно, функции (3.1) суть решения системы уравнений (1.20). Можно доказать, что они непрерывно зависят от параметра ε (это доказательство будет опубликовано позже). Но при $\varepsilon = 0$ система (1.20) перейдет в систему

$$\begin{aligned} \frac{d\xi^i}{d\xi^1} &= \frac{\Phi^i(\xi^\alpha, \eta^\beta)}{\Phi^1(\xi^\alpha, \eta^\beta)}, \\ \frac{d\eta^j}{d\xi^1} &= 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

которая имеет своим решением с нулевыми начальными значениями функции

$$\eta^j = 0, \quad \xi^i = B_0^i(\xi^1)^2 + \dots \quad (3.4)$$

В самом деле, записывая такое решение в виде $\xi^{\alpha'} = p^{\alpha'} \xi^1 + q^{\alpha'} (\xi^1)^2 + \dots$ с неопределенными коэффициентами $p^{\alpha'}$ и $q^{\alpha'}$, получаем алгебраические линейные уравнения

$$a_{\alpha'}^i \cdot p^{\alpha'} = 0, \quad a_{\alpha'}^i q^{\alpha'} + c_0^i = 0,$$

откуда $p^{\alpha'} = 0$, $q^{\alpha'} = B_0^{\alpha'}$.

Вычислим значения функций $\eta^j(\xi^1, \varepsilon)$, $j = 1, \dots, l$, в произвольной точке ξ^1 отрезка (σ_2, p) . Принимая во внимание формулы (3.2), можем написать:

$$\eta^j(\xi^1, \varepsilon) = \eta^j(\sigma_2, \varepsilon) + \varepsilon \int_{\sigma_2}^{\xi^1} \frac{\Psi^j(\xi^1, B_0^{\alpha'}(\xi^1)^2, 0, \dots, 0)}{\Phi^1(\xi^1, B_0^{\alpha'}(\xi^1)^2, 0, \dots, 0)} d\xi^1 + o(\varepsilon). \quad (3.5)$$

Но, как легко подсчитать,

$$\frac{\Psi^1(\xi^1, B_0^{\alpha'}(\xi^1)^2, 0, \dots, 0)}{\Phi^1(\xi^1, B_0^{\alpha'}(\xi^1)^2, 0, \dots, 0)} = \frac{1}{(\xi^1)^2} + \frac{1}{\xi^1}(\alpha_1^1 - d_1^1 - e_{\alpha'}^1 B_0^{\alpha'}) + O(1)_{\xi^1 \rightarrow 0}, \quad (3.6)$$

$$\frac{\Psi^j(\xi^1, B_0^{\alpha'}(\xi^1)^2, 0, \dots, 0)}{\Phi^1(\xi^1, B_0^{\alpha'}(\xi^1)^2, 0, \dots, 0)} = \frac{\alpha_1^j}{\xi^1} + O(1)_{\xi^1 \rightarrow 0}, \quad j = 2, \dots, l. \quad (3.7)$$

Поэтому

$$\eta^1(\xi^1, \varepsilon) = \eta^1(\sigma_2, \varepsilon) + \varepsilon \int_{\sigma_2}^{\xi^1} \left\{ \frac{1}{(\xi^1)^2} + \frac{1}{\xi^1}(\alpha_1^1 - d_1^1 - e_{\alpha'}^1 B_0^{\alpha'}) \right\} d\xi^1 + O(\varepsilon), \quad (3.8)$$

$$\eta^j(\xi^1, \varepsilon) = \eta^j(\sigma_2, \varepsilon) + \varepsilon \int_{\sigma_2}^{\xi^1} \frac{\alpha_1^j}{\xi^1} d\xi^1 + O(\varepsilon), \quad j = 2, \dots, l.$$

Значения $\eta^j(\sigma_2, \varepsilon)$ были вычислены в предыдущем параграфе [см. (2.31)]. Подставляя их в (3.8) и производя интегрирование, получим выражения для функций $\eta^j(\xi^1, \varepsilon)$ в произвольной точке отрезка (σ_2, p) :

$$\left. \begin{aligned} \eta^1(\xi^1, \varepsilon) &= \varepsilon^{\frac{2}{3}} \Omega + \varepsilon \ln \varepsilon \left[-\frac{1}{3}(\alpha_1^1 - d_1^1 - e_{\alpha'}^1 B_0^{\alpha'}) + \frac{1}{2} b_{\beta}^1 \alpha_1^{\beta'} \right] + \\ &+ \varepsilon \left[-\frac{1}{\xi^1} + (\alpha_1^1 - d_1^1 - e_{\alpha'}^1 B_0^{\alpha'}) \ln \xi^1 \right] + O(\varepsilon), \\ \eta^j(\xi^1, \varepsilon) &= \varepsilon \ln \varepsilon \left[-\frac{1}{6} \alpha_1^j \right] + \varepsilon \alpha_1^j \ln \xi^1 + O(\varepsilon). \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Обозначим через $\Delta_1 = (\Delta_1^1, \dots, \Delta_1^l)$ вектор с координатами

$$\begin{aligned} \Delta_1^1 &= \varepsilon^{\frac{2}{3}} \Omega + \varepsilon \ln \varepsilon \left[-\frac{1}{3}(\alpha_1^1 - d_1^1 - e_{\alpha'}^1 B_0^{\alpha'}) + \frac{1}{2} b_{\beta}^1 \alpha_1^{\beta'} \right], \\ \Delta_1^j &= \varepsilon \ln \varepsilon \left[-\frac{1}{6} \alpha_1^j \right], \quad j = 2, \dots, l. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Вектор Δ_1 мы назовем *вектором смещения, соответствующим точке срыва* $s(x_1, y_1)$. Как показывают формулы (3.9), вектор Δ_1 есть (с точностью до величин порядка $O(\varepsilon)$) вектор отклонения представляющей точки системы уравнений (1.5) от подпространства Σ_0 (состоящего из точек $(\xi, 0)$) при небольших конечных значениях ξ^1 .

Система уравнений (1.5) получается из системы (1) линейным преобразованием координат в окрестности точки срыва $s(x_1, y_1)$. Сейчас мы осуществим это преобразование. Мы увидим, что оно не перемешивает «быстрых» и «медленных» переменных, т. е. переводит подпространство $X_{y^i}^k$ в подпространство Σ_0 , а подпространство $Y_{x_1}^l$ — в подпространство H_0^l (состоящее из точек $(0, \eta^l)$). Таким образом, вектор смещения Δ_1 есть вектор отклонения вычисленного решения системы (1) от подпространства $X_{y^i}^k$, содержащего «быстрый» участок той траектории вырожденной системы (3), которая проходит через точку срыва $s(x_1, y_1)$.

Вектор $\Delta_1 = (\Delta_1^1, \dots, \Delta_1^l)$, естественно, не зависит от выбора системы координат в окрестности точки срыва $s(x_1, y_1)$ и допускает инвариантное выражение. Сейчас мы найдем это инвариантное выражение вектора Δ_1 .

Для этого приведем систему (1) в окрестности точки срыва $s(x_1, y_1)$ к виду (1.5).

Разложим функции $f^i(x, y)$ и $g^j(x, y)$ в окрестности точки $s(x_1^\alpha, y_1^\beta)$ по формулам Тейлора (выписывая только нужные нам члены):

$$\left. \begin{aligned} f^i(x, y) &= A_\alpha^i (x^\alpha - x_1^\alpha) + B_\mu^i (y^\mu - y_1^\mu) + A_{\alpha\beta}^i (x^\alpha - x_1^\alpha) (x^\beta - x_1^\beta) + \\ &\quad + A_{\alpha\beta\gamma}^i (x^\alpha - x_1^\alpha) (x^\beta - x_1^\beta) (x^\gamma - x_1^\gamma) + \dots, \\ g^j(x, y) &= g^j + C_\alpha^j (x^\alpha - x_1^\alpha) \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

Согласно предположению о характере точки срыва, матрица

$$\|A_\alpha^i\| \quad (3.12)$$

имеет одно нулевое собственное значение кратности один; принадлежащий ему собственный вектор обозначим через

$$m = (m^1, m^2, \dots, m^k). \quad (3.13)$$

Собственный вектор с нулевым собственным значением транспонированной матрицы обозначим через

$$n = (n_1, n_2, \dots, n_k). \quad (3.14)$$

Таким образом,

$$A_\alpha^i m^\alpha = 0, \quad A_i^\alpha n_\alpha = 0. \quad (3.15)$$

Дополнительно введем нормирующее соотношение

$$m^\alpha n_\alpha = 1. \quad (3.16)$$

Возьмем теперь систему векторов

$$e_1, e_2, \dots, e_k \quad (e_i = (e_i^1, \dots, e_i^k)), \quad (3.17)$$

где $e_1 = m$, а другие e_i таковы, что $(e_i \cdot n) = 0$ (в остальном произвольные), и примем ее за новый базис пространства X .

Возьмем, далее, систему векторов

$$h_1, h_2, \dots, h_l \quad (h_j = (h_j^1, \dots, h_j^l)), \quad (3.18)$$

где $h_1 = g = (g^1, \dots, g^l)$, а остальные h_j — произвольные, и примем ее за новый базис пространства Y .

Введем в окрестности точки срыва $s(x_1, y_1)$ новые координаты $\bar{\xi}^i, \bar{\eta}^j$ по формулам

$$\left. \begin{aligned} x - x_1 &= \bar{\xi}^i e_i, \\ y - y_1 &= \bar{\eta}^j h_j. \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Непосредственно проверяется, что в координатах $\bar{\xi}^i, \bar{\eta}^j$ система (1) запишется так:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{\xi}}^1 &= p(\bar{\xi}^1)^2 + q\bar{\eta}^1 + \bar{b}_\beta^1 \bar{\eta}^{\beta'} + \bar{a}_1^1 (\bar{\xi}^1)^3 + \bar{e}_\alpha^1 \bar{\xi}^1 \cdot \bar{\xi}^{\alpha'} + \dots, \\ \dot{\bar{\xi}}^i &= \bar{a}_\alpha^i \bar{\xi}^{\alpha'} + \bar{c}_0^i (\bar{\xi}^1)^2 + \dots, \quad i = 2, \dots, k, \\ \dot{\bar{\eta}}^1 &= 1 + \bar{\alpha}_1^1 \bar{\xi}^1 + \dots, \\ \dot{\bar{\eta}}^j &= \bar{\alpha}_1^j \bar{\xi}^1 + \dots, \quad j = 2, \dots, l, \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

где

$$p = n_\delta A_{\alpha\beta}^\delta m^\alpha m^\beta, \quad q = n_\delta B_\mu^\delta q^\mu, \quad (3.21)$$

$$\bar{b}_j^1 = n_\delta B_\mu^\delta h_j^\mu, \quad \bar{d}_1^1 = n_\delta A_{\alpha\beta\gamma}^\delta m^\alpha m^\beta m^\gamma, \quad \bar{e}_{\alpha'}^1 = 2n_\delta A_{\alpha\beta}^\delta m^\alpha e_{\alpha'}^\beta.$$

Заметим, что $\bar{\alpha}_1^\beta$ суть коэффициенты разложения вектора

$$H(H^1, \dots, H^l) = \|C_\alpha^j\| m \quad (3.22)$$

по базису h_1, h_2, \dots, h_l . Очевидно, что $H^j = C_\alpha^j m^\alpha$.

Будем считать, что точка срыва $s(x_1, y_1)$ удовлетворяет еще дополнительно следующему условию невырожденности: $p \neq 0, \quad q \neq 0$.

Дальнейшей заменой:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\xi}^1 &= p^{-\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{3}} \xi^1, & \bar{\xi}^i &= \xi^i, \quad i = 2, \dots, k, \\ \bar{\eta}^1 &= p^{-\frac{1}{3}} q^{-\frac{1}{3}} \eta^1, & \bar{\eta}^j &= \eta^j, \quad j = 2, \dots, l, \\ \bar{t} &= q^{\frac{1}{3}} p^{\frac{1}{3}} t, \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

система (3.20) приводится к виду (1.5):

$$\left. \begin{aligned} \bar{\epsilon}^{\xi^1} &= (\xi^1)^2 + \eta^1 + b_1^1 \eta^{\beta'} + d_1^1 (\xi^1)^3 + e_{\alpha'}^1 \xi^1 \xi^{\alpha'} + \dots, \\ \bar{\epsilon}^{\xi^i} &= a_{\alpha'}^i \xi^{\alpha'} + c_0^i (\xi^1)^2 + \dots, \\ \dot{\bar{\eta}}^1 &= 1 + \alpha_1^1 \xi^1 + \dots, \\ \dot{\bar{\eta}}^j &= \alpha_1^j \xi^1 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

(здесь точкой обозначено дифференцирование по \bar{t}), где

$$\left. \begin{aligned} b_j^1 &= \bar{b}_j^1 p^{\frac{1}{3}} q^{-\frac{2}{3}}, & j &= 2, \dots, l, \\ d_1^1 &= \bar{d}_1^1 p^{-\frac{5}{3}} q^{\frac{1}{3}}, \\ \alpha_1^1 &= \bar{\alpha}_1^1 p^{-\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{3}}, \\ \alpha_1^j &= \bar{\alpha}_1^j p^{-1}, & j &= 2, \dots, l, \\ e_{\alpha'}^1 &= \bar{e}_{\alpha'}^1 p^{-\frac{1}{3}} q^{-\frac{1}{3}}, \\ a_{\alpha'}^i &= \bar{a}_{\alpha'}^i p^{-\frac{1}{3}} q^{-\frac{1}{3}}, & i &= 2, \dots, k, \\ c_0^i &= \bar{c}_0^i p^{-\frac{5}{3}} q^{\frac{1}{3}}, & i &= 2, \dots, k. \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

Возвратимся к вектору смещения, $\Delta_1 = (\Delta_1^1, \dots, \Delta_1^l)$. Очевидно, что

$$\Delta_1 = \bar{\Delta}_1^\beta h_\beta, \quad (3.26)$$

где

$$\bar{\Delta}_1^1 = p^{-\frac{1}{3}} q^{-\frac{1}{3}} \Delta_1^1, \quad \bar{\Delta}_1^{\beta'} = \Delta_1^{\beta'}, \quad \beta' = 2, \dots, l. \quad (3.27)$$

Учитывая (3.25) и (3.27), из (3.10) получим, употребляя символ Кронекера δ_1^β , следующие выражения для координат $\bar{\Delta}_1^\beta$, $\beta = 1, \dots, l$, вектора смещения Δ_1 :

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_1^\beta &= \varepsilon \ln \varepsilon \left(-\frac{1}{6p} \bar{\alpha}_1^\beta \right) + \delta_1^\beta \left\{ \varepsilon^{\frac{2}{3}} \frac{\Omega}{V p \cdot q} + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon \ln \varepsilon \left(-\frac{\bar{\alpha}_1^{\beta'} \bar{b}_{\beta'}^1}{6pq} + \frac{\bar{d}_1^1}{3p^2} + \frac{\bar{e}_{\alpha'}^1 B_0^{\alpha'}}{3V p^2 q^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Подставляя эти выражения в формулу (3.26), получим инвариантное выражение для вектора смещения:

$$\Delta_1 = \varepsilon^{\frac{2}{3}} \frac{\Omega}{V_{pq}} g + \varepsilon \ln \varepsilon \left\{ -\frac{H}{6p} + g \left(-\frac{r}{6pq} + \frac{s}{3p^2} + \frac{k}{3V_{p^2q^2}} \right) \right\}. \quad (3.29)$$

Для входящих в эту формулу векторов g и H , а также для чисел $p, q, s = \bar{a}_1^1$ мы уже указали их инвариантные выражения. Остается найти $r = \alpha_1^6 b_\beta^1$ и $k = \bar{e}_\alpha^1 B_0^{\alpha'}$. Очевидно, что

$$r = n_\delta \bar{B}_\mu^\delta C_\alpha^\mu m^\alpha. \quad (3.30)$$

Остается найти $k = \bar{e}_\alpha^1 B_0^{\alpha'}$ (напомним, что $B_0^{\alpha'}$ определяются из системы уравнений $\alpha_x^i B_0^{\alpha'} + c_0^i = 0, i = 2, \dots, k$). Матрицу $\|A_\alpha^i\|$ можно привести к виду

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & \|\bar{a}_{\alpha'}^{i'}\| & & \\ 0 & & & \end{vmatrix}. \quad (3.31)$$

Обозначим через A' матрицу

$$\begin{vmatrix} 0, & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & \|\bar{a}_{\alpha'}^{i'}\|^{-1} & & \\ 0 & & & \end{vmatrix}. \quad (3.32)$$

Пусть в исходной системе координат пространства X линейное преобразование A' осуществляется матрицей

$$\|d_v^\beta\|. \quad (3.33)$$

(Легко видеть, что эта матрица единственным образом определяется матрицей $\|A_\alpha^i\|$.) Тогда, как легко можно подсчитать,

$$k = \frac{1}{p^{\frac{4}{3}} q^{\frac{2}{3}}} \cdot (-2n_\delta A_{\alpha\beta}^\delta m^\alpha d_v^\beta A_{\lambda\mu}^\nu m^\lambda m^\mu). \quad (3.34)$$

Поступило
9. V. 1957

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Тихонов А. Н., Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных, Матем. сборн., 31(73):3 (1952), 574—586.
- 2 Васильева А. Б., О дифференциальных уравнениях, содержащих малые параметры, Матем. сборн., 31(73):3 (1952), 587—644.
- 3 Мищенко Е. Ф., Понтягин Л. С., Периодические решения систем дифференциальных уравнений, близкие к разрывным, Доклады Ака. наук СССР, т. 102, № 5 (1955), 889—891.

Е. Ф. МИЩЕНКО

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ МАЛЫЕ ПАРАМЕТРЫ ПРИ ПРОИЗВОДНЫХ

(Представлено академиком П. С. Александровым)

В работе вычисляются периодические решения систем дифференциальных уравнений с малым параметром при производных, «близкие к разрывным», а также выводятся асимптотические формулы для величин периодов таких решений.

§ 1. Вводные соображения

Различные задачи теории колебаний приводят к исследованию систем дифференциальных уравнений типа

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x}^i &= f^i(x^1, \dots, x^k, y^1, \dots, y^l), & i &= 1, \dots, k, \\ \dot{y}^j &= g^j(x^1, \dots, x^k, y^1, \dots, y^l), & j &= 1, \dots, l,\end{aligned}\tag{1}$$

или, в векторной форме,

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y),\end{aligned}\tag{1'}$$

где ε — малый положительный параметр. При этом, говоря, что параметр ε мал, имеют в виду приближенное изучение решений системы (1) с пренебрежением величинами той или иной степени малости относительно ε . В частности, важное значение имеет задача отыскания таких периодических решений систем типа (1), которые имеют «почти разрывный» характер, а также приближенного вычисления величин, характеризующих эти периодические решения. Настоящая работа посвящена решению этой задачи.

Прежде чем формулировать полученные результаты, мы изложим некоторые общие соображения, которые, в частности, пояснят, что такое разрывное колебание и что мы имеем в виду, говоря о колебаниях, «близких к разрывным».

Наряду с системой уравнений (1) введем в рассмотрение вырожденную систему, получающуюся из (1) при $\varepsilon = 0$:

$$\begin{aligned}f^i(x^1, \dots, x^k, y^1, \dots, y^l) &= 0, \\ \dot{y}^j &= g^j(x^1, \dots, x^k, y^1, \dots, y^l).\end{aligned}\tag{2}$$

На первый взгляд кажется естественным ожидать, что при тех или иных ограничениях, наложенных на правые части, решения системы (2) будут

приближениями решений невырожденной системы (1). Однако уже здесь мы сталкиваемся с весьма существенным затруднением. При интегрировании системы (2) обычно поступают следующим образом: сначала из k соотношений

$$f^i(x^1, \dots, x^k, y^1, \dots, y^l) = 0 \quad (3)$$

выражают x^i через y^j :

$$x^i = \chi^i(y^1, \dots, y^l), \quad (4)$$

а затем решают следующую систему l уравнений с l неизвестными функциями:

$$\dot{y}^j = g^j(\chi^a(y^1, \dots, y^l), y^1, \dots, y^l). \quad (5)$$

Однако таким путем можно найти лишь ограниченный участок решения системы (2), так как, вообще говоря, решение может подойти к «особой» точке — точке, в которой якобиан

$$D(x, y) = \det \left\| \frac{\partial f^a}{\partial x^b} \right\| \quad (6)$$

обратится в нуль и разрешение соотношений (4) относительно x^i станет невозможным. Из рассмотрения системы (3) никаких выводов о поведении решения системы (2) по достижении им «особой» точки сделать нельзя. Поэтому раньше при изучении различных конкретных систем типа (2), многократно возникавших в теории колебаний, привлекались дополнительные физические соображения, которые формулировались в форме «гипотез скачка». Из этих физических соображений вытекало, что по достижении «особой точки» решение вырожденной системы должно совершить вполне определенный мгновенный скачок в другую точку поверхности (3). Таким способом, например, изучили работу симметрического мультивибратора Андронов и Витт [см. (1)].

В случае мультивибратора, а также во многих других электрических схемах, оказалось, что соответствующие системы уравнений типа (2) (к которым присоединены еще «условия скачка») среди своих решений имеют и периодические. Колебания, описываемые такими решениями, естественно было назвать разрывными. Впервые чисто математическое решение вопроса о разрывных колебаниях в мультивибраторе было дано Железцовым и Родыгиным в их работе (2). Железцов и Родыгин учли в схеме изучаемого прибора паразитные параметры (малые емкости и самоиндукции), пришли к системе дифференциальных уравнений типа (1), а затем считали решения вырожденной системы пределами решений соответствующей невырожденной системы при $\varepsilon \rightarrow 0$. Такое рассмотрение позволило без привлечения физических соображений увидеть характер скачка и обнаружить периодическое разрывное колебание в мультивибраторе.

В общем случае можно поступить следующим образом. Траектории вырожденной системы уравнений (2) мы будем рассматривать в фазовом пространстве системы (1) и трактовать их как пределы траекторий соответствующей невырожденной системы (1) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Такая трактовка дает возможность чисто математически определить характер скачка, который претерпевает решение системы уравнений (2) по достижении «особой»

точки, или, как мы будем теперь говорить, *точки срыва*. Чтобы было ясно, что речь идет здесь именно о скачке, дадим сейчас грубое описание фазовых траекторий системы (1).

Фазовое пространство R^{k+l} системы (1) естественно распадается в прямую сумму k -мерного пространства $X^k(x^1, \dots, x^k)$ и l -мерного пространства $Y^l(y^1, \dots, y^l)$. Если представляющая точка находится вдали от поверхности, выделяемой уравнениями (3), то характер изменения ее координат неодинаков: вектор x меняется быстро в сравнении с вектором y , так как компонента $\dot{x} = \frac{1}{\varepsilon} f(x, y)$ фазовой скорости вдали от указанной поверхности велика, в то время как вторая компонента $\dot{y} = g(x, y)$ ограничена. В первом приближении можно считать, что y остается неизменным, $y = y_0$, а x быстро меняется в пространстве $X_{y_0}^k$, состоящем из точек (x, y_0) , в силу уравнения

$$\dot{x} = f(x, y_0). \quad (7)$$

Такое изменение происходит до тех пор, пока величина $f(x, y_0)$ не станет близкой к нулю, т. е. пока представляющая точка не приблизится к одному из устойчивых положений равновесия системы уравнений «быстрых движений» (7). После этого переменные x и y начинают меняться со сравнимыми скоростями. Это значит, что положение равновесия y_0 системы (7) перемещается и представляющая точка системы (1) движется, сопровождая это перемещающееся в пространстве положение равновесия. Однако при некотором значении y_0 положение равновесия системы (7) может исчезнуть, например, в результате слияния с другим, неустойчивым положением равновесия. Тогда характер движения резко нарушается: переменные x вновь станут быстро меняться, пока представляющая точка не приблизится к новому устойчивому положению равновесия системы (7).

Приведенное интуитивное описание позволяет представить в общих чертах картину движения в пространстве R^{k+l} в силу вырожденной системы (2). Опишем траекторию, соответствующую разрывному решению системы (2). Такая траектория состоит из чередующихся участков двух типов: а) участков *медленных движений*, лежащих на l -мерной поверхности F , выделяемой уравнениями (3), и проходимых представляющей точкой в конечное время; б) участков *быстрых движений*, лежащих в некотором k -мерном подпространстве пространства R^{k+l} , выделяемом уравнением $y = \text{const}$, и проходимых представляющей точкой мгновенно. Переход от медленных движений к быстрым происходит в точках срыва. Уравнение $f(x, y_0)$ выделяет, очевидно, в пространстве R^{k+l} совокупность всех положений равновесия системы (7). Поэтому поверхность F представляет собой множество всех положений равновесия системы (7) при различных y_0 . Медленное движение по поверхности F , в силу системы (5), есть движение устойчивого положения равновесия системы (7) при меняющемся y_0 . Срыв происходит при слиянии устойчивого положения равновесия с неустойчивым. После срыва точка перемещается в подпространстве $y = \text{const}$ быстрых движений, переходя к новому устойчивому положению равновесия системы (7), и затем возобновляет свое движение по поверхности F .

Может случиться, что в результате последовательного прохождения нескольких участков медленного движения и нескольких срывов траектория системы (2) замкнется. Возникает разрывное периодическое решение системы (2).

В настоящей работе мы предполагаем, что разрывное периодическое решение системы (2) существует и известно. Обозначим его траекторию через Z_0 . Относительно самого характера решения Z_0 делаются общие и естественные предположения, а именно предполагается, что:

а) цикл Z_0 устойчив; это значит, что однократный обход по траекториям системы (2), близким к Z_0 , порождает сжатое отображение φ в себя малой $l-1$ -мерной площадки, лежащей на поверхности F и трансверсальной с Z_0 . Дополнительно предполагается, что сжато также отображение, получающееся из φ линеаризацией;

б) в любой точке (x, y) произвольного участка медленного движения цикла Z_0 собственные числа матрицы $\left\| \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\beta} \right\|$ имеют отрицательные действительные части;

в) точки срыва, расположенные на цикле Z_0 , имеют «общий тип», т. е. для любой такой точки все собственные числа матрицы $\left\| \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\beta} \right\|$ имеют отрицательные действительные части, кроме одного, которое обращается в нуль*.

В этих предположениях можно доказать (см. § 3) существование периодического решения Z_ϵ системы (1), близкого к Z_0 и стремящегося к Z_0 при $\epsilon \rightarrow 0$.

В настоящей работе это периодическое решение Z_ϵ , близкое к Z_0 , вычислено с точностью до величин порядка малости $\epsilon^{\frac{2}{3}}$ и $\epsilon \cdot \ln \epsilon$ и с пренебрежением величинами порядка ϵ . С такой же точностью вычислен затем и период этого решения. Полученные результаты являются в известной мере окончательными: эффективное вычисление решения Z_ϵ и его периода с большей точностью представляет в общем случае, по-видимому, практически не преодолимые трудности. Однако в некоторых частных случаях (а именно при $l=1$, $k=1$) возможно и вычисление членов порядка ϵ [см. (3)].

В заключение этих общих рассуждений приведем конкретный пример. Именно, рассмотрим систему уравнений, которая довольно наглядно иллюстрирует описанную выше картину возникновения разрывных колебаний. Эта система (к ней приводит задача о колебаниях в схеме, известной под названием «двухламповой схемы Фрюхгауфа», см. (1)) такова:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}^1 &= -\alpha(y^1 - y^2) + \varphi(x^1) - x^2 \quad (\equiv f^1(x, y)), \\ \dot{x}^2 &= \alpha(y^1 - y^2) + \varphi(x^2) - x^1 \quad (\equiv f^2(x, y)), \\ \dot{y}^1 &= x^1, \\ \dot{y}^2 &= x^2. \end{aligned} \right\} \quad (8).$$

* Кроме этого, предполагаются выполненными еще некоторые условия невырожденности, которых мы здесь формулировать не будем. См. об этих условиях в работе (6).

Здесь $\alpha > 0$ — действительное число, а $\varphi(x^i)$ — нелинейная функция, определенная на интервале $-1 < x^i < 1$ графиком, изображенным на рис. 1 (преобразованная характеристика лампы). Легко убедиться, что при любых фиксированных значениях y^1 и y^2 система уравнений «быстрых движений» системы (8)

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x}^1 &= f^1(x, y), \\ \varepsilon \dot{x}^2 &= f^2(x, y) \end{aligned} \quad (9)$$

имеет либо одно, либо три положения равновесия. Действительно, положения равновесия системы (9) являются точками пересечения кривых

$$f^1(x^1, x^2, y^1, y^2) = 0, \quad f^2(x^1, x^2, y^1, y^2) = 0$$

в плоскости (x^1, x^2) . Но первая кривая получается сдвигом по оси x^2 графика кривой $x^2 = \varphi(x^1)$, а вторая — сдвигом по оси x^1 графика кривой $x^1 = \varphi(x^2)$. Например, при $y^1 = y^2 = y_0$ будет три положения равновесия: s_1, s_2, s_3 (см. рис. 2), причем легко проверить, что s_1 и s_3 являются

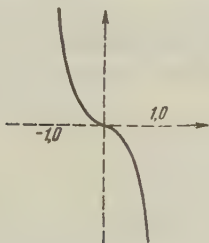


Рис. 1

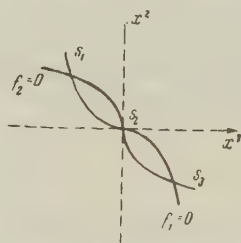


Рис. 2

устойчивыми узлами, а s_2 — седлом. При помощи известных критериев сразу устанавливается, что ни при каких значениях y^1 и y^2 система (9) не имеет периодических решений.

Пусть начальная точка системы (8) имеет, например, координаты $(-1 + \delta, 1 - \delta, a, a)$ (где δ — небольшое положительное число), т. е. находится вблизи устойчивого положения равновесия s_1 системы (9), в которую вместо y^1 и y^2 подставлены их значения, равные a . Тогда, в силу уравнений медленных движений:

$$\dot{y}^1 = x^1, \quad \dot{y}^2 = x^2,$$

разность $(y^1 - y^2)$ убывает. Это значит, что кривая $f^1 = 0$ движется вверх, кривая $f^2 = 0$ движется влево и положения равновесия s_1 и s_2 движутся навстречу друг другу, причем представляющая точка системы (8) сопровождает положение равновесия s_1 . При некоторых значениях $y^1 = y_0^1, y^2 = y_0^2$ устойчивый узел s_1 сольется с седлом s_2 и потеряет устойчивость (см. рис. 3). В плоскости (x^1, x^2, y_0^1, y_0^2) останется лишь одно устойчивое положение равновесия s_3 , и представляющая точка системы (8) быстро

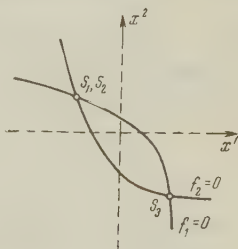


Рис. 3

приблизится к нему. После этого, в силу уравнений (10), разность $(y^1 - y^2)$ будет возрастать, кривая $f^1 = 0$ будет двигаться вниз, кривая $f^2 = 0$ — вправо, вновь возникнут положения равновесия s_1 и s_2 и устойчивый узел s_3 будет приближаться к седлу s_2 . В результате последующего слияния положений равновесия s_3 и s_2 узел s_3 потеряет свою устойчивость и т. д. Таким образом возникает периодический процесс.

Настоящая работа сделана в семинаре по теории колебаний (в Математическом институте Академии наук СССР), руководимом Л. С. Понтрягиным. Часть результатов работы была опубликована раньше в работе (4). Формула (9), приведенная там, неверна.

§ 2. Поведение решений системы (1) вблизи участков медленных движений и в окрестности точек срыва

В настоящем параграфе будут изложены результаты Л. С. Понтрягина о поведении решений системы уравнений (1) в окрестности точки срыва вырожденной системы (2) [см. (5)]. Эти результаты мы существенно используем в следующих параграфах.

Изложению результатов Л. С. Понтрягина предположим одно замечание о поведении решений системы (1) вблизи участков медленного движения вырожденной системы (2). Пусть

$$\begin{aligned} x^i &= x_0^i(t), \\ y^j &= y_0^j(t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

— некоторое решение вырожденной системы уравнений (2), идущее при $\bar{t} \leq t < \bar{\bar{t}}$ (не исключается случай $\bar{t} = \infty$) по поверхности F на конечном, не зависящем от ε расстоянии от поверхности срыва Φ , состоящей из точек поверхности F , в которых функциональный детерминант (6) обращается в нуль. Предположим, что в любой точке (x, y) решения (2.1) собственные числа матрицы $\left\| \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\beta} \right\|$ имеют отрицательные действительные части. Тогда всякое решение

$$\begin{aligned} x^i &= x^i(t, \varepsilon), \\ y^j &= y^j(t, \varepsilon) \end{aligned} \quad (2.2)$$

системы уравнений (1) с начальными значениями, удовлетворяющими соотношениям

$$\begin{aligned} x_0^i(\bar{t}) - x^i(\bar{t}, \varepsilon) &= O(\varepsilon), \\ y_0^j(\bar{t}) - y^j(\bar{t}, \varepsilon) &= O(\varepsilon), \end{aligned} \quad (2.3)$$

представляется при $\bar{t} \leq t < \bar{\bar{t}}$ в виде

$$\begin{aligned} x^i &= x_0^i(t) + x_1^i(t, \varepsilon), \\ y^j &= y_0^j(t) + y_1^j(t, \varepsilon), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $x_1^i(t, \varepsilon)$ и $y_1^j(t, \varepsilon)$ ограничены по t и имеют по ε порядок $O(\varepsilon)$.

На доказательстве этого факта мы не останавливаемся. Впрочем, он легко может быть выведен из результатов А. Н. Тихонова (6) и А. Б. Васильевой (7).

Переходим к изложению результатов Л. С. Понтрягина. Пусть при $t = 0$ решение (2.2) приходит в некоторую точку срыва $S(x_0, y_0)$ «общего типа». Из того, что все собственные значения матрицы $\left\| \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\beta} \right\|$ в этой точке имеют отрицательные действительные части, кроме одного, обращающегося в нуль, следует, что систему (1) в конечной окрестности точки срыва $S(x_0, y_0)$ линейным преобразованием координат можно привести к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi}^1 &= (\xi^1)^2 + \eta^1 + b_{\beta}^1 \eta^{\beta'} + d_1^1 (\xi^1)^3 + e_{\alpha'}^1 \xi^1 \xi^{\alpha'} + \dots, \\ \dot{\xi}^i &= a_{\alpha'}^i \xi^{\alpha'} + b_{\beta}^i \eta^{\beta} + c_0^i (\xi^1)^2 + d_1^i (\xi^1)^3 + \dots, \\ \dot{\eta}^1 &= 1 + \alpha_1^1 \xi^1 + \dots \quad (= \psi^1(\xi^\alpha, \eta^\beta)), \\ \eta^j &= \alpha_1^j \xi^1 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

$$(i = 2, \dots, k, \quad j = 2, \dots, l).$$

(Мы выписываем только нужные члены. Здесь, как и всюду в дальнейшем, суммирование по штрихованному индексу начинается с двух.) На конечном, не зависящем от ε участке $-p \leq \xi^1 \leq p$ величину ξ^1 можно принять за независимую переменную и вместо системы (2.5) рассматривать следующую систему:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi^i}{d\xi^1} &= \frac{a_{\alpha'}^i \xi^{\alpha'} + \dots}{(\xi^1)^2 + \eta^1 + \dots}, \quad i = 2, \dots, k, \\ \frac{d\eta^j}{d\xi^1} &= \varepsilon \frac{\delta_1^j + \alpha_1^j \xi^1 + \dots}{(\xi^1)^2 + \eta^1 + \dots}, \quad j = 1, \dots, l. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Л. С. Понтрягин разбивает участок $(-p, p)$ точками $-\sigma_1, \sigma_2, \sigma_1 = \varepsilon^{\frac{2}{9}}, \sigma_2 = \xi^{\frac{2}{9}}$ на три части и на каждом из полученных трех участков решение

$$\begin{aligned} \xi^i &= \xi^i(\xi^1, \varepsilon), \\ \eta^j &= \eta^j(\xi^1, \varepsilon) \end{aligned} \quad (2.7)$$

системы (2.6), являющееся продолжением решения (2.2), вычисляет по-разному.

На участке $-p \leq \xi^1 < \sigma_1$ решение (2.7) дается следующими формулами:

$$\begin{aligned} \xi^i &= \xi_0^i(\xi^1) + \varepsilon \xi_1^i(\xi^1) + \varepsilon^2 \frac{Q^i}{(\xi^1)^4} + \tilde{R}^i(\xi^1, \varepsilon) \equiv \theta^i \cdot (\xi^1)^3 + \Pi^i(\xi^1)^3 + \dots + \\ &+ \varepsilon \left(\frac{m^i}{\xi^1} + n^i \ln |\xi^1| \right) + \varepsilon^2 \frac{Q^i}{(\xi^1)^4} + R^i(\xi^1, \varepsilon), \quad i = 2, \dots, k, \\ \eta^1 &= \eta_0^1(\xi^1) + \varepsilon \eta_1^1(\xi^1) - \frac{\varepsilon^2}{8(\xi^1)^4} + \hat{S}^1(\xi^1, \varepsilon) \equiv -(\xi^1)^2 + \left[\frac{2}{3} \alpha_{\beta'}^1 b_{\beta'}^1 + c_1^1 - d_1^1 - \right. \\ &\left. - e_{\alpha'}^1 \theta^{\alpha'} \right] (\xi^1)^3 + \varepsilon \left[-\frac{1}{2\xi^1} - \frac{1}{2} \alpha_{\beta'}^1 b_{\beta'}^1 \ln |\xi^1| \right] + \varepsilon^2 \frac{-1}{8(\xi^1)^4} + S^1(\xi^1, \varepsilon), \\ \eta^j &= \eta_0^j(\xi^1) + \varepsilon \eta_1^j(\xi^1) + \tilde{R}^j(\xi^1, \varepsilon) = \\ &= -\frac{2}{3} \alpha_1^j (\xi^1)^3 + \dots + \varepsilon \left[\frac{\alpha_1^j}{2} \ln |\xi^1| \right] + R^j(\xi^1, \varepsilon), \quad j = 2, \dots, l. \end{aligned}$$

В этих формулах многоточием заменены члены более высокого порядка относительно ξ^1 , чем выписанные, а функции $R^i(\xi^1, \varepsilon)$ $S^j(\xi^1, \varepsilon)$ имеют на участке $-p \leq \xi^1 < -\tau_1$ величину порядка $O(\varepsilon)$.

Чтобы выписать решение на участке $-\tau_1 \leq \xi^1 < \tau_2$, сделаем предварительно некоторые замены. Именно, положим

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \mu^3, \quad \xi^1 = \mu u^1, \quad \xi^i = \mu^2 u^i \quad (i = 2, \dots, k), \\ \eta^1 &= \mu^2 v^1, \quad \eta^j = \mu^3 v^j \quad (j = 2, \dots, l), \quad t = \mu^2 \tau. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Тогда система (2.5) примет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du^1}{d\tau} &= (u^1)^2 + v^1 + \mu (b_{\beta'}^1 v^{\beta'} + c_1^1 u^1 v^1 + d_1^1 (u^1)^3 + e_{\alpha'}^1 u^1 u^{\alpha'} + \dots), \\ \mu \frac{du^i}{d\tau} &= a_{\alpha'}^i u^{\alpha'} + b_1^i v^1 + c_0^i (u^1)^2 + \mu (b_{\beta'}^i v^{\beta'} + \\ &\quad + d_1^i (u^1)^3 + c_1^i u^1 v^1 + e_{\alpha'}^i u^1 u^{\alpha'}) + \dots, \\ \frac{dv^1}{d\tau} &= 1 + \mu \alpha_1^1 u^1 + \dots, \\ \frac{dv^j}{d\tau} &= \alpha_1^j u^1 + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

а система (2.6) перейдет в систему:

$$\begin{aligned} \mu \frac{du^i}{d\tau} &= \frac{\Phi^i(u^1, \dots, u^k, v^1, \dots, v^l, \mu)}{\Phi^1(u^1, \dots, u^k, v^1, \dots, v^l, \mu)}, \quad i = 2, \dots, k, \\ \frac{dv^j}{d\tau} &= \frac{\Psi^j(u^1, \dots, u^k, v^1, \dots, v^l, \mu)}{\Phi^1(u^1, \dots, u^k, v^1, \dots, v^l, \mu)}, \quad j = 1, \dots, l, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где через $\Phi^i(u^{\alpha}, v^{\beta}, \mu)$, $\Psi^j(u^{\alpha}, v^{\beta}, \mu)$ обозначены соответственно правые части уравнений (2.9).

Л. С. Понтрягин построил некоторую систему функций $v_0^j(u^1)$, $v_1^1(u^1)$, $u_0^i(u^1)$, $u_1^i(u^1)$, $j = 1, \dots, l$, $i = 2, \dots, k$, каждая из которых определена на всей прямой, и затем сконструировал из нее приближенное решение системы (2.10) на участке $-\frac{\sigma_1}{\mu} \leq u^1 \leq \frac{\sigma_2}{\mu}$. Оказалось, что продолжение решения (2.7) на участок $-\tau_1 \leq \xi^1 \leq \tau_2$ (в переменных u^i , v^j — на участок $-\frac{\sigma_1}{\mu} \leq u^1 \leq \frac{\sigma_2}{\mu}$) дается следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} u^i &= u_0^i(u^1) + \mu u_1^i(u^1) + r^i(u^1, \mu), \quad i = 2, \dots, k, \\ v^1 &= v_0^1(u^1) + \mu v_1^1(u^1) + s^1(u^1, \mu), \\ v^j &= v_0^j(u^1) + s^j(u^1, \mu), \quad j = 2, \dots, l, \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

где $r^i(u^1, \mu)$ и $s^1(u^1, \mu)$ имеют порядок $O(\mu)$, а $s^j(u^1, \mu)$ — порядок $O(1)$. При этом входящие в формулы (2.11) функции $u_0^i(u^1)$, $u_1^i(u^1)$, $v_1^1(u^1)$, $v_0^j(u^1)$ определяются так:

$v_0^1(u^1)$ есть частное решение уравнения Рикатти

$$\frac{dv^1}{du^1} = \frac{1}{(u^1)^2 + v^1}, \quad (2.12)$$

представляющееся в виде $v_0^1 = -(u^1)^2 + z_0(u^1)$, где $z_0(u^1) \rightarrow 0$ при $u^1 \rightarrow -\infty$; $v_0^j(u^1)$ для $j = 2, \dots, l$ определяется формулой

$$v_0^j(u^1) = \alpha_1^j \int_0^{u^1} \frac{u^1 du^1}{(u^1)^2 + v_0^1(u^1)} + \frac{1}{2} \alpha_1^j \ln \mu, \quad (2.13)$$

$u_0^i(u^1)$ находятся из системы алгебраических уравнений

$$u_{\alpha'}^i u_0^{\alpha'} + b_1^i v_0^1 = c_0^i (u^1)^2 = 0, \quad i = 2, \dots, k; \quad (2.14)$$

$v_1^1(u^1)$ есть частное решение линейного дифференциального уравнения

$$\frac{dv_1^1}{du^1} + \frac{v_1^1}{[(u^1)^2 + v_0^1]^2} = \frac{\alpha_1^1 [(u^1)^2 + v_0^1] - b_{\beta'}^1 v_0^{\beta'} + c_1^1 u^1 v_0^1 - d_1^1 (u^1)^3 - e_{\alpha'}^1 u^1 u^{\alpha'}}{[(u^1)^2 + v_0^1]^2}, \quad (2.15)$$

определяемое формулой

$$v_1^1 = \frac{1}{G(u^1)} \int_{-\infty}^{u^1} H(u^1) G(u^1) du^1 - \frac{1}{2} b_{\beta'}^1 \alpha_1^{\beta'} \ln \mu; \quad (2.16)$$

в этой формуле

$$G(u^1) = \exp \left[\int_0^{u^1} \frac{d\theta}{[\theta^2 + v_0^1(\theta)]^2} \right],$$

а $H(u^1)$ — правая часть уравнения (2.15), в которой вместо $v_0^{\beta'}$ подставлены выражения

$$\alpha_1^{\beta'} \int_0^{u^1} \frac{u^1 du^1}{[(u^1)^2 + v_0^1]^2}.$$

Непосредственно из уравнения (2.13) находятся асимптотические разложения функций $v_0^1(u^1)$ при больших отрицательных значениях u^1 и при больших положительных значениях u^1 . После этого из формул (2.13), (2.14), (2.16) легко получаются и асимптотические разложения для функций v_0^j , v_1^1 , u_0^i . Выпишем все эти разложения:

$$\left. \begin{aligned} v_0^1(u^1)^- &= -(u^1)^2 - \frac{1}{2u^1} - \frac{1}{8(u^1)^4} + O\left(\frac{1}{(u^1)^7}\right), \\ v_0^1(u^1)^+ &= \Omega - \frac{1}{u^1} + O\left(\frac{1}{(u^1)^3}\right), \\ u_0^i(u^1)^- &= \theta^i (u^1)^2 + \frac{m^i}{u^1} + \frac{Q^i}{(u^1)^4} + O\left(\frac{1}{(u^1)^7}\right), \\ u_0^i(u^1)^+ &= B_0^i (u^1)^2 + O(1), \\ v_1^1(u^1)^- &= \left[\frac{2}{3} \alpha_1^{\beta'} b_{\beta'}^1 + c_1^1 - d_1^1 - e_{\alpha'}^1 \theta^{\alpha'} \right] (u^1)^3 - \\ &\quad - \frac{1}{2} b_{\beta'}^1 \alpha_1^{\beta'} \ln |u^1| - \frac{1}{2} b_{\beta'}^1 \alpha_1^{\beta'} \ln \mu + O(1), \\ v_1^1(u^1)^+ &= (\alpha_1^1 - d_1^1 - e_{\alpha'}^1 B_0^{\alpha'}) \ln |u^1| - \frac{1}{2} b_{\beta'}^1 \alpha_1^{\beta'} \ln \mu + O(1). \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Таким образом, построение решения (2.13) описано.

На участке $\sigma_2 \leq \xi^1 \leq p$ решение (2.7) также вычислено Л. С. Понтрягиным. Оказалось, что здесь

$$\left. \begin{aligned} \eta^1(\xi^1, \varepsilon) &= \varepsilon^{\frac{2}{3}} \Omega + \varepsilon \ln \varepsilon \left[-\frac{1}{3} (\alpha_1^1 - d_1^1 - e_{\alpha'}^1 B_0^{\alpha'} + \frac{1}{2} \alpha_1^{\beta'} b_{\beta'}^1) + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon \left[-\frac{1}{\xi^1} + (\alpha_1^1 - d_1^1 - e_{\alpha'}^1 B_0^{\alpha'}) \ln \xi^1 \right] + O(\varepsilon), \right. \\ \eta^j(\xi^1, \varepsilon) &= \varepsilon \ln \varepsilon \left[-\frac{1}{6} \alpha_1^j \right] + \varepsilon \alpha_1^j \ln \xi^1 + O(\varepsilon), \quad j = 2, \dots, l, \\ \xi^i(\xi^1, \varepsilon) &= B_0^i (\xi^1)^2 + \dots + O(1)_{\varepsilon \rightarrow 0}, \quad i = 2, \dots, k. \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

Обозначим через $\Delta_0 = (\Delta_0^1, \dots, \Delta_0^l)$ вектор с координатами

$$\Delta_0^1 = \varepsilon^{\frac{2}{3}} \Omega + \varepsilon \ln \varepsilon \left[-\frac{1}{3} \left(\alpha_1^1 - d_1^1 - e_{\alpha'}^1 B_0^{\alpha'} + \frac{1}{2} b_{\beta'}^1 \alpha_1^{\beta'} \right) \right], \quad (2.19)$$

$$\Delta_0^j = \varepsilon \ln \varepsilon \left[-\frac{1}{6} \alpha_1^j \right], \quad j = 2, \dots, l.$$

Вектор Δ_0 будем называть *вектором смещения*, соответствующим точке срыва $S(x_0, y_0)$. Как показывают формулы (2.18), он характеризует с точностью до величин порядка $O(\varepsilon)$ отклонение решения (2.18) от k -мерной плоскости Σ_0 , состоящей из точек $(\xi, 0)$ (при конечных значениях ξ^1). Но система уравнений (2.5) получается из системы (1) линейным преобразованием координат в окрестности точки срыва $S(x_0, y_0)$. Это преобразование «не перемешивает» быстрых и медленных переменных, т. е. переводит подпространство $X_{y_0}^k$, состоящее из точек (x, y_0) , в подпространство Σ_0 , а подпространство $Y_{x_0}^l$, состоящее из точек (x_0, y) , в подпространство H_0^l , состоящее из точек $(0, \eta)$. Таким образом, вектор смещения Δ_0 есть вектор уклонения вычисленного решения системы (1) от подпространства $X_{y_0}^k$, содержащего «быстрый» участок той траектории вырожденной системы (2), которая проходит через точку срыва $S(x_0, y_0)$. Л. С. Понтрягин дал и инвариантное выражение величины вектора смещения. Выпишем его:

$$\Delta_0 = \varepsilon^{\frac{2}{3}} \frac{\Omega}{V \frac{p}{P} \cdot q} g + \varepsilon \ln \varepsilon \left[-\frac{H}{6p} + g \left(-\frac{r}{6pq} + \frac{s}{3p^2} + \frac{k}{3V \frac{p}{P} q^2} \right) \right]. \quad (2.20)$$

Входящее в эту формулу число Ω определено выше (см. вторую формулу (2.17)), оно не зависит от системы уравнений (1). Векторы g , H и числа p , q , r , s , k определяются значениями функций $f^i(x, y)$ и $g^j(x, y)$ и их нескольких производных в точке срыва $S(x_0, y_0)$. Для того чтобы получить их точные значения, разложим функции $f^i(x, y)$ и $g^j(x, y)$ в окрестности точки срыва $S(x_0, y_0)$ по формулам Тейлора (выписывая только нужные нам члены):

$$\left. \begin{aligned} f^i(x, y) &= A_{\alpha}^i (x^{\alpha} - x_0^{\alpha}) + B_{\mu}^i (y^{\mu} - y_0^{\mu}) + A_{\alpha\beta}^i (x^{\alpha} - x_0^{\alpha})(x^{\beta} - x_0^{\beta}) + \\ &\quad + A_{\alpha\beta\gamma}^i (x^{\alpha} - x_0^{\alpha})(x^{\beta} - x_0^{\beta})(x^{\gamma} - x_0^{\gamma}) + \dots, \\ g^j(x, y) &= g^j + C_{\alpha}^j (x^{\alpha} - x_0^{\alpha}) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

Согласно предположению о характере точки срыва $S(x_0, y_0)$, матрица $\|A_\alpha^i\|$ имеет лишь одно нулевое собственное значение; принадлежащий ему собственный вектор обозначим через $m = (m^1, \dots, m^k)$. Собственный вектор с нулевым собственным значением транспонированной матрицы обозначим через $n = (n_1, \dots, n_k)$. Дополнительно введем нормирующее соотношение $m^\alpha n_\alpha = 1$. Тогда, как показывают элементарные выкладки,

$$\left. \begin{aligned} g &= (g^1, \dots, g^l), \\ H &= (H^1, \dots, H^l), \quad H^j = C_\alpha^j m^\alpha, \\ p &= n_\delta A_{\alpha\beta}^\delta m^\alpha m^\beta, \\ q &= n_\delta B_\mu^\delta g^\mu, \\ r &= n_\delta B_\mu^\delta C_\delta^\mu m^\alpha, \\ s &= n_\delta A_{\alpha\beta\gamma}^\delta m^\alpha m^\beta m^\gamma. \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

К выражениям (2.22) присоединим еще легко получаемые следующие две формулы (они понадобятся нам в последнем параграфе):

$$\alpha_i^{\beta} b_\beta^1 = Q = \frac{r}{\sqrt[3]{p^2 q^2}}, \quad (2.23)$$

$$d = d_1^1 = sp^{-\frac{5}{3}} q^{\frac{1}{3}}.$$

Несколько сложнее инвариантное выражение для k . Матрицу $\|A_\alpha^i\|$ можно привести к виду:

$$\left\| \begin{array}{c} 0 \dots 0 \\ \vdots \\ \|\bar{a}_{\alpha'}^{i'}\| \\ 0 \end{array} \right\|. \quad (2.24)$$

Обозначим через A' матрицу

$$\left\| \begin{array}{c} 0 \dots 0 \\ \vdots \\ \|\bar{a}_{\alpha'}^{i'}\|^{-1} \\ 0 \end{array} \right\|. \quad (2.25)$$

Пусть в исходной системе координат пространства X линейное преобразование A' осуществляется матрицей

$$\|d_v^\beta\|. \quad (2.26)$$

Легко видеть, что матрица $\|d_v^\beta\|$ определяется единственным образом матрицей $\|A_\alpha^i\|$. Тогда

$$k = -2n_\delta A_{\alpha\beta}^\delta m^\alpha d_v^\beta A_{\lambda\mu}^\nu m^\lambda m^\mu p^{-\frac{4}{3}} q^{-\frac{2}{3}}. \quad (2.27)$$

§ 3. Вычисление периодического решения

Предположим, что вырожденная система уравнений (2) имеет разрывное периодическое решение. Его траекторию обозначим через Z_0 . Эта траектория Z_0 состоит из конечного числа участков медленных движений и из конечного числа участков быстрых движений. Будем для определенности считать (это не ограничивает общности дальнейших

рассмотрений), что Z_0 состоит из четырех участков. Пусть $u_1 = (p_2, s_1)$, $u_2 = (p_1, s_2)$ — участки медленных движений, $v_1 = (s_1, p_1)$, $v_2 = (s_2, p_2)$ — участки быстрых движений, s_1, s_2 — точки срыва, p_1, p_2 — точки падения. Цикл Z_0 схематически изображен на рис. 4.

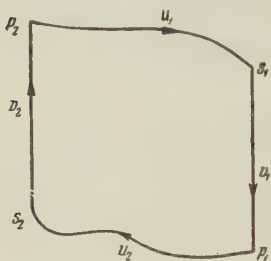


Рис. 4

Относительно разрывного периодического решения, представляемого циклом Z_0 , мы делаем следующие предположения:

а) Цикл Z_0 устойчив. Это значит, что однократный обход по разрывным траекториям системы (2), близким к траектории Z_0 , порождает сжатое отображение φ в себя малой $(l-1)$ -мерной площадки, трансверсальной с Z_0 в ее точке пересечения с Z_0 и лежащей на поверхности F , выделяемой в пространстве R^{k+l} уравнением $f(x, y) = 0$; дополнительно предполагается, что сжато также отображение, полученное из φ линеаризацией.

б) В любой точке (x, y) участков u_1 и u_2 все собственные числа матрицы

$$\left\| \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\beta} \right\| = A$$

имеют отрицательные действительные части.

в) Точки срыва $s_1(x_1, y_1)$ и $s_2(x_2, y_2)$ имеют «общий тип», т. е. для каждой из этих точек все собственные числа матрицы A имеют отрицательные действительные части, кроме одного, которое обращается в нуль.

В настоящем параграфе будет вычислено с точностью до $O(\varepsilon)$ периодическое решение Z_ε невырожденной системы уравнений (1), близкое к Z_0 и стремящееся к Z_0 при $\varepsilon \rightarrow 0$. Одновременно с вычислением будет проведено и доказательство существования такого решения Z_ε .

Обозначим через Φ $(l-1)$ -мерную поверхность в R^{k+l} , выделяемую уравнениями

$$f^i(x^1, \dots, x^k, y^1, \dots, y^l) = 0, \quad i = 1, \dots, k,$$

(3.1)

$$\det \|A\| = 0.$$

Пусть S_1^* и S_2^* — касательные $(l-1)$ -мерные пространства к поверхности Φ соответственно в точках срыва s_1 и s_2 . Далее, пусть P_1^* и P_2^* — касательные l -мерные пространства к поверхности F соответственно в точках падения p_1 и p_2 . Мы будем трактовать их как векторные пространства с нулями соответственно в точках s_1, s_2, p_1, p_2 . Мы хотим определить некоторое линейное отображение M_1^* пространства S_1^* в пространство P_2^* и линейное отображение M_2^* пространства S_2^* в пространство P_1^* :

$$S_1^* \xrightarrow{M_1^*} P_2^*,$$

$$S_2^* \xrightarrow{M_2^*} P_1^*.$$

(3.2)

Отображение M_1^* строится следующим образом. Пусть t_1 — время перехода представляющей точки системы (2) по участку u_1 траектории Z_0 . Пусть $s_1 + \delta s_1$ — произвольная точка поверхности Φ , близкая к точке s_1 . Существует точка $p_2 + \delta p_2$ на поверхности F , близкая к p_2 и переходящая в $s_1 + \delta s_1$ за то же время t_1 по некоторой близкой к u_1 траектории $u_1(\delta s_1)$ системы уравнений (2). Таким образом, соответствие

$$s_1 + \delta s_1 \rightarrow p_2 + \delta p_2$$

дает нам отображение $(l-1)$ -мерной окрестности $V(s_1)$ точки s_1 в l -мерную окрестность $W(p_2)$ точки p_2 :

$$V(s_1) \rightarrow W(p_2). \quad (3.3)$$

Линеаризируя отображение (3.3), мы и получаем линейное отображение M_1^* векторного пространства S_1^* в векторное пространство P_2^* . Совершенно аналогично определяется отображение M_2^* .

Перенесем теперь параллельно пространства S_1^* , S_2^* , P_1^* , P_2^* так, чтобы их нули перешли в нуль пространства R^{k+l} , и затем спроектируем их все в направлении X в пространство Y . Тогда пространства P_1^* и P_2^* при этом проектировании π_x отобразятся на Y :

$$P_1^* \xrightarrow{\pi_x} Y, \quad (3.4)$$

$$P_2^* \xrightarrow{\pi_x} Y.$$

Действительно, вырождения произойти не может, так как пространства P_1^* и P_2^* не содержат направлений, параллельных пространству X , ибо $\det \|A\| \neq 0$ в точках p_1 и p_2 .

Далее, пространства S_1^* и S_2^* отобразятся также без вырождения, т. е. на $(l-1)$ -мерные подпространства S_1 и S_2 пространства Y :

$$S_1^* \xrightarrow{\pi_x} S_1, \quad (3.5)$$

$$S_2^* \xrightarrow{\pi_x} S_2.$$

Это следует из того, что в точках s_1 и s_2 лишь один характеристический корень матрицы $\|A\|$ обращается в нуль. Легко найти уравнения плоскостей S_1 и S_2 в пространстве Y . Найдем, например, уравнение плоскости S_1 . Для этого надо, очевидно, исключить переменные x^z из уравнений

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^\alpha} (x^z - x_1^z) + \frac{\partial f^i}{\partial y^\beta} (y^\beta - y_1^\beta) = 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad (3.6)$$

а затем заменить $(y^\beta - y_1^\beta)$ на y^β (напомним, что x_1^z , y_1^β — координаты точки срыва s_1). Пусть $n = (n_1, \dots, n_k)$ — собственный вектор матрицы, транспонированной к матрице $\left\| \frac{\partial f^i}{\partial x^\alpha} \right\|$, соответствующий нулевому собственному значению. Свертывая (3.6) с n_z , получаем:

$$n_\alpha B_\beta^\alpha (y^\beta - y_1^\beta) = 0, \quad (3.7)$$

где $B_\beta^\alpha = \frac{\partial f^\alpha(s_1)}{\partial y^\beta}$. Введем ковариантный вектор ${}_1w$ формулами:

$${}_1w = ({}_1w_1, \dots, {}_1w_e), \quad {}_1w_j = n_\alpha B_j^\alpha, \quad (3.8)$$

$${}_1w_\alpha \cdot g^\alpha(s_1) = 1.$$

Тогда получим «нормальное» уравнение плоскости S_1 в Y :

$${}_1w_\beta y^\beta = 0. \quad (3.9)$$

Аналогично получается уравнение плоскости S_2 :

$${}_2w_\beta y^\beta = 0. \quad (3.10)$$

Уравнения (3.9) и (3.10) понадобятся нам в дальнейшем.

Проектирование π_x пространств S_1^* , S_2^* , P_1^* , P_2^* и отображения M_1^* , M_2^* естественным образом порождают отображения M_1 и M_2 подпространств S_1 и S_2 в Y :

$$S_1 \xrightarrow{M_1} Y, \quad (3.11)$$

$$S_2 \xrightarrow{M_2} Y,$$

где $M_1 = \pi_x M_1^* \pi_x^{-1}$, $M_2 = \pi_x M_2^* \pi_x^{-1}$. Оба эти отображения мы продолжим в отображения, обозначаемые соответственно через N_1 и N_2 , пространства Y на себя. Для этого достаточно задать образ вектора

$$g(s_1) = (g^1(s_1), \dots, g^l(s_1))$$

при отображении N_1 и образ вектора

$$g(s_2) = (g^1(s_2), \dots, g^l(s_2))$$

при отображении N_2 *. Зададим эти образы следующими формулами:

$$N_1 g(s_1) = g(p_2), \quad (3.12)$$

$$N_2 g(s_2) = g(p_1).$$

Итак, построены отображения N_1 и N_2 пространства Y на себя:

$$Y \xrightarrow{N_1} Y, \quad (3.13)$$

$$Y \xrightarrow{N_2} Y.$$

На фактическом вычислении отображений N_1 и N_2 мы остановимся несколько позже.

Пользуясь отображениями N_1 и N_2 , определим следующим образом линейные отображения L_1 и L_2 пространства Y в себя:

* Трансверсальность вектора $g(s_1)$ к S_1^* есть некоторое условие невырожденности, и оно предполагается выполненным.

$$\begin{aligned} L_1 y &= N_1^{-1} y - ({}_1 w \cdot N_1^{-1} y) g(s_1), \\ L_2 y &= N_2^{-1} y - ({}_2 w \cdot N_2^{-1} y) g(s_2). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Отображение L_1 переводит Y на S_1 , а отображение L_2 переводит Y на S_2 :

$$\begin{aligned} Y &\xrightarrow{L_1} S_1, \\ Y &\xrightarrow{L_2} S_2. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Докажем это для L_1 (для L_2 доказательство аналогично). Мы имеем: $Y = Y_1 + Y_2$, где $Y_1 = N_1 S_1$, а Y_2 — одномерное подпространство, порожденное вектором $g(p_2)$. Если $y \in Y_1$, то $N_1^{-1} y \in S_1$, $({}_1 w \cdot N_1^{-1} y) = 0$ и $L_1 y \in S_1$. Если же $y \in Y_2$, то $y = \lambda g(p_2)$, $N_1^{-1} y = \lambda g(s_1)$ и, в силу (3.8), $L_1 y = 0$.

Построим теперь отображения Π_1 и Π_2 соответственно пространств S_1 и S_2 на себя как композиции отображений L_1 и L_2 :

$$\Pi_1 y = L_1 L_2 y, \quad S_1 \xrightarrow{\Pi_1} S_1, \quad (3.16)$$

$$\Pi_2 y = L_2 L_1 y, \quad S_2 \xrightarrow{\Pi_2} S_2.$$

Очевидно, отображения Π_1 и Π_2 индуцируются проекциями в Y линейных приближений отображений окрестностей $V(s_1)$, соответственно $V(s_2)$, в себя, порождаемых обходом по траекториям вырожденной системы уравнений (2). Единственной неподвижной точкой отображений (3.16) является вектор $y = 0$.

Введем в рассмотрение отображения Π_1^e и Π_2^e пространств S_1 и S_2 на себя с помощью формул:

$$\Pi_1^e y = L_1 [L_2 (y + \Delta_1) + \Delta_2], \quad (3.17)$$

$$\Pi_2^e y = L_2 [L_1 (y + \Delta_2) + \Delta_1],$$

где Δ_1 и Δ_2 — векторы смещения, соответствующие точкам срыва s_1 и s_2 (их приближенные величины с точностью до $O(\epsilon)$ даны в § 2, формулы (2.20)). Очевидно, что при $\epsilon \rightarrow 0$ $\Pi_1^e \rightarrow \Pi_1$ и $\Pi_2^e \rightarrow \Pi_2$.

Отображения Π_1^e и Π_2^e сконструированы пока чисто формально. Сейчас мы выясним связь этих отображений с периодическими решениями системы уравнений (1), близкими к решению Z_0 системы (2). Именно, мы докажем следующую теорему:

ТЕОРЕМА I. Пусть $\delta_1 \in S_1$ — неподвижный вектор отображения Π_1^e :

$$\delta_1 = L_1 [L_2 (\delta_1 + \Delta_1) + \Delta_2] \quad (3.18)$$

(такой вектор существует и является единственным в силу сжатости отображения $L_1 L_2$). Пусть $\delta_1 s_1$ — его прообраз в касательном пространстве S_1^* , а $s_1 + \delta s_1$ — точка окрестности $V(s_1) \in \Phi$, соответствующая вектору $\delta_1 s_1$ *. Обозначим через $u_1(\delta s_1)$ траекторию вырожденной системы

* Точка $s_1 + \delta s_1$ определяется вектором $\delta_1 s_1$ с точностью до величин второго порядка малости относительно $\delta_1 s_1$.

уравнений (2), проходящую вблизи u_1 , имеющую концом точку срыва $s_1 + \delta s_1$, а началом — точку $p_2 + \delta p_2$. Пусть, далее, $\tilde{u}_1(\delta s_1)$ — произвольный связный участок траектории $u_1(\delta s_1)$ с концом, отстоящим от точки срыва $s_1 + \delta s_1$ на конечном расстоянии, не зависящем от ε . Тогда существует периодическое решение Z_ε системы уравнений (1), содержащее участок $\tilde{u}_{1\varepsilon}$, который с точностью до $O(\varepsilon)$ совпадает с участком $\tilde{u}_1(\delta s_1)$. При $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет место сходимость $Z_\varepsilon \rightarrow Z_0$.

Аналогичную теорему можно сформулировать, если исходить из неподвижного вектора $\delta_2 \in S_2$ отображения Π_2^ε .

Существенным пунктом в доказательстве теоремы I является следующая лемма, представляющая и самостоятельный интерес.

ЛЕММА 1. Через $X_{y_0}^k$ будем обозначать k -мерную плоскость в фазовом пространстве R^{k+1} системы уравнений (1), состоящую из точек (x, y_0) , где y_0 — постоянный вектор. Пусть (x_0, y_0) — точка пересечения плоскости $X_{y_0}^k$ с поверхностью F , выделяемой в пространстве R^{k+1} уравнением $f(x, y) = 0$. Предположим, что в этой точке все собственные числа матрицы $\left\| \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\beta} \right\|$ имеют отрицательные действительные части. Возьмем два решения системы уравнений (1):

$$x = x_1(t), \quad y = y_1(t), \quad (\text{а})$$

$$x = x_2(t), \quad y = y_2(t), \quad (\text{б})$$

из которых первое проходит при $t = t_0$ через точку (x_0, y_0) , а второе при $t = t_0$ имеет начальную точку в плоскости $X_{y_0}^k$, отстоящую от точки (x_0, y_0) на достаточно малом, но конечном и не зависящем от ε расстоянии. Тогда существует такое $t' > t_0$, что при $t > t'$ решения (а) и (б) совпадают с точностью до $O(\varepsilon)$ на некотором конечном протяжении t :

$$x_1(t) - x_2(t) = O(\varepsilon),$$

$$y_1(t) - y_2(t) = O(\varepsilon).$$

При этом можно считать, что $|t' - t_0| \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Доказательство леммы 1. Точка (x_0, y_0) является точкой экспоненциально устойчивого равновесия для следующей системы уравнений:

$$\dot{x} = f(x, y_0). \quad (3.19)$$

Известно [см. (8)], что в этом случае существует положительно определенная квадратичная форма $W(u)$ от $u = x - x_0$ — функция Ляпунова, — производная от которой, в силу системы, получающейся линеаризацией из системы (3.19), удовлетворяет следующему неравенству:

$$\frac{\partial}{\partial u^i} [W(u)] \cdot \frac{\partial f^i(x_0, y_0)}{\partial x^j} \cdot u^j < -\alpha W(u), \quad (3.20)$$

где α — некоторая положительная константа. Положим

$$u(t) = x_2(t) - x_1(t),$$

$$v(t) = y_2(t) - y_1(t)$$

и вычислим производную функции $W(u(t))$ по t . Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [W(u)] &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial W}{\partial u^i} (x_2^i - x_1^i)'_{(1)} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial W}{\partial u^i} [f^i(x_2, y_2) - f^i(x_1, y_1)] = \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial W}{\partial u^i} [f^i(x_2, y_2) - f^i(x_1, y_2) + f^i(x_1, y_2) - f^i(x_1, y_1)] = \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial W}{\partial u^i} \left[\frac{\partial f^i}{\partial x^j} (x_2^j - x_1^j) + \frac{\partial f^i}{\partial y^j} (y_2^j - y_1^j) \right]. \end{aligned}$$

Учитывая неравенство (3.20), отсюда нетрудно вывести неравенство

$$\frac{d}{dt} [W(u)] < -\frac{1}{\varepsilon} \tilde{\alpha} W(u) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial W}{\partial u^i} \frac{\partial f^i}{\partial y^j} (y_2^j - y_1^j), \quad (3.21)$$

где $\tilde{\alpha} > 0$ — константа. Введем теперь нормы $\|u\|$ и $\|v\|$ векторов $u = x_2 - x_1$ и $v = y_2 - y_1$ по формулам

$$\|u\| = \sqrt{W(u)}, \quad \|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^l (y_2^i - y_1^i)^2}.$$

Дифференцируя равенство $\|u\|^2 = W(u)$ по t и используя (3.21), после небольших преобразований получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \|x_2 - x_1\| < -\frac{1}{\varepsilon} a \|x_2 - x_1\| + \frac{1}{\varepsilon} b \|y_2 - y_1\|, \quad (3.22)$$

где a и b — положительные константы. Вычислим производную $\|v\|'$. Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|v\| &= \frac{d}{dt} \sqrt{\sum (y_2^i - y_1^i)^2} = \frac{1}{\|v\|} \sum_{ij} (y_2^i - y_1^i) (y_2^j - y_1^j)' < \\ &< l \sum_j |y_2^j - y_1^j|', \end{aligned}$$

где l — некоторая положительная константа. Но

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (y_2^j - y_1^j) &= g^j(x_2, y_2) - g^j(x_1, y_2) + g^j(x_1, y_2) - g^j(x_1, y_1) = \\ &= \frac{\partial g^j}{\partial x^i} (x_2^i - x_1^i) + \frac{\partial g^j}{\partial y^i} (y_2^i - y_1^i). \end{aligned}$$

Отсюда сразу получаем неравенство, оценивающее $\|v\|'$:

$$\frac{d}{dt} \|v\| < c (\|u\| + \|v\|), \quad (3.23)$$

где c — положительная константа. Таким образом, если положить

$$\xi = \|u\|, \quad \eta = \|v\|, \quad (3.24)$$

то для ξ и η мы получим дифференциальные неравенства:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &< -\frac{1}{\varepsilon} a\xi + \frac{1}{\varepsilon} b\eta, \\ \frac{d\eta}{dt} &< c(\xi + \eta). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Здесь a, b, c — положительные константы, причем можно считать, что $b > a$.

Наряду с системой неравенств (3.25) рассмотрим систему дифференциальных уравнений, получающуюся, если в (3.25) знаки неравенств заменить знаками равенств:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= -\frac{1}{\varepsilon} a\xi + \frac{1}{\varepsilon} b\eta, \\ \frac{d\eta}{dt} &= c(\xi + \eta). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Мы сравним функции ξ и η , определяемые формулой (3.24), с решениями системы (3.26). Для этого рассмотрим треугольник OAB , стороны которого в плоскости (ξ, η) выражаются следующими уравнениями: $OA: \eta = 0$, $OB: -a\xi + b\eta = 0$; $AB: \eta + 2\varepsilon \frac{c}{a}(\xi - 1) = 0$.

Докажем, что через каждую точку стороны AB , имеющую абсциссу $\xi > \xi_0$, где ξ_0 — некоторое малое положительное число порядка $O(\varepsilon)$, траектории системы уравнений (3.26) входят внутрь треугольника OAB . Действительно, производная функции $\eta + 2\varepsilon \frac{c}{a}(\xi - 1)$, в силу системы (3.26), в любой точке прямой $\eta + 2\varepsilon \frac{c}{a}(\xi - 1) = 0$ будет

$$V(\xi) = \left\{ c(\xi + \eta) + 2\varepsilon \frac{c}{a} \left(-\frac{1}{\varepsilon} a\xi + \frac{1}{\varepsilon} b\eta \right) \right\}_{\eta = -2\varepsilon \frac{c}{a}(\xi - 1)}$$

Эта производная отрицательна для значений $\xi > \xi_0$, где ξ_0 находится из соотношения $V(\xi) = 0$; легко видеть, что величина ξ_0 имеет порядок $O(\varepsilon)$.

Пусть функции (3.24)

$$\xi = \xi(t), \quad \eta = \eta(t) \quad (3.27)$$

имеют начальные значения

$$\xi(t_0) = \|x_2(t_0) - x_1(t_0)\| = d, \quad \eta(t_0) = \|y_2(t_0) - y_1(t_0)\| = 0.$$

Точку $(d, 0)$ можно считать лежащей на основании треугольника OAB . Сравнивая «фазовые портреты» систем (3.25) и (3.26), легко усмотреть, что траектория (3.27) не выйдет из треугольника OAB до тех пор, пока ξ не уменьшится до значения ξ_0 , имеющего порядок $O(\varepsilon)$. Это значит, что до тех значений времени t , при которых норма $\|x_2(t) - x_1(t)\|$ станет величиной порядка $O(\varepsilon)$, норма $\|y_2(t) - y_1(t)\|$ возрастет не более чем на величину порядка $O(\varepsilon)$. После этого соотношения

$$\|x_2(t) - x_1(t)\| = O(\varepsilon), \quad \|y_2(t) - y_1(t)\| = O(\varepsilon)$$

сохранятся на некотором конечном промежутке времени t (а именно, до подхода решения $x = x_1(t)$, $y = y_1(t)$ к точке срыва). Таким образом, лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Время, необходимое для того, чтобы норма $\|x_2(t) - x_1(t)\|$ уменьшилась до значений порядка $O(\varepsilon)$, можно считать величиной, стремящейся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Более точную оценку можно

было бы получить из системы уравнений (3.26), но нам более точная оценка не нужна.

Доказательство теоремы I. Возьмем некоторую точку q на траектории $u_1(\delta s_1)$ так, чтобы ее расстояние до обоих концов участка $u_1(\delta s_1)$ было конечным, не зависящим от ε . Пусть $V^{l-1}(q)$ — некоторая малая (но конечных, не зависящих от ε размеров) $(l-1)$ -мерная площадка, лежащая на поверхности F , проходящая через q и в точке q линейно не зависящая с траекторией $u_1(\delta s_1)$. Пусть, далее, $W^k(q)$ — k -мерный малый (но конечного, не зависящего от ε размера) куб с осями, параллельными осям X пространства R^{k+l} , и с центром в точке q . Обозначим через $O^{k+l-1}(q)$ произведение $V^{l-1}(q) \times W^k(q)$.

Пусть u^ε — некоторая траектория системы уравнений (1) с начальной точкой $q^\varepsilon \in O^{k+l-1}(q)$, отстоящей на расстоянии порядка ε от точки q : $\rho(q, q^\varepsilon) = O(\varepsilon)$. Докажем прежде всего, что траектория u^ε вновь пересечет $O^{k+l-1}(q)$ в точке Q^ε , причем $\rho(q, Q^\varepsilon) = O(\varepsilon)$. В силу результатов, изложенных в § 2, траектория u^ε на некотором конечном своем протяжении пойдет вдоль участка $u_1(\delta s_1)$, отклоняясь от него на величины лишь порядка $O(\varepsilon)$. При подходе к точке срыва $s_1 + \delta s_1$ отклонение u^ε от $u_1(\delta s_1)$ будет сильнее (а именно величиной порядка $a\varepsilon^{\frac{2}{3}} + b\varepsilon \ln \varepsilon$).

Обозначим через $X_{s_1+\delta s_1}^k$ k -мерное подпространство пространства R^{k+l} , параллельное X^k и проходящее через точку срыва $s_1 + \delta s_1$. В подпространстве $X_{s_1+\delta s_1}^k$ лежит продолжение разрывного решения $u_1(\delta s_1)$ системы уравнений (2). В силу результатов, изложенных в § 2, траектория u^ε , обойдя точку срыва $s_1 + \delta s_1$, в дальнейшем пойдет с точностью до $O(\varepsilon)$ в некотором k -мерном подпространстве $y = \text{const}$ пространства R^{k+l} , смещенном относительно подпространства $X_{s_1+\delta s_1}^k$ на вектор $\Delta_1(s_1 + \delta s_1)$, где $\Delta_1(s_1 + \delta s_1)$ — вектор смещения, соответствующий точке срыва $s_1 + \delta s_1$. Так как вектор δ_1 имеет, как это следует из уравнения (3.18), величину порядка $\varepsilon^{\frac{2}{3}}$, то δs_1 также имеет величину порядка $\varepsilon^{\frac{2}{3}}$. Отсюда непосредственно вытекает, что

$$\Delta_1(s_1 + \delta s_1) = \Delta_1(s_1) + o(\varepsilon).$$

Поэтому можно считать, что продолжение траектории u^ε лежит, с точностью до величин порядка $O(\varepsilon)$, в подпространстве пространства R^{k+l} , которое мы обозначим через $X_{s_1+\delta s_1}^k[\Delta_1(s_1)]$ и которое получается из $X_{s_1+\delta s_1}^k$ параллельным смещением на вектор $\Delta_1(s_1)$.

Обозначим через $p_1 + \delta p_1$ точку пересечения плоскости $X_{s_1+\delta s_1}^k[\Delta_1(s_1)]$ с поверхностью F и проведем через точку $p_1 + \delta p_1$ траекторию вырожденной системы уравнений (2). Пусть эта траектория имеет точку срыва $s_2 + \delta s_2$, так что самое траекторию мы обозначим через $u_2(\delta s_2)$. Образ δs_2 в касательной плоскости S_2^* обозначим через δ_{1s_2} , а образ δ_{1s_2} в пространстве S_2 — через δ_2 . Нетрудно сообразить, что

$$\delta_2 = L_2(\delta_1 + \Delta_1(s_1)).$$

Из только что доказанной леммы 1 следует, что траектория u^ε после ухода с плоскости $X_{s_1+\delta s_1}^k[\Delta_1(s_1)]$ с точностью до $O(\varepsilon)$ совпадет на неко-

тором конечном протяжении с траекторией $u_2(\delta s_2)$. Это совпадение нарушится лишь вблизи точки срыва $s_2 + \delta s_2$: точку срыва $s_2 + \delta s_2$ траектория u^* обогнет, отклоняясь от нее на величины порядка $c\varepsilon^{\frac{2}{3}} + d\varepsilon \ln \varepsilon$. Затем, по описанной схеме, она вновь пойдет с точностью до $O(\varepsilon)$ вдоль участка $u_1(\delta s_3)$ некоторой разрывной траектории вырожденной системы уравнений (2). При этом из вышеприведенных рассуждений следует, что образом $\delta_1 s_3$ в пространстве S_1 будет вектор

$$L_1 \{L_2 [\delta_1 + \Delta_1(s_1)] + \Delta_2(s_2)\},$$

т. е. вектор δ_1 .

Теперь для завершения доказательства теоремы I остается лишь обнаружить, что среди траекторий u^* , поведение которых мы только что описали, есть замкнутая траектория Z_ε . Это будет доказано, если мы убедимся, что обход по траекториям системы уравнений (1) порождает отображение $(k+l-1)$ -мерной площадки $Q^{k+l-1}(q)$, построенной выше, в себя. Но этот факт непосредственно следует из только что проведенных рассуждений и из леммы 1, если учесть, что отображение $(l-1)$ -мерной площадки $V^{l-1}(q)$ в себя, порождаемое обходом по траекториям системы (2), сжато по предположению.

Доказанная теорема I решает задачу приближенного отыскания периодического решения Z_ε системы уравнений (1), близкого к некоторому известному разрывному периодическому решению Z_0 вырожденной системы уравнений (2). Все вычисления проводятся эффективно, если мы сможем эффективно вычислить линейные отображения L_1 и L_2 , определенные формулами (3.14). Но эти последние отображения эффективно определяются отображениями N_1 и N_2 . Сейчас мы кратко остановимся на вычислениях отображений N_1 и N_2 .

Пусть

$$x = x_0(t), \quad y = y_0(t) \quad (3.28)$$

— решение вырожденной системы уравнений (2), имеющее своей траекторией участок медленного движения u_1 (являющийся частью траектории Z_0). Пусть участок u_1 пробегается представляющей точкой (3.28), когда t меняется от $t = -t_1$ до $t = 0$. Проварьируем систему (2) вдоль решения (3.28), т. е. введем систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} f^i(x_0(t), y_0(t)) \delta x^\alpha + \frac{\partial}{\partial y^\beta} f^i(x_0(t), y_0(t)) \delta y^\beta &= 0, \quad i = 1, \dots, k, \\ \delta \dot{y}^j &= \frac{\partial}{\partial x^\alpha} g^j(x_0(t), y_0(t)) \delta x^\alpha + \frac{\partial}{\partial y^\beta} g^j(x_0(t), y_0(t)) \delta y^\beta, \quad j = 1, \dots, l. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Коэффициенты системы (3.29) определены при $-t_1 \leq t \leq 0$. На отрезке $-t_1 \leq t \leq -\rho_1$, где ρ_1 — малое, но не зависящее от ε положительное число, первые k соотношений (3.29) разрешим относительно δx^α :

$$\delta x^\alpha = \varphi_\beta^\alpha(t) \delta y^\beta, \quad \alpha = 1, \dots, k.$$

Подставляя затем эти выражения для δx^α в последние l соотношений (3.29), получаем систему линейных дифференциальных уравнений для определения δy^j :

$$\delta \dot{y}^j = \left[\frac{\partial g^j}{\partial x^\alpha} \cdot \varphi_\beta^\alpha(t) + \frac{\partial g^j}{\partial y^\beta} \right] \delta y^\beta, \quad j = 1, \dots, l. \quad (3.30)$$

Линейное отображение векторного пространства Y на себя, порождаемое переходом по траекториям системы (3.30) при изменении t от $t = -t_1$ до $t = -\rho_1$, обозначим через $d_{-t_1, -\rho_1}$.

В окрестности точки срыва s_1 систему уравнений (1) линейным преобразованием координат (см. § 2) можно привести к виду (2.5). В новых координатах ξ^i, η^j соответствующую системе (2.5) вырожденную систему кратко запишем так:

$$\begin{aligned} F^i(\xi^1, \dots, \xi^k, \eta^1, \dots, \eta^l) &= 0, \quad i = 1, \dots, k; \\ \dot{\eta}^j &= G^j(\xi^1, \dots, \xi^k, \eta^1, \dots, \eta^l), \quad j = 1, \dots, l. \end{aligned} \quad (3.31)$$

При $-\rho_1 \leq t \leq 0$ решение (3.28) запишем в координатах ξ и η :

$$\xi = \xi_0(t), \quad \eta = \eta_0(t). \quad (3.32)$$

Очевидно, функции (3.32) являются решением системы (3.31). Отправляясь от системы (3.31) и от функций (3.32), мы получим (аналогично тому, как это только что было сделано для δy^j) систему уравнений для $\delta \eta^j$:

$$\delta \dot{\eta}^j = \left[\frac{\partial G^j}{\partial \xi^\alpha} \cdot \Phi_\beta^\alpha(t) + \frac{\partial G^j}{\partial \eta^\beta} \right] \delta \eta^\beta, \quad j = 1, \dots, l. \quad (3.33)$$

Нетрудно подсчитать, что коэффициенты этой системы имеют при $t = 0$ особенности типа $\frac{1}{\sqrt{-t}}$; однако от них можно освободиться введением нового параметра $\tau = \sqrt{-t}$. Поэтому систему (3.33) можно решить на участке $-\rho_1 \leq t \leq 0$, и аналогично тому, как было определено отображение $d_{-t_1, -\rho_1}$, можно определить линейное отображение $D_{-\rho_1, 0}$. Нетрудно сообразить, что

$$N_1 = [D_{-\rho_1, 0}(d_{-t_1, -\rho_1})]^{-1}.$$

Аналогично вычисляется отображение N_2 .

§ 4. Вычисление периода решения Z_ϵ

В предыдущем параграфе было доказано, что вблизи каждого разрывного периодического решения Z_0 вырожденной системы уравнений (2) существует периодическое решение Z_ϵ системы уравнений (1), стремящееся к Z_0 при $\epsilon \rightarrow 0$. Решение Z_ϵ было вычислено с точностью до величин порядка $O(\epsilon)$. Здесь будет получена асимптотическая формула для периода решения Z_ϵ .

Для определенности будем считать, что разрывное периодическое решение Z_0 системы (2) состоит из двух участков медленных движений $u_1 = (p_2, s_1)$, $u_2 = (p_1, s_2)$, двух участков быстрых движений $v_1 = (s_1, p_1)$, $v_2 = (s_2, p_2)$, причем $s_1(x_1, y_1)$ и $s_2(x_2, y_2)$ — точки срыва (см. рис. 4). Пусть на прохождение участка u_1 представляющая точка системы (2) затрачивает время T_{10} , на прохождение участка u_2 — время T_{20} , так что период решения Z_0 будет

$$T_0 = T_{10} + T_{20}. \quad (4.1)$$

Наряду с участками u_1 и u_2 рассмотрим участки траектории системы (2)

$$u_1(\delta s_1) = (p_2 + \delta p_2, s_1 + \delta s_1), \quad u_2(\delta s_2) = (p_1 + \delta p_1, s_2 + \delta s_2),$$

расположенные вблизи участков u_1 , соответственно u_2 , и имеющие точками срыва точки $s_1 + \delta s_1$, $s_2 + \delta s_2$, где смещения δs_1 и δs_2 определяются теоремой I предыдущего параграфа. При этом начальные точки $p_2 + \delta p_2$, $p_1 + \delta p_1$ участков $u_1(\delta s_1)$, $u_2(\delta s_2)$ выбраны так, чтобы время прохождения представляющей точки системы (2) по траектории $u_1(\delta s_1)$ было равно T_{10} , а по траектории $u_2(\delta s_2) - T_{20}$. Подчеркнем особо, что величины δs_1 и δs_2 суть величины порядка $O(\varepsilon^{\frac{2}{3}})$. «Урежем» теперь участки $u_1(\delta s_1)$ и $u_2(\delta s_2)$, т. е. введем вместо них их части $\tilde{u}_1(\delta s_1) = (\tilde{p}_2, \tilde{s}_1)$ и $\tilde{u}_2(\delta s_2) = (\tilde{p}_1, \tilde{s}_2)$, у которых начальные и конечные точки $\tilde{p}_2, \tilde{s}_1, \tilde{p}_1, \tilde{s}_2$ отстоят соответственно от начальных и конечных точек участков $u_1(\delta s_1)$, $u_2(\delta s_2)$ на малом, но конечном, не зависящем от ε расстоянии. Пусть участок $\tilde{u}_1(\delta s_1)$ представляется решением

$$\begin{aligned} x^i &= x_0^i(t), \quad i = 1, \dots, k, \\ y^j &= y_0^j(t), \quad j = 1, \dots, l, \end{aligned} \quad (4.2)$$

системы (2), когда t пробегает отрезок $t_1 \leq t \leq t_2$, так что время прохождения вдоль $\tilde{u}_1(\delta s_1)$ представляющей точки системы (2) будет $(t_2 - t_1)$. Из теоремы I предыдущего параграфа следует, что траектория Z_ε содержит участок решения системы (1), представляющийся при $t_1 \leq t \leq t_2$ в виде

$$\begin{aligned} x^i &= x_0^i(t) + x_1^i(t, \varepsilon), \\ y^j &= y_0^j(t) + y_1^j(t, \varepsilon), \end{aligned} \quad (4.3)$$

где $x_1^i(t, \varepsilon)$ и $y_1^j(t, \varepsilon)$ имеют порядок $O(\varepsilon)$. Обозначим траекторию решения (4.3) через $Z_\varepsilon[\tilde{u}_1(\delta s_1)]$. Очевидно, время прохождения по этой траектории будет равно $[t_2 - t_1 + O(\varepsilon)]$.

Обозначим через $Z_\varepsilon[s_1 + \delta s_1]$ некоторый непосредственно следующий за $Z_\varepsilon[\tilde{u}_1(\delta s_1)]$ участок цикла Z_ε , имеющий небольшую, но конечную, не зависящую от ε длину. Как отмечалось в § 2, в окрестности точки срыва $s_1 + \delta s_1$ систему (1) можно привести линейным преобразованием координат к виду (2.5). Вдоль траектории $Z_\varepsilon[s_1 + \delta s_1]$ можно принять за независимую переменную величину ξ^1 и решение $Z_\varepsilon[s_1 + \delta s_1]$ представить в виде:

$$\begin{aligned} \xi^i &= \xi^i(\xi^1, \varepsilon), \quad i = 2, \dots, k; \\ \eta^j &= \eta^j(\xi^1, \varepsilon), \quad j = 1, \dots, l, \end{aligned} \quad (4.4)$$

когда ξ^1 пробегает отрезок $-p \leq \xi^1 \leq p$. Выражения для функций $\xi^i(\xi^1, \varepsilon)$, $\eta^j(\xi^1, \varepsilon)$ даны в § 2. Сами функции (3.4) есть решения системы уравнений (2.6).

Разобьем отрезок $-p \leq \xi^1 \leq p$ точками $\xi^1 = -\sigma_1$, $\xi^1 = 0$, $\xi^1 = \sigma_2$ ($\sigma_1 = \varepsilon^{\frac{2}{7}}$, $\sigma_2 = \varepsilon^{\frac{2}{9}}$) на четыре части: $(-p, -\sigma_1)$, $(-\sigma_1, 0)$, $(0, \sigma_2)$, (σ_2, p) . Время $T_{-p, p}$ прохождения по участку $Z_\varepsilon[s_1 + \delta s_1]$, очевидно, будет

$$T_{-p, p} = T_{-p, -\sigma_1} + T_{-\sigma_1, 0} + T_{0, \sigma_2} + T_{\sigma_2, p}. \quad (4.5)$$

Произведем расчет этого времени. При этом мы будем исходить из формулы

$$T_{-p, p} = \int_{-p}^p [\eta^1(\xi^1)]' \delta(\xi^1, \xi^\alpha(\xi^1, \varepsilon), \eta^\beta(\xi^1, \varepsilon)) d\xi^1, \quad (4.6)$$

где $\xi^\alpha(\xi^1, \varepsilon)$, $\eta^\beta(\xi^1, \varepsilon)$ взяты из соотношений (4.4), а

$$\delta(\xi^1, \xi^\alpha, \eta^\beta) = \frac{1}{\psi^1(\xi^1, \dots, \xi^k, \eta^1, \dots, \eta^l)} \quad (4.7)$$

[см. (2.5)]. На участке $-p \leq \xi^1 \leq -\sigma_1$

$$\left. \begin{aligned} \xi^\alpha(\xi^1, \varepsilon) &= \xi_0^\alpha(\xi^1) + \varepsilon \xi_1^\alpha(\xi^1) + \varepsilon^2 \frac{Q_i}{(\xi^1)^4} + O(\varepsilon), \quad \alpha = 2, \dots, k, \\ \eta^1(\xi^1, \varepsilon) &= \eta_0^1(\xi^1) + \varepsilon \eta_1^1(\xi^1) + \varepsilon^2 \frac{-1}{8(\xi^1)^4} + O(\varepsilon), \\ \eta^\beta(\xi^1, \varepsilon) &= \eta_0^\beta(\xi^1) + \varepsilon \eta_1^\beta(\xi^1) + O(\varepsilon), \quad \beta = 2, \dots, l. \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

Подставляя функции (4.8) в формулу (4.6), производя затем разложения и учитывая конкретный вид функций $\xi_1^\alpha(\xi^1)$, $\eta_1^\beta(\xi^1)$, получим:

$$\begin{aligned} T_{-p, -\sigma_1} &= \int_{-p}^{-\sigma_1} (\eta_0^1(\xi^1))' \delta(\xi^1, \xi_0^\alpha, \eta_0^\beta) d\xi^1 + \\ &+ \varepsilon \int_{-p}^{-\sigma_1} \left[\eta_1^1(\xi^1) - \varepsilon \frac{1}{8(\xi^1)^4} \right]' \delta(\xi^1, \xi_0^\alpha, \eta_0^\beta) d\xi^1 + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Обозначим для краткости первый интеграл в сумме (3.9) через $T_{-p, -\sigma_1}^0$. Теперь вспомним, что

$$\begin{aligned} \eta_1^1(\xi^1) &= -\frac{1}{2\xi^1} - \frac{1}{2} \alpha_1^\beta b_{\beta'}^1 \ln |\xi^1| + O(1)_{\xi^1 \rightarrow 0}, \\ \delta(\xi^1, \xi_0^\alpha(\xi^1), \eta_0^\beta(\xi^1)) &= 1 - \alpha_1^1 \xi^1 + O((\xi^1)^2)_{\xi^1 \rightarrow 0}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Воспользовавшись формулами (4.10), без труда вычислим и второй интеграл в сумме (4.9). Таким образом, получим:

$$T_{-p, -\sigma_1} = T_{-p, -\sigma_1}^0 + \varepsilon \left[\frac{1}{2\sigma_1} - \left(\frac{1}{2} \alpha_1^\beta b_{\beta'}^1 + \alpha_1^1 \right) \ln \sigma_1 \right] - \frac{\varepsilon^2}{8(\sigma_1)^4} + O(\varepsilon). \quad (4.11)$$

Вычислим $T_{-\sigma_1, 0}$. Для этого на участке $(-\sigma_1, 0)$ перейдем к координатам u^α , v^β путем замены:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \mu^3, \quad \xi^1 = \mu u^1, \quad \xi^i = \mu^2 u^i \quad (i = 2, \dots, k), \\ \eta^1 &= \mu^2 v^1, \quad \eta^j = \mu^3 v^j \quad (j = 2, \dots, l), \quad t = \mu^2 \tau. \end{aligned}$$

При этом система уравнений (2.5) примет вид (2.9), а участок $(-\sigma_1, 0)$ перейдет в участок $-\omega_1 \leq u^1 \leq 0$, где $\omega_1 = \frac{\sigma_1}{\mu}$. Теперь, очевидно, будет:

$$T_{-\sigma_1, 0} = \mu^2 \int_{-\omega_1}^0 \frac{dv^1}{du^1} \frac{1}{\Phi^1(u^1, \dots, u^k, v^1, \dots, v^l, \mu)} du^1, \quad (4.12)$$

где $u^i(u^1)$, $v^j(u^1)$ взяты из соотношений (2.11) с учетом формул (2.17), а

$$\frac{1}{\Phi^1(u^1, u^2(u^1), \dots, v^1(u^1), \dots, v'(u^1)\mu)} = 1 - \mu\alpha_1^1 u^1 + \mu^2 B \cdot (u^1)^2 + \dots$$

[см. (2.9)]. Производя разложение подынтегрального выражения, после небольших вычислений найдем:

$$T_{-\sigma_1, 0} = \mu^2 \int_{-\omega_1}^0 (v_0^1 + \mu v_1^1)' (1 - \mu\alpha_1^1 u^1) du^1 + O(\varepsilon), \quad (4.13)$$

где [см. (2.17)]:

$$\begin{aligned} v_0^1(u^1) &= -(u^1)^2 + z_0(u^1), \quad z_0(u^1) = -\frac{1}{2u^1} - \frac{1}{8(u^1)^4} + O\left(\frac{1}{(u^1)^7}\right), \\ v_1^1(u^1) &= \left[\frac{2}{3} \alpha_1^{\beta'} b_{\beta'}^1 + c_1^1 - d_1^1 - e_{\alpha'}^1 \theta^{\alpha'}\right] (u^1)^3 - \\ &\quad - \frac{1}{2} b_{\beta'}^1 \alpha_1^{\beta'} \ln |u^1| - \frac{1}{2} b_{\beta'}^1 \alpha_1^{\beta'} \ln \mu + O(1). \end{aligned}$$

Вычисление интеграла, стоящего в правой части формулы (4.13), несколько громоздко. Прежде всего перепишем $T_{-\sigma_1, 0}$ так:

$$\begin{aligned} T_{-\sigma_1, 0} &= \mu^2 \int_{-\omega_1}^0 [- (u^1)^2 + z_0(u^1) + \mu v_1^1(u^1) + A \mu \cdot (u^1)^3 - \\ &\quad - A \cdot \mu \cdot (u^1)^3]' (1 - \mu\alpha_1^1 u^1) du^1 + O(\varepsilon), \end{aligned} \quad (4.14)$$

где для краткости мы положили

$$A = \frac{2}{3} \alpha_1^{\beta'} b_{\beta'}^1 + c_1^1 - d_1^1 - e_{\alpha'}^1 \theta^{\alpha'}. \quad (4.15)$$

Правую часть соотношения (4.14) разобьем на слагаемые следующим образом:

$$\begin{aligned} T_{-\sigma_1, 0} &= \mu^2 \int_{-\omega_1}^0 [- (u^1)^2 + \mu A \cdot (u^1)^3]' (1 - \mu\alpha_1^1 u^1) du^1 + \\ &\quad + \mu^2 \int_{-\omega_1}^0 (z_0'(u^1) (1 - \mu\alpha_1^1 u^1) du^1 + \\ &\quad + \mu^3 \int_{-\omega_1}^0 (v_1^1 - A \cdot (u^1)^3)' (1 - \mu\alpha_1^1 u^1) du^1 + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (4.16)$$

В первом интеграле перейдем к переменному ξ^1 , последнее слагаемое проинтегрируем по частям, а затем отнесем в остаточный член $O(\varepsilon)$ слагаемые, имеющие порядок μ^3 или выше. Получим:

$$\begin{aligned} T_{-\sigma_1, 0} &= \int_{-\sigma_1}^0 [- (\xi^1)^2 + A (\xi^1)^3]' (1 - \alpha_1^1 \xi^1) d\xi^1 + \mu^2 \int_{-\omega_1}^0 z_0'(u^1) du^1 - \\ &\quad - \mu^3 \alpha_1^1 \int_{-\omega_1}^0 z_0'(u^1) u^1 du^1 + [\mu^3 (v_1^1 - A (u^1)^3)]_{-\omega_1}^0 + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Но, очевидно,

$$\int_{-\omega_1}^0 z'_0(u^1) du^1 = z_0(0) - \frac{\mu}{2\sigma_1} + \frac{\mu^4}{8(\sigma_1)^4} + o(\mu). \quad (4.18)$$

Далее, вводя функцию $\Delta(u)$, равную нулю при $-1 < u^1 \leq 0$ и единице при $u^1 \leq -1$, и учитывая асимптотическое разложение

$$z_0(u^1)^- = -\frac{1}{2u^1} + O\left(\frac{1}{(u^1)^3}\right),$$

получим:

$$\begin{aligned} \int_{-\omega_1}^0 z'_0(u^1) u^1 du^1 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \left[2z'_0(u^1) u^1 - \frac{\Delta(u^1)}{u^1} \right] du^1 - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{-\omega_1} \left[2z'_0(u^1) u^1 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\Delta(u^1)}{u^1} \right] du^1 + \frac{1}{2} \int_{-\omega_1}^0 \frac{\Delta(u^1)}{u^1} du^1 = \frac{1}{2} \ln \mu - \frac{1}{2} \ln \sigma_1 + O(1). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Наконец, пользуясь (4.13) и учитывая (4.15), нетрудно подсчитать, что

$$[v_1^1(u^1) - A(u^1)^3] \Big|_{-\omega_1}^0 = -\frac{1}{2} b_{\beta'}^1 \alpha_1^{\beta'} \ln \sigma_1 - \frac{1}{2} b_{\beta'}^1 \alpha_1^{\beta'} \ln \mu + O(1). \quad (4.20)$$

Подставляя (4.18), (4.19), (4.20) в формулу (4.17), получим окончательное выражение для $T_{-\sigma_1, 0}$:

$$\begin{aligned} T_{-\sigma_1, 0} &= \int_{-\sigma_1}^0 [-(\xi^1)^2 + A(\xi^1)^3]' (1 - \alpha_1^1 \xi^1) d\xi^1 + \mu^2 z_0(0) - \frac{\varepsilon}{2\sigma_1} + \frac{\varepsilon^2}{8(\sigma_1)^4} - \\ &\quad - \mu^3 \ln \mu \left[\frac{1}{2} (\alpha_1^1 + \alpha_1^{\beta'} b_{\beta'}^1) \right] + \mu^3 \ln \sigma_1 \left[\frac{1}{2} (\alpha_1^1 + \alpha_1^{\beta'} b_{\beta'}^1) \right] + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Складывая $T_{-p, -\sigma_1}$ [см. (4.11) и (4.21)], получим формулу для $T_{-p, 0}$:

$$T_{-p, 0} = T_{-p, 0}^0 + \varepsilon^{\frac{2}{3}} z_0(0) + \varepsilon \ln \varepsilon \left[-\frac{1}{6} Q \right] + O(\varepsilon). \quad (4.22)$$

Здесь $Q = \alpha_1^1 + \alpha_1^{\beta'} b_{\beta'}^1$ (инвариантное выражение для Q указано в конце § 2 [см. (2.23)]). В формуле (4.22) через $T_{-p, 0}^0$ обозначено время, затрачиваемое представляющей точкой системы (2) на прохождение участка $(s_1', s_1 + \delta s_1)$ траектории $u_1(\delta s_1)$.

Вычислим теперь T_{0, σ_2} . Имеем:

$$T_{0, \sigma_2} = \mu^2 \int_0^{\omega_2} [(v_0^1 + \mu v_1^1)]' (1 - \alpha_1^1 \mu u^1) du^1 + O(\varepsilon), \quad (4.23)$$

где при больших положительных значениях u^1 функции v_0^1, v_1^1 имеют следующие асимптотические разложения [см. (2.17)]:

$$v_0^1(u^1)^+ = \Omega - \frac{1}{u^1} + O\left(\frac{1}{(u^1)^3}\right),$$

$$v_1^1(u^1)^+ = (\alpha_1^1 - d_1^1 - e_{\alpha'}^1 B_0^{\alpha'}) \ln u^1 - \frac{1}{2} b_{\beta'}^1 \alpha_1^{\beta'} \ln \mu + O(1).$$

Относя в формуле (4.23) все члены порядка μ^3 и $o(\mu^3)$ в остаточный член $O(\varepsilon)$, перепишем (4.23) так:

$$T_{0, \sigma_2} = \mu^2 \int_0^{\omega_1} (v_0^1)' du^1 - \mu^3 \alpha_1^1 \int_0^{\omega_2} (v_0^1)' u^1 du^1 + \mu^3 \int_0^{\omega_2} (v_1^1)' du^1 + O(\varepsilon). \quad (4.24)$$

Далее, небольшие вычисления дают:

$$\int_0^{\omega_2} (v_0^1)' du^1 = v_0^1(\infty) - v_0^1(0) - \frac{\mu}{\sigma_2} + o(\mu) = \Omega - z_0(0) - \frac{\mu}{\sigma_2} + o(\mu), \quad (4.25)$$

$$\int_0^{\omega_2} (v_0^1)' u^1 du^1 = \int_0^{\infty} \left[(v_0^1)' \cdot u^1 - \frac{\Delta(u^1)}{u^1} \right] du^1 - \ln \mu + \ln \sigma_2 + o(1), \quad (4.26)$$

$$\int_0^{\omega_2} (v_1^1)' du^1 = (\alpha_1^1 - d_1^1 - e_{\alpha'}^1 B_0^{\alpha'}) \ln \sigma_2 - (\alpha_1^1 - d_1^1 - e_{\alpha'}^1 B_0^{\alpha'}) \ln \mu + O(1). \quad (4.27)$$

Таким образом, окончательно:

$$T_{0, \sigma_2} = \mu^2 \Omega + \mu^2 z_0(0) - \frac{\mu^3}{\sigma_2^2} + \mu^3 \ln \sigma_2 (-d_1^1 - e_{\alpha'}^1 B_0^{\alpha'}) + \mu^3 \ln \mu (d_1^1 + e_{\alpha'}^1 B_0^{\alpha'}) + O(\varepsilon). \quad (4.28)$$

Теперь остается вычислить $T_{\sigma_2, p}$. Подставляя в формулу

$$T_{\sigma_2, p} = \int_{\sigma_2}^p (\gamma_1^1)' \frac{1}{\psi^1(\xi^1, \dots, \xi^k, \eta^1, \dots, \eta^l)} d\xi^1 \quad (4.29)$$

значения для $\xi^\alpha(\xi^1)$, $\eta^\beta(\xi^1)$ из (2.19), после легких вычислений получим:

$$T_{\sigma_2, p} = \frac{\mu^3}{\sigma_2} + \mu^3 \ln \sigma_2 (d_1^1 + e_{\alpha'}^1 B_0^{\alpha'}) + O(\varepsilon). \quad (4.30)$$

Складывая (4.30), (4.28) и (4.22), получим окончательную формулу для $T_{-p, p}$:

$$T_{-p, p} = T_{-p, 0}^0 + \varepsilon^{\frac{2}{3}} \Omega + \varepsilon \ln \varepsilon \left[-\frac{1}{6} Q + \frac{1}{3} d + \frac{1}{3} k \right] + O(\varepsilon). \quad (4.31)$$

Число Ω не зависит от системы уравнений (1). Оно определено формулой $\Omega = v_0^1(\infty)$. Инвариантные выражения для величин Q, d, k были указаны в § 2 [см. формулы (2.22), (2.23), (2.24)]. Эти коэффициенты зависят от значений правых частей уравнений (1) и их нескольких производных в точке срыва $s_1 + \delta s_1$. Но с точностью до $o(\varepsilon)$ выражение для $T_{-p, p}$ останется тем же, если вместо Q, d, k , соответствующих точке $s_1 + \delta s_1$, взять величины, соответствующие точке срыва s_1 ; мы снабдим эти коэффициенты индексом 1: Q_1, d_1, k_1 .

Итак, получено выражение для времени $T_{-p, p}^1$, затрачиваемого представляющей точкой системы уравнений (1) на прохождение участка $Z_\varepsilon[s_1 + \delta s_1]$:

$$T_{-p, p}^1 = T_{-p, 0}^{1,0} + \varepsilon^{\frac{2}{3}} \Omega + \frac{1}{6} \varepsilon \ln \varepsilon [-Q_1 + 2d_1 + 2k_1] + O(\varepsilon). \quad (4.32)$$

Напомним еще раз, что $T_{-p, 0}^{1,0}$ — время, затрачиваемое представляющей точкой системы (2) на прохождение участка $(s_1', s_1 + \delta s_1)$ траектории $u_1(\delta s_1)$.

Аналогичные вычисления можно провести и для участка $Z_\varepsilon[s_2 + \delta s_2]$ цикла Z_ε и получить для времени, затрачиваемого на его прохождение, формулу:

$$T_{-p, p}^2 = T_{-p, 0}^{2,0} + \varepsilon^{\frac{2}{3}} \Omega + \frac{1}{6} \varepsilon \ln \varepsilon [-Q_2 + 2d_2 + 2k_1] + O(\varepsilon). \quad (4.33)$$

Возьмем теперь участок траектории Z_ϵ , непосредственно примыкающий к участку $Z_\epsilon[s_1 + \delta s_1]$, лежащий с точностью до $O(\epsilon)$ в плоскости $X_{s_1+\delta s_1}^k[\Delta(s_1)]$ и кончающийся в некоторой точке D на небольшом, но конечном, не зависящем от ϵ расстоянии от точки пересечения плоскости $X_{s_1+\delta s_1}^k[\Delta(\tilde{s}_1)]$ с поверхностью F . Легко убедиться, что на прохождение этого участка представляющая точка системы (1) затрачивает лишь время порядка $O(\epsilon)$.

Участок траектории Z_ϵ небольшой конечной длины, начинающийся в точке D и кончающийся в некоторой точке E , обозначим через $Z_\epsilon[D, E]$. Лемма 1 предыдущего параграфа позволяет взять точку E [с точностью до $O(\epsilon)$] на траектории $u_2(\delta s_2)$ (которая составляет один из участков медленного движения разрывного цикла Z_0). Возьмем теперь траекторию вырожденной системы (2), начинающуюся в точке D' пересечения плоскости $X_{s_1+\delta s_1}^k[\Delta(s_1)]$ с поверхностью F и рассмотрим участок этой траектории $u_2(D', E)$ с началом в точке D' и с концом в точке E . Участок $u_2(D, E)$ можно считать частью траектории $u_2(\delta s_2)$ (или ее продолжения $\tilde{u}_2(\delta s_2)$ на поверхности F). По лемме 1 предыдущего параграфа, на прохождение участков $Z_\epsilon[D, E]$ и $u_2(D', E)$ нужно одинаковое время [с точностью до $O(\epsilon)$].

Вычислим в первую очередь время τ_1 , необходимое на прохождение участка $u_2(D', p_1 + \delta p_1)$ траектории $\tilde{u}_2(\delta s_2)$, где $p_1 + \delta p_1$ есть образ при отображении M_2^* (см. § 3) точки $s_2 + \delta s_2$. Это время может быть как положительным, так и отрицательным. Нетрудно сообразить, что оно равно (с точностью до величины порядка $O(\epsilon)$) времени, затрачиваемому точкой $\delta_1 + \Delta(s_1)$ пространства Y на переход в плоскость $N_2^{-1}S_2$ при движении с постоянной скоростью $g(p_1)$. Плоскость S_2 определяется в пространстве Y ковариантным вектором ${}_2w = ({}_2w_1, \dots, {}_2w_l)$, соответствующим точке срыва s_2 . Координаты этого вектора мы вычислили раньше [см. формулы (3.8) и (3.10)]. Легко проверить, что образ плоскости S_2 при отображении N_2^{-1} определяется ковариантным вектором ${}_2w' = ({}_2w'_1, \dots, {}_2w'_l)$, координаты которого связаны с координатами ${}_2w_j$ формулами

$${}_2w'_\alpha = n_{\alpha 2}^\beta {}_2w_\beta, \quad (4.34)$$

где числа $n_{\alpha 2}^\beta$ определены матрицей преобразования $N_2^{-1}: \|n_{\alpha 2}^\beta\| = \|N_2^{-1}\|$. Элементарный расчет показывает, что

$$\tau_1 = \frac{{}_2w' \cdot (\delta_1 + \Delta(s_1))}{{}_2w' \cdot g(p_1)} + O(\epsilon). \quad (4.35)$$

Но

$${}_2w' \cdot g(p_1) = {}_2w N_2^{-1} g(p_1) = {}_2w \cdot g(s_2) = 1$$

и

$${}_2w' \cdot (\delta_1 + \Delta(s_1)) = {}_2w \cdot N_2^{-1} (\delta_1 + \Delta(s_1)).$$

Поэтому окончательно

$$\tau_1 = {}_2w \cdot N_2^{-1} (\delta_1 + \Delta(s_1)) + O(\epsilon). \quad (4.36)$$

Аналогичный участок траектории можно рассмотреть в окрестности точки падения p_2 и получить для времени τ_2 , затрачиваемого на его прохождение, формулу:

$$\tau_2 = {}_1w \cdot N_1^{-1} (\delta_2 + \Delta(s_2)) + O(\varepsilon). \quad (4.37)$$

Принимая во внимание формулы (4.32), (4.33), (4.36), (4.37) и производя небольшое геометрическое рассмотрение, получим без большого труда окончательную формулу для периода T_ε цикла Z_ε :

$$T_\varepsilon = T_0 + \Delta T_\varepsilon^1 + \Delta T_\varepsilon^2, \quad (4.38)$$

где T_0 — период цикла Z_0 , а ΔT_ε^1 и ΔT_ε^2 имеют следующие выражения:

$$\begin{aligned} \Delta T_\varepsilon^1 &= \varepsilon^{\frac{2}{3}} \Omega + \varepsilon \ln \varepsilon \left[\frac{1}{6} (-Q_1 + 2d_1 + 2k_1) \right] + \tau_1 + O(\varepsilon), \\ \Delta T_\varepsilon^2 &= \varepsilon^{\frac{2}{3}} \Omega + \varepsilon \ln \varepsilon \left[\frac{1}{6} (-Q_2 + 2d_2 + 2k_2) \right] + \tau_2 + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Входящие в эти выражения величины Q_i , d_i , k_i , Ω , δ_i ($i = 1, 2$) зависят лишь от значений функций f^i и g^i в точках s_1 , p_1 , s_2 , p_2 . Их эффективные выражения даны в § 2 [см. (2.20), (2.22), (2.23)] и в § 3 [см. (3.18)]. Таким образом, формулы (4.38) и (4.39) позволяют вычислить период цикла Z_ε , не решая системы уравнений (1).

Математический институт
им. В. А. Стеклова Ак. наук СССР

Поступило
9.V.1957

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Андронов А. А., Хайкин С. Э., Теория колебаний, М.—Л., ОНТИ, 1937.
- ² Железцов Н. А., Родыгин Л. В., К теории симметричного мультивибратора, Доклады Ак. наук СССР, 81, № 3 (1951), 391—392.
- ³ Дородницын А. А., Асимптотическое решение уравнения Ван дер Поля, Прикладн. математика и механика, 11 (1947), 313—328.
- ⁴ Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С., Периодические решения систем дифференциальных уравнений, близкие к разрывным, Доклады Ак. наук СССР, 102, № 5 (1955), 889—891.
- ⁵ Понтрягин Л. С., Асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 21 (1957), 605—626.
- ⁶ Тихонов А. Н., Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных, Матем. сборн., 31(73):3(1952), 574—586.
- ⁷ Васильева А. Б., О дифференциальных уравнениях, содержащих малые параметры, Матем. сборн., 31(73):3(1952), 587—644.
- ⁸ Понтрягин Л. С., Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям Изд. МГУ, 1955.

А. А. КИСЕЛЕВ и О. А. ЛАДЫЖЕНСКАЯ

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ *

(Представлено академиком В. И. Смирновым)

В работе исследуются краевая задача для нестационарных нелинейных уравнений вязкой несжимаемой жидкости (задача (1)) и близкая ей задача (2). Даются новые, отличные от классических и ранее предложенных постановки этих задач. Доказываются соответствующие им теоремы существования и единственности. Устанавливаются априорные оценки решений этих задач и исследуются их дифференциальные свойства.

В настоящей работе исследуется задача о движении вязкой несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \nu \Delta \vec{v} + \sum_{k=1}^3 v_k \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k} = -\text{grad } p + \vec{f}(x, t),$$

$$\text{div } \vec{v} = 0, \quad \vec{v}|_S = 0, \quad \vec{v}|_{t=0} = \vec{a}$$
(1)

и первая краевая задача для системы

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \nu \Delta \vec{v} + \sum_{k=1}^3 v_k \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k} = \vec{f}(x, t),$$

$$\vec{v}|_S = 0, \quad \vec{v}|_{t=0} = \vec{a}$$
(2)

в ограниченной области Ω изменения $x = (x_1, x_2, x_3)$ с неподвижной границей S .

Методы исследования, данные в работе, применимы и к несколько более общему случаю, когда в системы введены члены, линейно зависящие от вектора \vec{v} и его первых производных по x_k . Так как учет этих членов не представляет никакого труда и лишь загромождает оценки несущественными слагаемыми, то мы эти члены в работе не рассматриваем. Случай бесконечной области Ω допускает близкие рассмотрения.

Задаче (1) посвящена большая литература, из которой мы отметим работы I. Leray'я (3) — (5) и E. Hopf'a (6). Трудности на пути отыскания классического решения задачи (1) и опасения, что может быть эта задача и не имеет в «большом» такого решения, заставили искать другие «обоб-

* В настоящей работе дается полное доказательство утверждений, опубликованных в работе (1), и вывод априорных оценок для задач (1) и (2), полученных Ладыженской, на которых базировались работы (1) и (2).

ценные постановки задачи (1)». Это видно как в работах ⁽³⁾ — ⁽⁵⁾, так и в работе ⁽⁶⁾.

В настоящей работе, как нам кажется, впервые дается ответ на один из основных вопросов, связанных с задачей (1), именно ответ на вопрос о том, в каких функциональных классах задача (1) имеет решение и притом одно. Нами рассмотрен ряд случаев. В одном из них, когда обобщенное число Рейнольдса в начальный момент не превосходит некоторой постоянной, показано, что решение существует и единственно во все моменты времени $t \geq 0$. Если же на начальное возмущение никаких ограничений, кроме некоторой гладкости, не наложено, то существует единственное решение задачи до некоторого момента T , величина которого оценивается снизу через данные задачи. Нам кажется, вопреки высказываниям других исследователей, занимавшихся этой же задачей, что на самом деле такое решение существует и единственно для всех $t \geq 0$.

Относительно задачи (2) доказывается, что она имеет единственное решение при всех $t \geq 0$ в смысле тех постановок, которые даны в § 1. В частности, легко перечислить условия, при выполнении которых задача (2) имеет классическое решение.

Решение задачи (1) «в малом» (в смысле, близком к постановке 3 § 1) получено недавно еще одним методом в работе С. Г. Крейна ⁽⁷⁾ на основе развиваемой им теории нелинейных операторных уравнений.

В настоящей работе мы используем следующие обозначения:

Ω — ограниченная область трехмерного пространства $x = (x_1, x_2, x_3)$.

$Q_T = \Omega \times [0 \leq t \leq T]$ — цилиндр в пространстве x, t .

\vec{v} — вектор с компонентами (v_1, v_2, v_3) ;

$$|\vec{v}| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 v_i^2}, \quad \vec{v} \cdot \vec{u} = \sum_{i=1}^3 v_i u_i, \quad \vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u},$$

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \vec{v} dx, \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{(\vec{u}, \vec{u})}; \quad (*)$$

$L_2(\Omega)$ — гильбертово пространство вектор-функций \vec{v} со скалярным произведением (*).

$W_2^1(\Omega)$ — гильбертово пространство вектор-функций \vec{v} со скалярным произведением

$$(\vec{u}, \vec{v})_{W_2^1} = \sum_{k=1}^3 (\vec{u}_{x_k}, \vec{v}_{x_k}) + (\vec{u}, \vec{v}),$$

где

$$\vec{u}_{x_k} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_k}.$$

Аналогично определяются

$$L_2(Q_T), \quad W_2^1(Q_T).$$

$W_2^1(\Omega)$ — подпространство $W_2^1(\Omega)$, плотным множеством в котором являются все непрерывно дифференцируемые векторы, равные нулю в граничных полосках.

Всюду в работе мы опускаем значок суммирования по индексам, встречающимся в произведении дважды; так, вместо $\sum_{k=1}^3 v_k w_{x_k}$ мы пишем $v_k w_{x_k}$ и т. д.

§ 1. Постановка задач. Теоремы единственности

Последнее десятилетие показало, какое большое значение при исследовании задач для дифференциальных уравнений имеет выбор того класса функций, в котором ищется решение, а в связи с этим и той формы, в которой следует удовлетворять всем условиям задачи. Для разыскания решения задачи выгоднее брать более широкий класс функций, например обобщенные функции. Однако, если иметь в виду сохранение теоремы единственности, этот класс функций, вообще говоря, нельзя «неограниченно» расширять. В нелинейных задачах ограничения на класс функций, среди которых ищется решение, обусловлены еще и сложностью, а иногда и невозможностью определить нужные действия над функциями взятого класса, не выходя за его пределы. Выбор класса функций, в котором исследуется задача, неоднозначен. Нередко он диктуется методом исследования. Но во всех случаях класс должен быть выбран так, чтобы в нем возможно было установить теорему существования и теорему единственности (если, конечно, последняя имеет место в классической постановке или обусловлена сущностью задачи). Этим требованиям удалось удовлетворить при исследовании линейных задач математической физики [см., например, ⁽⁸⁾, ⁽¹⁴⁾] и лишь в единичных случаях при исследовании нелинейных задач [см. ⁽⁹⁾, ⁽¹⁰⁾]. Мы приведем здесь три постановки задач (1) и (2).

Постановка 1. Обобщенным решением задачи (1) назовем вектор-функцию $\vec{v}(x, t)$, имеющую обобщенные производные из $L_2(Q_T)$ первого порядка, суммируемую с четвертой степенью по любому сечению Q_T плоскостью $t = \text{const}$,

$$\int_{\Omega} \sum_i v_i^4(x, t) dx < \text{const},$$

и удовлетворяющую условиям

$$\text{div } \vec{v} = 0, \quad \vec{v}|_S = 0, \quad \vec{v}|_{t=0} = \vec{a} \quad (3)$$

и тождеству

$$\int_0^T \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \vec{\Phi} + v \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k} \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial x_k} - v_k \vec{v} \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial x_k} - \vec{f} \cdot \vec{\Phi} \right] dx dt = 0 \quad (4)$$

при всевозможных $\vec{\Phi}$ из $L_2(Q_T)$, для которых

$$\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial x_k} \in L_2(Q_T), \quad \text{div } \vec{\Phi} = 0, \quad \vec{\Phi}|_S = 0.$$

Постановка 2. Обобщенным решением задачи (1) назовем вектор-функцию $\vec{v}(x, t)$, имеющую обобщенные производные из $L_2(Q_T)$ вида $\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t \partial x_i}$ и все подчиненные им и удовлетворяющую тем же условиям, что и в постановке 1.

Вследствие приводимого ниже неравенства (6), обобщенное решение в смысле постановки 2 является обобщенным решением и в смысле постановки 1. Обратное, вообще говоря, неверно. В данной работе мы докажем теорему единственности в смысле постановки 1 (а следовательно, и постановки 2) и теорему существования обобщенного решения в постановке 2 (а следовательно, и в постановке 1).

Постановка 3. Обобщенным решением задачи (1) назовем ограниченную измеримую вектор-функцию $\vec{v}(x, t)$, имеющую обобщенные производные из $L_2(Q_T)$ вида $\frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i}$ и удовлетворяющую условиям

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad \vec{v}|_S = 0$$

и тождеству

$$\int_0^T \int_{\Omega} \left[\vec{v} \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial t} - \nu \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k} \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial x_k} + v_k \vec{v} \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial x_k} + \vec{f} \vec{\Phi} \right] dx dt + \int_{\Omega} \vec{a} \vec{\Phi}(x, 0) dx = 0 \quad (5)$$

при всевозможных $\vec{\Phi}$ из $W_2^1(Q_T)$, для которых

$$\operatorname{div} \vec{\Phi} = 0, \quad \vec{\Phi}|_S = 0, \quad \vec{\Phi}|_{t=T} = 0.$$

Обобщенное решение \vec{v} задачи (2) во всех постановках определяется аналогично, лишь вектор-функции $\vec{\Phi}$ в тождествах (4) и (5) не обязаны удовлетворять условию $\operatorname{div} \vec{\Phi} = 0$.

Выполнение условия $\vec{v}(x, t)|_S = 0$ понимается везде в том смысле, что \vec{v} принадлежит замыканию в норме

$$\left(\int_0^T \int_{\Omega} \sum_{k,i} u_{ix_k}^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

множества всех непрерывно дифференцируемых векторов $\vec{u}(x, t)$, заданных в цилиндре Q_T и равных нулю вблизи боковой поверхности этого цилиндра. Начальное условие $\vec{v}|_{t=0} = \vec{a}$ удовлетворяется так, как это присуще функциям, имеющим обобщенные производные $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ из $L_2(Q_T)$. Во всяком случае,

$$\|\vec{v}(x, t) - \vec{a}(x)\| \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +0.$$

Справедливость тождеств (4) и (5) достаточно проверить лишь для гладких функций $\vec{\Phi}$ указанного типа. Если решение \vec{v} задачи (1) в одной из постановок имеет обобщенные производные из $L_2(Q_T)$, входящие в уравнение (1), то оба тождества можно интегрированием по частям привести к виду

$$\int_0^T \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \nu \Delta \vec{v} + v_k \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k} - \vec{f} \right) \vec{\Phi} dx dt + \int_{\Omega} (\vec{v} - \vec{a}) \cdot \vec{\Phi} |_{t=0} dx = 0.$$

На основании теоремы, доказанной Вейлем ⁽¹¹⁾ и С. Л. Соболевым ⁽¹²⁾, согласно которой вектор, ортогональный всем достаточно гладким соленоидальным векторам $\vec{\Phi}$, равным нулю вблизи границы S , является градиентом некоторой функции p , заключаем, что наши обобщенные решения удовлетворяют всем условиям задачи в виде (1). Верно и обратное, если функция \vec{v} удовлетворяет всем условиям задачи в виде (1), т. е. имеет обобщенные производные из $L_2(Q_T)$, входящие в уравнения (1), удовлетворяет уравнениям (1) почти всюду, а равенствам $\vec{v}|_S = 0$ и $\vec{v}|_{t=0} = \vec{a}$ — так, как ей предписывают теоремы вложения С. Л. Соболева ⁽¹³⁾, и если $\text{grad } p \in L_2(Q_T)$, то она удовлетворяет обоим тождествам (4) и (5).

В этой главе мы покажем, что для всех постановок имеет место теорема единственности. Больше того, из приводимых ниже доказательств будет следовать, что если функции \vec{v} удовлетворяют указанным в постановках 1 или 2 условиям, но тождество (4) справедливо для них лишь при $\vec{\Phi}$, принадлежащих к какому-либо линейному множеству \mathcal{M} , составляющему часть указанного в постановках множества, то таких функций \vec{v} в множестве \mathcal{M} не больше одной. Аналогичное усиление имеет место и для теоремы единственности в постановке 3. Единственность сохраняется в любом линейном подмножестве \mathcal{M} указанного в постановке 3 множества функций \vec{v} , если тождество (5) справедливо для функций $\vec{\Phi}$ множества \mathcal{M}_1 , полученного из функций \vec{u} множества \mathcal{M} при помощи следующей операции:

$$\vec{\Phi}(x, t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq t_1, \\ \int_{t_1}^t \vec{u}(x, \tau) d\tau, & t_1 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Нам понадобятся два неравенства, которые выводятся из рассмотрений С. Л. Соболева ⁽¹³⁾. Первое из них —

$$\left(\int_{\Omega} u^4(x) dx \right)^{\frac{1}{4}} \leq c_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \sum_{k=1}^3 u_{x_k}^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (6)$$

справедливое для любой непрерывно дифференцируемой функции $u(x)$, равной нулю вблизи границы S области Ω трехмерного пространства $x = (x_1, x_2, x_3)$, следует непосредственно из теоремы вложения С. Л. Соболева. Постоянная c_{Ω} определяется лишь размером области Ω и не зависит ни от u , ни от гладкости границы S . Поэтому неравенство (6) выполняется для всех функций, полученных в результате замыкания этого класса функций u в норме, определяемой правой частью неравенства (6). Мы обозначили этот класс через $\overset{0}{W}_2^1(\Omega)$. Если граница области S кусочно-гладкая, то $\overset{0}{W}_2^1(\Omega)$ состоит из всех квадратично-суммируемых по Ω функций, имеющих обобщенные производные первого порядка из $L_2(\Omega)$ и стремящихся в $L_2(S)$ к нулю при подходе к границе.

Второе неравенство —

$$\left(\int_{\Omega} u^4 dx\right)^{\frac{1}{4}} \leq c_{\varepsilon} \int_{\Omega} |u| dx + \varepsilon \left(\sum_{k=1}^3 \int_{\Omega} u_{x_k}^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}, \quad x = (x_1, x_2, x_3), \quad (7)$$

— справедливо при любом $\varepsilon > 0$ для любой непрерывно дифференцируемой функции u , если граница области Ω — кусочно-гладкая. Постоянная c_{ε} зависит от Ω и ε , причем $c_{\varepsilon} \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Если функция u вблизи границы равна нулю, то никакой гладкости границы требовать не надо, и постоянная c_{ε} зависит лишь от ε и размеров области Ω . Так что, в частности, для функций u из $\dot{W}_2^1(\Omega)$ неравенство (7) справедливо при любой области Ω . Ради полноты изложения приведем здесь вывод неравенства (7). Мы докажем его для непрерывно дифференцируемых функций u , равных нулю вблизи границы, а тем самым и для всех $u \in \dot{W}_2^1(\Omega)$. Продолжим u нулем вне Ω , заключим Ω в куб Ω_1 , разобьем этот куб на равные маленькие кубы со стороной 4δ и покажем, что для любого из таких кубов Ω_{δ} справедливо неравенство (7) с $\varepsilon = c\delta^{\frac{1}{4}}$, где c — абсолютная постоянная. Если это уже сделано, т. е. если доказано, что

$$\left(\int_{\Omega_{\delta}} u^4 dx\right)^{\frac{1}{4}} \leq \frac{c'}{\delta^2} \int_{\Omega_{\delta}} |u| dx + c\delta^{\frac{1}{4}} \left(\int_{\Omega_{\delta}} \sum_k u_{x_k}^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (8)$$

то, возводя обе части равенства в квадрат и суммируя их по всем кубикам Ω_{δ} из Ω_1 , получим:

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} u^4 dx\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \sum_{\Omega_{\delta}} \left(\int_{\Omega_{\delta}} u^4 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq 2c'^2 \cdot \frac{1}{\delta^4} \sum_{\Omega_{\delta}} \left(\int_{\Omega_{\delta}} |u| dx\right)^2 + \\ &+ 2c^2 \delta^{\frac{1}{2}} \int_{\Omega} \sum_k u_{x_k}^2 dx \leq 2 \frac{c'^2}{\delta^4} \left(\int_{\Omega} |u| dx\right)^2 + 2c^2 \delta^{\frac{1}{2}} \int_{\Omega} \sum_k u_{x_k}^2 dx. \end{aligned}$$

Возведя обе части неравенства в степень $\frac{1}{2}$, убедимся в справедливости неравенства (7) с постоянными $c_{\varepsilon} = \sqrt{2} \frac{c'}{\delta^2}$ и $\varepsilon = \sqrt{2} c\delta^{\frac{1}{4}}$.

Итак, нам осталось доказать, что для куба Ω_{δ} со стороной 4δ и произвольной непрерывно дифференцируемой функции $u(x)$ справедливо неравенство (8). Для этого воспользуемся интегральным представлением С. Л. Соболева для функции u , которое применительно к интересующему нас случаю будет иметь вид:

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{\kappa} \int_{\Omega_{\delta}} u(y) v(y) dy - \frac{1}{\kappa} \int_{\Omega_{\delta}} \left[\frac{1}{|x-y|^2} \frac{y_k - x_k}{|x-y|} \varphi_{v_k}(y) \right. \\ &\cdot \left. \int_{|x-y|}^{\infty} v\left(x + \rho \frac{x-y}{|x-y|}\right) \rho^2 d\rho \right] dy \equiv c_u + \frac{1}{\kappa} \int_{\Omega_{\delta}} \frac{1}{r^2} \omega_k(x, y) \varphi_{v_k}(y) dy \equiv \\ &\equiv c_u + \tilde{u}(x). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь функция v определяется равенством

$$v(y) = \begin{cases} \exp \frac{|y|^2}{|y|^2 - \delta^2}, & |y| \leq \delta, \\ 0, & |y| \geq \delta, \end{cases}$$

а число

$$\kappa = \int_{|y| \leq \delta} v(y) dy = \kappa_0 \delta^3.$$

Нетрудно видеть, что для $\omega_k(x, y)$ справедливо неравенство

$$|\omega_k(x, y)| \leq c' \delta^3.$$

Оценим $\int_{\Omega_\delta} u^4 dx$, исходя из представления (9):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\delta} u^4 dx &\leq \frac{1}{\kappa^4} (4\delta)^3 \left(\int_{\Omega_\delta} |u| dx \right)^4 \sim \frac{1}{\delta^3} \left(\int_{\Omega_\delta} |u| dx \right)^4, \\ \int_{\Omega_\delta} \tilde{u}^4(x) dx &\leq \left(\frac{c' \delta^3}{\kappa} \right)^4 \int_{\Omega_\delta} \left(\sum_k \frac{|\varphi_{v_k}(y)|}{r^2} dy \right)^4 dx. \end{aligned}$$

Внутренний интеграл оценим по неравенству Гёльдера:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\delta} \tilde{u}^4 dx &\leq \left(\frac{c' \delta^3}{\kappa} \right)^4 \int_{\Omega_\delta} \left\{ \left[\int_{\Omega_\delta} \left(\sum_k |\varphi_{v_k}| \right)^2 dy \right]^{\frac{1}{4}} \cdot \left[\int_{\Omega_\delta} \left(\sum_k |\varphi_{v_k}| \right)^2 r^{-3+\frac{1}{2}} dy \right]^{\frac{1}{4}} \right. \\ &\quad \cdot \left. \left[\int_{\Omega_\delta} r^{-3+\frac{1}{4}} dy \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^4 dx \leq c'' \left(\frac{\delta^3}{\kappa} \right)^4 \delta \left(\int_{\Omega_\delta} \sum_k \varphi_{v_k}^2 dy \right)^2 = \\ &= c'' \frac{1}{\kappa_0^4} \delta \left(\int_{\Omega_\delta} \sum_k \varphi_{v_k}^2 dy \right)^2. \end{aligned}$$

Из этих неравенств следует неравенство (8).

Возвратимся к интересующим нас теоремам единственности.

ТЕОРЕМА 1. Задачи (1), (2) могут иметь не больше одного обобщенного решения в смысле постановки 1 и, тем более, постановки 2.

Пусть \vec{v} и \vec{v}' — такие решения задачи. Вычтем из тождества (4) для \vec{v} тождество (4) для \vec{v}' . В полученном равенстве положим

$$\vec{\Phi} = \begin{cases} \vec{v} - \vec{v}' \equiv \vec{u} & \text{для } 0 \leq t \leq t_1, \\ 0 & \text{для } t_1 \leq t \leq T, \end{cases}$$

в результате чего получим:

$$\int_0^{t_1} \int \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \vec{u} + \nu \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_k} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_k} - (u_k \vec{v}' + v'_k \vec{u}) \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_k} \right] dx dt = 0,$$

или, учтя, что $\operatorname{div} \vec{v} = 0$,

$$\frac{1}{2} \|\vec{u}(x, t_1)\|^2 + \nu \sum_k \int_0^{t_1} \|\vec{u}_{x_k}\|^2 dt - \int_0^{t_1} \int u_k \vec{v}' \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_k} dx dt = 0. \quad (10)$$

Для оценки последнего члена воспользуемся неравенством (7) и соотношением:

$$\int_{\Omega} \sum_k (v'_k)^4 dx \leq c_1.$$

Обозначим

$$\left(\int_{\Omega} \sum_{i,k} u_{ix_k}^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \varphi(t);$$

тогда

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \int_0^{t_1} u_k \vec{v}' \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_k} dx dt \right| &\leq c_2 \int_0^{t_1} \sqrt{\int_{\Omega} \sum_i u_i^4 dx} \sqrt{\int_{\Omega} \sum_i v_i'^4 dx} \varphi(t) dt \leq \\ &\leq c_3 \int_0^{t_1} \left[c_\varepsilon \int_{\Omega} |u_i| dx + \varepsilon \varphi(t) \right] \varphi(t) dt \leq \\ &\leq c_3 \int_0^{t_1} \left[2\varepsilon \varphi^2(t) + \frac{c_\varepsilon^2}{4\varepsilon} \left(\int_{\Omega} \sum_i |u_i| dx \right)^2 \right] dt \leq \\ &\leq c_3 \int_0^{t_1} \left[2\varepsilon \varphi^2(t) + \frac{\text{пл. } \Omega \cdot c_\varepsilon^2}{\varepsilon} \|\vec{u}\|^2 \right] dt, \end{aligned}$$

где ε — любое положительное число. В силу этого неравенства, из (10) следует:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\vec{u}(x_1, t_1)\|^2 + \nu \int_0^{t_1} \varphi^2(t) dt &\leq \\ &\leq c_3 \int_0^{t_1} \left[2\varepsilon \varphi^2(t) + \frac{\text{пл. } \Omega \cdot c_\varepsilon^2}{\varepsilon} \|\vec{u}\|^2 \right] dt. \end{aligned}$$

Возьмем $\varepsilon = \frac{\nu}{4c_3}$. Тогда

$$\frac{1}{2} \|\vec{u}(x, t_1)\|^2 + \frac{\nu}{2} \int_0^{t_1} \varphi^2(t) dt \leq c_4 \int_0^{t_1} \|\vec{u}(x, t)\|^2 dt,$$

откуда уже известным путем выводим, что $\|\vec{u}\| = 0$, т. е. $\vec{v} = \vec{v}'$, и теорема доказана. Единственность задачи (2) устанавливается аналогично.

ТЕОРЕМА 2. Задачи (1) и (2) могут иметь не более одного обобщенного решения в смысле постановки 3.

Для разности решений $\vec{u} = \vec{v} - \vec{v}'$ из тождества (5) следует:

$$\int_0^T \int_{\Omega} \left[\vec{u} \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial t} - \nu \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_k} \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial x_k} + (v_k \vec{u}' + u_k \vec{v}') \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial x_k} \right] dx dt = 0. \quad (11)$$

Отсюда мы выведем равенство нулю вектора \vec{u} тем же способом, каким это сделано для линейных задач в книге (14), стр. 129—134. Именно, в качестве $\vec{\Phi}$ возьмем

$$\vec{\Phi}(x, t) = \begin{cases} 0, & t_1 \leq t \leq T, \\ \int_{t_1}^t \vec{u}(x, \tau) d\tau, & 0 \leq t \leq t_1. \end{cases}$$

Тогда равенство (11) можно преобразовать так:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{t_1} \int_{\Omega} \left[\vec{\Phi}_t^2 - \frac{\nu}{2} \frac{d}{dt} \sum_k \vec{\Phi}_{x_k}^2 + \nu_k \vec{\Phi}_t \vec{\Phi}_{x_k} + \vec{v}' \Phi_{kt} \vec{\Phi}_{x_k} \right] dx dt = \\ &= \frac{\nu}{2} \int_{\Omega} \sum_k \vec{\Phi}_{x_k}^2(x, 0) dx + \int_0^{t_1} \int_{\Omega} \left[\vec{\Phi}_t^2 + \nu_k \cdot \vec{\Phi}_t \vec{\Phi}_{x_k} + \vec{v}' \Phi_{kt} \Phi_{x_k} \right] dx dt, \end{aligned}$$

откуда легко заключить, что

$$\int_{\Omega} \sum_k \vec{\Phi}_{x_k}^2(x, 0) dx \leq c \int_0^{t_1} \int_{\Omega} \sum_k \vec{\Phi}_{x_k}^2(x, t) dx dt, \quad (12)$$

где c — постоянная, определяемая только ν и $\max |\vec{v}|$. Введем вместо $\vec{\Phi}(x, t)$ вектор-функцию

$$\vec{\Psi}(x, t) = \int_0^t \vec{u}(x, \tau) d\tau.$$

Очевидно,

$$\vec{\Phi}(x, t) = \int_0^t \vec{u}(x, \tau) d\tau - \int_0^{t_1} \vec{u}(x, \tau) d\tau = \vec{\Psi}(x, t) - \vec{\Psi}(x, t_1).$$

Подставим это выражение для $\vec{\Phi}$ в неравенство (12):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_k \vec{\Psi}_{x_k}^2(x, t_1) dx &\leq c \int_0^{t_1} \int_{\Omega} \sum_k [\vec{\Psi}_k(x, t) - \vec{\Psi}_k(x, t_1)]^2 dx dt \leq \\ &\leq 2ct_1 \int_{\Omega} \sum_k \vec{\Psi}_{x_k}^2(x, t_1) dx + 2c \int_0^{t_1} \int_{\Omega} \sum_k \Psi_{x_k}^2(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

Величина t_1 была взята пока произвольной. Будем теперь считать, что $t_1 \in \left[0, \frac{1}{4c}\right]$; тогда из последнего неравенства следует:

$$\int_{\Omega} \sum_k \vec{\Psi}_{x_k}^2(x, t_1) dx \leq 4c \int_0^{t_1} \int_{\Omega} \sum_k \vec{\Psi}_{x_k}^2(x, t) dx dt, \quad (13)$$

откуда уже обычным приемом выводим, что $\vec{\Psi}$, а следовательно, и \vec{u} равны нулю для $t_1 \in \left[0, \frac{1}{4c}\right]$. Так как постоянная c определяется лишь ν и $\max |\vec{v}|$, то, повторяя наше рассуждение для $t \in \left[\frac{1}{4c}, \frac{1}{2c}\right], \left[\frac{1}{2c}, \frac{3}{4c}\right]$

и т. д., мы через конечное число шагов установим, что $\vec{u} \equiv 0$. Теорема доказана. Доказательство теоремы для задачи (2) — то же, что и для задачи (1).

§ 2. Априорные оценки для решений системы (2)

Возьмем цилиндр $Q_T = \Omega \times [0, T]$ произвольной высоты T . В нем мы получим априорные оценки решений системы (2). Для системы (2) имеет место «принцип максимума», который позволяет установить оценку $|\vec{v}|$. Именно, справедлива

ЛЕММА 1. Для классических решений системы (2) в цилиндре Q_T справедливо неравенство:

$$|\vec{v}(x, t)| \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^3 v_i^2(x, t)} \leq e^{\alpha t} \left\{ \frac{1}{\alpha} \max_{Q_t} [e^{-\alpha t} |\vec{f}(x, t)|] + \vec{a}^2(x) \right\} \leq c_1 \quad (14)$$

при любом $\alpha > 0$.

Действительно, для вектора $\vec{u}(x, t) = \vec{v}(x, t)e^{-\alpha t}$, в силу системы (2), справедливо равенство:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \vec{u}^2}{\partial t} - \nu \Delta \vec{u} \cdot \vec{u} + \frac{1}{2} \nu_k \frac{\partial \vec{u}^2}{\partial x_k} + \alpha \vec{u}^2 = \vec{f} \cdot \vec{u} e^{-\alpha t}. \quad (15)$$

Рассмотрим точку P максимума \vec{u}^2 в Q_t . Если она лежит на основании или на боковой поверхности цилиндра, то утверждение леммы очевидно. Если же P находится внутри цилиндра Q_t , или на верхнем основании его, то в этой точке

$$\frac{\partial \vec{u}^2}{\partial t} \geq 0, \quad \frac{\partial \vec{u}^2}{\partial x_k} = 0, \quad -\vec{u} \cdot \Delta \vec{u} = \sum_{i,k} u_{ix_k}^2 - \frac{1}{2} \Delta (\vec{u}^2) \geq 0;$$

следовательно, из (15) получаем:

$$\alpha \vec{u}^2 \leq \vec{f} \cdot \vec{u} e^{-\alpha t},$$

откуда легко усмотреть справедливость неравенства (14).

ЛЕММА 2. Если решение системы (2) имеет обобщенные производные из $L_2(Q_T)$, входящие в систему, то для него справедливо неравенство:

$$\int_0^t \sum_k \left\| \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k} \right\|^2 dt \leq c_2, \quad (16)$$

где c_2 — постоянная, зависящая лишь от ν , T , c_1 , $\int_0^T \|\vec{f}\| dt$.

Действительно, из системы (2) имеем:

$$(\vec{f}, \vec{v}) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\vec{v}\|^2 + \nu \sum_k \left\| \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k} \right\|^2 + (\nu_k \vec{v}_{x_k}, \vec{v});$$

но тогда при произвольном $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\vec{v}\|^2 + \nu \sum_k \left\| \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k} \right\|^2 \leq c_1 \left[\frac{\varepsilon}{2} \sum_k \|\vec{v}_{x_k}\|^2 + \frac{3}{2\varepsilon} c_1^2 \text{пл. } \Omega \right] + \|\vec{f}\| \|\vec{v}\|. \quad (17)$$

Возьмем $\varepsilon = \frac{\nu}{c_1}$; тогда из этого неравенства и из неравенства (14) легко выводится требуемое неравенство (16).

Только на основании оценок, данных в леммах 1 и 2, мы в § 4 докажем существование решения задачи (2) в постановке 3. Для дальнейших исследований свойств решений задачи (2) оказываются полезными

оценки $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ и других, более высоких производных \vec{v} . Мы получим их здесь для производных второго порядка. Относительно же оценок более старших производных заметим, что они проводятся почти так же, как в наших более ранних работах по линейным задачам [см. (14), (8)]; нелинейность не играет при этом никакой существенной роли, а основным элементом оказываются оценки для эллиптических операторов [см. (14), стр. 83—101, (15), (17)].

ЛЕММА 3. Если решение системы (2) ограничено какой-либо константой c_1 и имеет обобщенные производные из $L_2(Q_T)$, входящие в уравнение, то

$$\sum_k \|\vec{v}_{x_k}(x, t)\|^2 + \int_0^t \|\vec{v}_t\|^2 dt \leq c_3, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (18)$$

где c_3 — постоянная, зависящая лишь от ν , T , c_1 , $\int_0^T \|\vec{f}\|^2 dt$ и $\sum_k \|\vec{a}_{x_k}\|^2$.

Для доказательства рассмотрим равенство

$$(\vec{f}, \vec{v}_t) = \|\vec{v}_t\|^2 + \frac{\nu}{2} \frac{d}{dt} \sum_k \|\vec{v}_{x_k}\|^2 + \int_{\Omega} v_k \vec{v}_{x_k} \vec{v}_t dx. \quad (19)$$

Так как

$$|v_k| \leq c_1,$$

то из (19) легко выводится неравенство

$$\begin{aligned} \|\vec{v}_t\|^2 + \frac{\nu}{2} \frac{d}{dt} \sum_k \|\vec{v}_{x_k}\|^2 &\leq \\ &\leq \sqrt{3} c_1 \left(\frac{1}{2\varepsilon} \sum_k \|\vec{v}_{x_k}\|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|\vec{v}_t\|^2 \right) + \frac{1}{2} \|\vec{v}_t\|^2 + \frac{1}{2} \|\vec{f}\|^2, \end{aligned}$$

где ε — любое положительное число. Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2\sqrt{3}c_1}$, тогда последнее неравенство примет вид:

$$\frac{1}{4} \|\vec{v}_t\|^2 + \frac{\nu}{2} \frac{d}{dt} \sum_k \|\vec{v}_{x_k}\|^2 \leq 3c_1^2 \sum_k \|\vec{v}_{x_k}\|^2 + \frac{1}{2} \|\vec{f}\|^2.$$

Из этого неравенства мы выведем утверждение леммы, если воспользуемся тем, что из

$$\frac{dy(t)}{dt} \leq \alpha y(t) + \beta(t), \quad y \geq 0, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0,$$

следуют неравенства:

$$y(t) \leq \left[y(0) + \int_0^t \beta(\tau) e^{-\alpha\tau} d\tau \right] e^{\alpha t}$$

и

$$\int_0^t y(t) dt \leq y(0) \frac{e^{\alpha t} - 1}{\alpha} + \int_0^t \beta(\tau) \frac{e^{\alpha(t-\tau)} - 1}{\alpha} d\tau.$$

ЛЕММА 4. Для решения системы (2), удовлетворяющего условиям леммы 3, справедливо неравенство

$$\int_0^t \left[\|\vec{v}_t\|^2 + \sum_{i,j} \|\vec{v}_{x_i x_j}\|^2 \right] dx dt \leq c_4, \quad (20)$$

где постоянная c_4 определяется лишь γ , T , c_1 , $\int_0^T \|\vec{f}\|^2 dt$, $\sum_k \|\vec{a}_{x_k}\|^2$ и областью Ω .

Эта лемма доказывается так же, как это сделано в наших работах по линейным параболическим и эллиптическим уравнениям [см., например, (16)]. Мы имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\vec{f}\|^2 dt = \int_0^T \left[\|\vec{v}_t\|^2 + \gamma^2 \|\Delta \vec{v}\|^2 - 2\gamma (\vec{v}_t, \Delta \vec{v}) + \left\| \sum_k v_k \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k} \right\|^2 + \right. \\ \left. + 2(\vec{v}_t, v_k \vec{v}_{x_k}) - 2\gamma (\Delta \vec{v}, v_k \vec{v}_{x_k}) \right] dt; \end{aligned}$$

отсюда следует:

$$\begin{aligned} \int_0^T \left[\|\vec{v}_t\|^2 + \gamma^2 \|\Delta \vec{v}\|^2 \right] dt + \gamma \sum_k \left\| \vec{v}_{x_k}(x, t) \right\|_{t=0}^{t=T} \leq c_5 \int_0^T \left[\varepsilon \|\vec{v}_t\|^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{\varepsilon} \sum_k \|\vec{v}_{x_k}\|^2 + \varepsilon \|\Delta \vec{v}\|^2 \right] dt + \int_0^T \|\vec{f}\|^2 dt, \end{aligned}$$

где ε — любое положительное число. Выбирая $\varepsilon = \min\left(\frac{1}{2c_5}, \frac{\gamma^2}{2c_5}\right)$ и используя неравенство леммы 3 и неравенство

$$\sum_{i,j} \|\vec{v}_{x_i x_j}\|^2 \leq c_6 \|\Delta \vec{v}\|^2$$

(постоянная c_6 определяется только областью Ω) из работы (15) [вывод см. в работе (14) или (17)], мы убеждаемся в справедливости доказываемой леммы.

Приведем вывод еще одной оценки.

ЛЕММА 5. Если решение задачи (2) имеет обобщенные производные из $L_2(Q_T)$ вида $\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^3 \vec{v}}{\partial t \partial x_i \partial x_j}$ и все им подчиненные, то

$$\int_0^T \sum_k \left\| \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t \partial x_k} \right\|^2 dt \leq c_7, \quad (21)$$

где c_7 определяется лишь c_1 , c_3 , T , ν , $\|\vec{v}_t(x, 0)\|^2$, $\int_0^T \|\vec{f}_t\|^2 dt$.

Для доказательства рассмотрим равенство

$$\begin{aligned} \int_0^t (\vec{v}_t, \vec{f}_t) dt &= \int_0^t (\vec{v}_t, (L\vec{v})_t) dt = \\ &= \int_0^t \left[\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\vec{v}_t\|^2 + \nu \sum_k \|\vec{v}_{tx_k}\|^2 + ((v_k, \vec{v}_{x_k})_t, \vec{v}_t) \right] dt. \end{aligned} \quad (22)$$

Оценим в нем последний член, используя лемму 1 и неравенство (7):

$$\begin{aligned} |I| &\equiv |((v_k \vec{v}_{x_k})_t, \vec{v}_t)| \leq \sqrt{3} \sqrt{\sum_k \|\vec{v}_{x_k}\|^2} \sqrt{\sum_i \int_{\Omega} v_{it}^4 dx} + \\ &+ c_1 \sum_k \|\vec{v}_{x_k t}\| \|\vec{v}_t\| \leq \\ &\leq \sqrt{3} \sqrt{\sum_k \|\vec{v}_{x_k}\|^2} \left[2c_\epsilon^2 \text{пл } \Omega \|\vec{v}_t\|^2 + 2\epsilon^2 \sum_k \|\vec{v}_{tx_k}\|^2 \right] + \\ &+ c_1 \sum_k \|\vec{v}_{x_k t}\| \|\vec{v}_t\|, \end{aligned}$$

где ϵ — произвольное положительное число. На основании этого неравенства, из (22) следует:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\vec{v}_t\| \left| \int_{t=0}^{t=t} + \nu \int_0^t \sum_k \|\vec{v}_{tx_k}\|^2 dt \right| &\leq \int_0^t \left\{ \|\vec{v}_t\| \|\vec{f}_t\| + \sqrt{3} \sqrt{\sum_k \|\vec{v}_{x_k}\|^2} \cdot \right. \\ &\cdot \left. \left[2c_\epsilon^2 \text{пл } \Omega \|\vec{v}_t\|^2 + 2\epsilon^2 \sum_k \|\vec{v}_{tx_k}\|^2 \right] + c_1 \sum_k \|\vec{v}_{x_k t}\| \|\vec{v}_t\| \right\} dt. \end{aligned}$$

Если воспользоваться оценкой (18) и неравенством Коши, то последнее неравенство дает:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\vec{v}_t\|^2 \left| \int_{t=0}^{t=t} + \nu \int_0^t \sum_k \|\vec{v}_{tx_k}\|^2 dt \right| &\leq \int_0^t \left\{ \frac{1}{2} \|\vec{v}_t\|^2 + \frac{1}{2} \|\vec{f}_t\|^2 + \right. \\ &+ \sqrt{3} c_3 \left[2c_\epsilon^2 \text{пл } \Omega \|\vec{v}_t\|^2 + 2\epsilon^2 \sum_k \|\vec{v}_{tx_k}\|^2 \right] + \frac{\nu}{2} \sum_k \|\vec{v}_{x_k t}\|^2 + \frac{c_1^2}{2\nu} \|\vec{v}_t\|^2 \left. \right\} dt. \end{aligned}$$

Отсюда уже легко заключить о справедливости доказываемой леммы, если взять ϵ , удовлетворяющим условию $2\epsilon^2 \sqrt{3} c_3 = \frac{\nu}{4}$, и еще раз использовать неравенство (18).

§ 3. Априорные оценки для решений системы (1)

Предположим, что решение системы (1):

$$\left. \begin{aligned} L\vec{v} &\equiv \vec{v}_t - \nu \Delta \vec{v} + v_k \vec{v}_{x_k} = -\text{grad } p + \vec{f}, \\ \text{div } \vec{v} &= 0, \quad \vec{v}|_S = 0, \quad \vec{v}|_{t=0} = \vec{a} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

существует и имеет обобщенные производные из $L_2(Q_T)$ вида $\vec{v}_{tx_k x_j}$ и все подчиненные им. Тогда для него справедливы два равенства:

$$(\vec{f}, \vec{v}) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\vec{v}\|^2 + \nu \sum_k \|\vec{v}_{x_k}\|^2 \quad (23)$$

и

$$(\vec{f}_t, \vec{v}_t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\vec{v}_t\|^2 + \nu \sum_k \|\vec{v}_{tx_k}\|^2 + \int_{\Omega} v_{kt} \vec{v}_{x_k} \vec{v}_t dx, \quad (24)$$

которые легко выводятся из соотношений (1). Обозначим

$$\varphi^2(t) = \sum_k \|\vec{v}_{x_k}(x, t)\|^2,$$

$$F^2(t) = \sum_k \|\vec{v}_{tx_k}(x, t)\|^2.$$

Будем в дальнейшем считать, что функция \vec{v} удовлетворяет следующим условиям:

а) для функции \vec{v} существуют функции $\varphi(t)$, $F(t)$ и $\frac{d}{dt} \|\vec{v}_t\|^2$ для t из $[0, T]$, причем $\varphi(t)$ непрерывна, а $F^2(t)$ и $\frac{d}{dt} \|\vec{v}_t\|^2$ суммируемы по Лебегу на $[0, T]$;

б) функция \vec{v} удовлетворяет равенствам (23) и (24).

Для такой функции \vec{v} получим ряд оценок.

ЛЕММА 6 *. Для функции \vec{v} , удовлетворяющей условиям а) и б), справедливы неравенства:

$$\|\vec{v}(x, t)\| \leq \|\vec{a}(x)\| + \int_0^t \|\vec{f}(x, \tau)\| d\tau, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & \|\vec{v}(x, t)\|^2 + 2\nu \int_0^t \varphi^2(\tau) d\tau \leq \\ & \leq \|\vec{a}\|^2 + 2\|\vec{a}\| \int_0^t \|\vec{f}\| d\tau + 2 \left(\int_0^t \|\vec{f}\| d\tau \right)^2. \end{aligned} \quad (26)$$

Обе эти оценки легко выводятся из равенства (23). Действительно, из (23) имеем:

$$\|\vec{v}\| \frac{d}{dt} \|\vec{v}\| \leq \|\vec{f}\| \cdot \|\vec{v}\|,$$

так что или $\|\vec{v}(x, t)\| = 0$, или $\frac{d}{dt} \|\vec{v}\| \leq \|\vec{f}(x, t)\|$. Но $\|\vec{v}(x, t)\|$ есть непрерывная функция t , поэтому из этих неравенств следует, что

$$\|\vec{v}(x, t)\| \leq \|\vec{a}\| + \int_0^t \|\vec{f}\| d\tau.$$

* Утверждение этой леммы хорошо известно.

Интегрируя, далее, (23) по t от 0 до t и используя последнее неравенство, убедимся в справедливости (26).

Для доказательства нижеследующих лемм мы воспользуемся приведенными в § 1 неравенствами:

$$\left(\int_{\Omega} u^4 dx \right)^{\frac{1}{4}} \leq c_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \sum_k u_{x_k}^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad u|_S = 0, \quad (6)$$

и

$$\left(\int_{\Omega} u^4 dx \right)^{\frac{1}{4}} \leq c_{\varepsilon} \int_{\Omega} |u| dx + \varepsilon \left(\int_{\Omega} \sum_k u_{x_k}^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (7)$$

справедливыми для произвольных функций u и любого $\varepsilon > 0$.

ЛЕММА 7. Если \vec{v} удовлетворяет условиям а) и б) и если

$$\nu - \beta \sqrt{\frac{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{v}_t(x, 0)\|}{\nu}} = \gamma > 0, \quad \beta = \sqrt{3} c_{\Omega}^2, \quad (27)$$

и $\vec{f} \equiv 0$, то для всех $t \geq 0$ имеют место оценки:

$$\|\vec{v}(x, t)\| \leq \|\vec{a}\|, \quad \varphi(t) \leq \frac{1}{\sqrt{\nu}} \sqrt{\|\vec{a}\| \|\vec{v}_t(x, 0)\|}, \quad (28)$$

$$2\gamma \int_0^t F^2(\tau) d\tau \leq \|\vec{v}_t(x, 0)\|^2.$$

Доказательство. Последний член, входящий в равенство (24), оценим при помощи неравенства Гёльдера и неравенства (6):

$$\begin{aligned} |I| &= \left| \int_{\Omega} \sum_k v_{kt} \vec{v}_{x_k} \vec{v}_t dx \right| \leq \sqrt{\int_{\Omega} \sum_{ki} (v_{kt} v_{it})^2 dx} \sqrt{\int_{\Omega} \sum_k v_{ix_k}^2 dx} \leq \\ &\leq \sqrt{3} \sqrt{\int_{\Omega} \sum_i v_{it}^4 dx} \varphi(t) \leq \beta \sum_k \|\vec{v}_{tx_k}\|^2 \varphi(t) = \beta F^2(t) \varphi(t). \end{aligned}$$

Тогда из равенства (24) будет следовать:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\vec{v}\|^2 + (\nu - \beta \varphi(t)) F^2(t) \leq 0. \quad (29)$$

С другой стороны, равенство (23) дает:

$$\nu \varphi^2(t) = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\vec{v}\|^2 = -\int_{\Omega} \vec{v} \vec{v}_t dx \leq \|\vec{v}(x, t)\| \|\vec{v}_t(x, t)\| \quad (30)$$

и

$$\|\vec{v}(x, t)\| \leq \|\vec{a}\|,$$

так что

$$\varphi(t) \leq \frac{1}{\sqrt{\nu}} \sqrt{\|\vec{a}\| \|\vec{v}_t(x, t)\|}. \quad (31)$$

В начальный момент, в силу условия (27) и последнего неравенства (31),

$$\nu - \beta \varphi(0) \geq \nu - \beta \frac{1}{\sqrt{\nu}} \sqrt{\|\vec{a}\| \|\vec{v}_t(x, 0)\|} = \gamma > 0.$$

Так как функция $v - \beta\varphi(t)$ непрерывна при $t \geq 0$ и положительна в точке $t = 0$, то может быть одно из двух: или она положительна для всех $t \geq 0$, или существует такое T , что при $t < T$ она положительна, а при $t = T$ обращается в нуль. Покажем, что второй случай невозможен. Действительно, если

$$v - \beta\varphi(t) > 0 \quad (32)$$

при $t \in [0, T)$, то для таких t из (29) следует, что $\frac{d}{dt} \|\vec{v}_t\|^2 \leq 0$, т. е.

$$\|\vec{v}_t(x, t)\| \leq \|\vec{v}_t(x, 0)\|.$$

Но тогда из (31) имеем:

$$\varphi(t) \leq \frac{1}{V_v} \sqrt{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{v}_t(x, 0)\|}. \quad (33)$$

Это неравенство, в силу непрерывности φ , справедливо и при $t = T$, следовательно,

$$v - \beta\varphi(T) \geq v - \frac{\beta}{V_v} \sqrt{\|\vec{a}\| \|\vec{v}_T(x, 0)\|} = \gamma > 0. \quad (34)$$

Но это противоречит нашему предположению, что $v - \beta\varphi(T) = 0$. Итак, неравенство (32) имеет место для всех $t \geq 0$. Но тогда справедливы неравенства (33) и (34), а в силу (29), и неравенство

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\vec{v}_t\|^2 + \gamma F^2(t) \leq 0.$$

Отсюда следует:

$$2\gamma \int_0^t F^2(\tau) d\tau \leq \|\vec{v}_t(x, 0)\|^2,$$

и лемма доказана.

ЛЕММА 8. Если для \vec{v} выполнены условия а) и б) и если

$$A^2 = \left(\|\vec{a}\| + \int_0^T \|\vec{f}\| dt \right) \left(\max_{0 \leq t \leq T} \|\vec{f}\| + \|\vec{v}_t(x, 0)\| + \int_0^T \|\vec{f}_t\| dt \right) < \frac{v^3}{\beta^2}, \quad (35)$$

то при $t \in [0, T]$ имеет место оценка:

$$\begin{aligned} \int_0^T F^2(t) dt &\leq \frac{V_v}{v^3 - \beta A} \times \\ &\times \left[\int_0^T \|\vec{f}_t\| \left(\|\vec{v}_t(x, 0)\| + \int_0^t \|\vec{f}_t\| dt \right) + \frac{1}{2} \|\vec{v}_t(x, 0)\|^2 \right] = c_8. \end{aligned} \quad (36)$$

Прежде всего примем во внимание, что из равенства (23) и леммы 6 вытекает неравенство (25) и следующее неравенство:

$$\begin{aligned} v\varphi^2(t) &\leq (\|\vec{f}(x, t)\| + \|\vec{v}_t(x, t)\|) \|\vec{v}(x, t)\| \leq \\ &\leq (\|\vec{f}(x, t)\| + \|\vec{v}_t(x, t)\|) \left(\|\vec{a}\| + \int_0^t \|\vec{f}\| dt \right). \end{aligned} \quad (37)$$

С другой стороны, из равенства (24) и полученной выше оценки для (I) следует равенство:

$$(\nu - \beta \varphi(t)) F^2(t) \leq \| \vec{f}_t \| \| \vec{v}_t \| - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| \vec{v}_t \|^2 = \| \vec{v}_t \| \left(\| \vec{f}_t \| - \frac{d}{dt} \| \vec{v}_t \| \right),$$

которое мы только усилим, подставив в него вместо $\varphi(t)$ оценку (37):

$$B(t) F^2(t) \leq \| \vec{v}_t(x, t) \| \left(\| \vec{f}_t(x, t) \| - \frac{d}{dt} \| \vec{v}_t(x, t) \| \right), \quad (38)$$

где

$$B(t) = \nu - \frac{\beta}{V^\nu} \left[\max_{0 \leq \tau \leq t} (\| \vec{f}(x, \tau) \| + \| \vec{v}_\tau(x, \tau) \|) \right]^{\frac{1}{2}} \left(\| \vec{a} \| + \int_0^t \| \vec{f} \| d\tau \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Вследствие условия (35), $B(0) > 0$. Функция $B(t)$ непрерывна при $t \geq 0$ и монотонно убывает с возрастанием t . Опеним снизу промежуток изменения t : $0 \leq t \leq T_1$, в течение которого сохраняется неравенство $B(t) > 0$. Пусть $B(t) > 0$ при $t \in [0, T_1]$ и $B(T_1) = 0$. Тогда для $t \in [0, T_1]$, в силу (38), имеем:

$$0 \leq \| \vec{v}_t(x, t) \| \left(\| \vec{f}_t(x, t) \| - \frac{d}{dt} \| \vec{v}_t(x, t) \| \right),$$

откуда вытекает, что

$$\| \vec{v}_t(x, t) \| \leq \| \vec{v}_t(x, 0) \| + \int_0^t \| \vec{f}_t \| dt. \quad (39)$$

Поэтому для $t \in [0, T_1]$

$$B(t) \geq \nu - \frac{\beta}{V^\nu} \left[\max_{0 \leq \tau \leq t} \| \vec{f} \| + \| \vec{v}_t(x, 0) \| + \int_0^t \| \vec{f}_t \| dt \right]^{\frac{1}{2}} \left[\| \vec{a} \| + \int_0^t \| \vec{f} \| d\tau \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (40)$$

Если учесть теперь условие (35), которое можно записать в виде

$$\nu - \beta \nu^{-\frac{1}{2}} A > 0,$$

то из (40) получим:

$$B(T) \geq \nu - \beta \nu^{-\frac{1}{2}} A > 0.$$

С другой стороны, $B(T_1) = 0$ и $B(t)$ есть монотонно убывающая функция t ; следовательно, $T_1 > T$. Итак, мы установили, что для $t \in [0, T]$

$$B(t) \geq \nu - \beta \nu^{-\frac{1}{2}} A > 0.$$

Поэтому из (38) и (39) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \| \vec{v} \|^2 \Big|_0^t + (\nu - \beta \nu^{-\frac{1}{2}} A) \int_0^t F^2(t) dt &\leq \int_0^t \| \vec{f}_t \| \| \vec{v}_t \| dt \leq \\ &\leq \int_0^t \| \vec{f}_t \| \left[\| \vec{v}_t(x, 0) \| + \int_0^t \| \vec{f}_t \| d\tau \right] dt, \end{aligned}$$

но из этих неравенств вытекает утверждение нашей леммы.

Рассмотрим, наконец, общий случай, когда на начальное возмущение и \vec{f} не накладывается никаких ограничений малости. Справедлива

ЛЕММА 9. Если \vec{v} удовлетворяет условиям а) и б), то существует такое положительное число T , что при $0 \leq t \leq T$ справедливы оценки:

$$\int_0^T F^2(t) dt \leq c_9^2, \quad \|\vec{v}_t(x, t)\| \leq D(t), \quad (41)$$

где величины T , c_9 и $D(t)$ определяются данными задачи: $v, \varphi(0)$,

$\|\vec{v}_t(x, 0)\|$, $\int_0^T \|\vec{f}_t\| dt$ и областью Ω .

Доказательство. Возьмем три положительных числа K , γ и ε так, чтобы

$$v - 2\sqrt{3}\varepsilon^2[\varphi(0) + K] \geq \frac{\gamma}{2} > 0, \quad (42)$$

и обозначим через T наименьшее t , для которого

$$\varphi(T) = \varphi(0) + K. \quad (43)$$

Рассмотрим равенство (24) и оценим в нем последнее слагаемое при помощи неравенства (7), в котором ε фиксируем так, как сказано выше:

$$\begin{aligned} |I| &\leq \sqrt{3} \sqrt{\int_{\Omega} \sum_i v_{it}^2 dx} \sqrt{\sum_k \|\vec{v}_{x_k}\|^2} \leq \\ &\leq 2\sqrt{3}[c_\varepsilon^2 \text{ пл } \Omega \|\vec{v}_t\|^2 + \varepsilon^2 F^2(t)] \varphi(t). \end{aligned}$$

Обозначим $2\sqrt{3}c_\varepsilon^2 \text{ пл } \Omega = c'_\varepsilon$ и подставим найденную оценку в равенство (24). Мы получим:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\vec{v}_t\|^2 + (v - 2\sqrt{3}\varepsilon^2 \varphi(t) F^2(t)) \leq c'_\varepsilon \|\vec{v}_t\|^2 \varphi(t) + \|\vec{f}_t\| \|\vec{v}_t\|.$$

Для $t \leq T$, в силу предположений (42) и (43), из этого неравенства следует:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\vec{v}_t\|^2 + \frac{\gamma}{2} F^2(t) &\leq c'_\varepsilon (\varphi(0) + K) \|\vec{v}_t\|^2 + \|\vec{f}_t\| \|\vec{v}_t\| \equiv \\ &\equiv c''_\varepsilon \|\vec{v}_t\|^2 + \|\vec{f}_t\| \|\vec{v}_t\|. \end{aligned} \quad (44)$$

Отсюда обычным способом выводятся оценки для $\|\vec{v}_t\|$ и $F(t)$. Именно, выбрасывая сначала из левой части соотношения (44) неотрицательное слагаемое $\frac{\gamma}{2} F^2(t)$, мы получим:

$$\|\vec{v}_t\| \left(\frac{d}{dt} \|\vec{v}_t\| - c''_\varepsilon \|\vec{v}_t\| \right) \leq \|\vec{f}_t\| \|\vec{v}_t\|,$$

откуда нетрудно заключить, что

$$\|\vec{v}_t(x, t)\| \leq e^{c''_\varepsilon t} \left[\|\vec{v}_t(x, 0)\| + \int_0^t e^{-c''_\varepsilon \tau} \|\vec{f}_\tau(x, \tau)\| d\tau \right] \equiv D(t) \leq D(T). \quad (45)$$

После этого мы снова возвращаемся к соотношению (44). Интегрируя его по t от 0 до T , отбрасывая в левой части неотрицательный член $\|\vec{v}_t(x, t)\|^2$ и деля полученное неравенство на $\frac{\gamma}{2}$, найдем:

$$\int_0^T F^2(t) dt \leq \frac{1}{\gamma} \left[\|\vec{v}_t(x, 0)\|^2 + 2c_\varepsilon'' T D^2(T) + \right. \\ \left. + 2D(T) \int_0^T \|\vec{f}_t\| dt \right] \equiv c_9^2.$$

С другой стороны, в силу определения φ и F ,

$$\frac{1}{2} \frac{d\varphi^2(t)}{dt} = \varphi(t) \varphi_t(t) = \sum \vec{v}_x \vec{v}_{xt} \leq \varphi(t) F(t);$$

следовательно,

$$\int_0^t \varphi_t dt = \varphi(t) - \varphi(0) \leq \int_0^t F dt \leq \sqrt{t \int_0^t F^2 dt}.$$

Отсюда и из полученной для F оценки имеем:

$$\varphi(T) = \varphi(0) + K \leq \varphi(0) + \sqrt{T \int_0^T F^2 dt} \leq \varphi(0) + c_9 \sqrt{T}.$$

Это неравенство и дает оценку снизу для T :

$$c_9 \sqrt{T} \geq K > 0.$$

Тем самым лемма 9 доказана.

Замечание. Как отмечалось во введении, во всех леммах этого параграфа \vec{f} можно считать вектором из $J^0(Q)$, т. е. вектором, ортогональным всем градиентным векторам. Если бы \vec{f} содержало и градиентную часть, то мы отнесли бы ее к $\text{grad } p$ в системе (1).

§ 4. Доказательство существования решения задачи (2)

Для задачи (2) мы можем доказать существование обобщенного решения во всех постановках в цилиндре $Q_T = \Omega \times [0, T]$ произвольных размеров, а также исследовать зависимость его дифференциальных свойств от данных задачи. Здесь мы приведем доказательство существования обобщенного решения в третьей постановке. Доказательство же существования решения в первой и второй постановках проводится вполне аналогично (и даже проще) задаче (1). Ниже, в § 5, мы приведем его для задачи (1). Разобьем цилиндр Q_T плоскостями $t_p = ph$, $p = 1, \dots, m$, и на каждом сечении Ω_p определим функцию $\vec{v}_h(x, ph)$ из условий:

$$\left. \begin{aligned} \vec{v}_t(x, ph) - \nu \Delta \vec{v}(x, ph) + v_k(x, (p-1)h) \frac{\partial \vec{v}(x, ph)}{\partial x_k} &= \vec{f}(x, ph), \\ \vec{v}(x, 0) &= \vec{a}(x), \quad \vec{v}|_S = 0, \end{aligned} \right\} \quad (2_h)$$

где

$$\vec{v}_t^-(x, ph) = \frac{1}{h} [\vec{v}(x, ph) - \vec{v}(x, (p-1)h)].$$

Если мы предположим, что функции \vec{a} и \vec{f} непрерывны и удовлетворяют по x условию Гёльдера с каким-либо положительным показателем γ , то система равенств (2_h) определяет функцию $\vec{v}_h(x, ph)$, $p = 1, 2, \dots$, непрерывную в $\bar{\Omega}$, дважды непрерывно дифференцируемую внутри Ω и имеющую конечный интеграл Дирихле. Будем теперь по какому-нибудь закону неограниченно уменьшать h : $h \rightarrow 0$. Для совокупности функций $\{\vec{v}_h\}$ справедливы две оценки:

ЛЕММА 1'. Для всех $h > 0$ справедливо неравенство

$$|\vec{v}_h| \leq c'_1, \quad (46)$$

где постоянная c'_1 определяется лишь T и $\max(|\vec{a}|, |\vec{f}|)$.

Эта лемма может быть доказана так же, как лемма 1 § 2. Действительно, для системы (2_h) справедлив «принцип максимума» в той же форме, что и для системы (2), ибо в точке (x, ph) , $x \in \Omega$, где \vec{v}_h^2 принимает наибольшее значение по сравнению с точками (x', lh) , $l \leq p$, $x' \in \Omega$, имеет место неравенство

$$(\vec{v}_h, \vec{v}_{ht}^-) \geq 0.$$

Постоянная c'_1 определяется теми же величинами, что и постоянная c_1 в лемме 1, т. е. величинами T и $\max(|\vec{a}|, |\vec{f}|)$.

ЛЕММА 2'. Для всех $h > 0$ справедливо неравенство:

$$h \sum_{s=1}^p \left[h \|\vec{v}_{ht}^-(x, sh)\|^2 + \sum_k \|\vec{v}_{hx_k}(x, sh)\|^2 \right] \leq c'_2, \quad (47)$$

где постоянная c'_2 определяется лишь γ , T , c'_1 и $\int_0^T \|\vec{f}\| dt$.

Доказательство. Легко проверить, что для любой функции \vec{u} , заданной на слоях $t = sh$, $s = 0, 1, \dots, m$, справедливо равенство:

$$\begin{aligned} h \sum_{s=1}^m (\vec{u}_t^-(x, sh), \vec{u}(x, sh)) &= \frac{1}{2} h \sum_{s=1}^m h \|\vec{u}_t^-(x, sh)\|^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \|\vec{u}(x, mh)\|^2 - \frac{1}{2} \|\vec{u}(x, 0)\|^2. \end{aligned} \quad (48)$$

Воспользуемся им для преобразования равенства

$$h \sum_{s=1}^p (L_h \vec{v}_h, \vec{v}_h) = h \sum_{s=1}^p (\vec{f}, \vec{v}_h).$$

Мы имеем:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \|\vec{v}_h(x, ph)\|^2 + h \sum_{s=1}^p \left[\gamma \sum_k \|\vec{v}_{hx_k}\|^2 + \frac{1}{2} h \|\vec{v}_{ht}^-\|^2 + (v_{hk} \vec{v}_{hx_k}, \vec{v}_h) \right] = \\ = \frac{1}{2} \|\vec{a}\|^2 + h \sum_{s=1}^p (\vec{f}, \vec{v}_h), \end{aligned}$$

откуда следует:

$$h \sum_{s=1}^p \left[\nu \sum_k \|\vec{v}_{hx_k}\|^2 + \frac{1}{2} h \|\vec{v}_{ht}\|^2 \right] \leq c_{10} + c_{10} h \sum_{s=1}^p \sum_k \|\vec{v}_{hx_k}\|,$$

а из этого неравенства вытекает утверждение нашей леммы.

Построим по \vec{v}_h непрерывные функции $\vec{v}'_h(x, t)$, совпадающие с $\vec{v}_h(x, ph)$ при $t = ph$ и линейные по t для $t \neq ph$. Они, очевидно, имеют обобщенные производные по x_k и t из $L_2(Q_T)$ и для них, в силу (46) и (47), справедливы оценки:

$$|\vec{v}'_h| \leq c'_1, \quad h \int_0^T \left\| \frac{\partial \vec{v}'_h}{\partial t} \right\|^2 dt + \sum_k \int_h^T \|\vec{v}'_{hx_k}\|^2 dt \leq c'_2. \quad (49)$$

В силу этих неравенств, семейство функций $\{\vec{v}'_h\}$ равномерно ограничено и равномерно непрерывно в $L_2(Q_T)$. Поэтому можно выбрать такую последовательность $\{h'\}$, для которой $\vec{v}'_{h'}$ сходится в $L_2(Q_T)$ к некоторой функции $\vec{v}(x, t)$, а $\frac{\partial \vec{v}'_{h'}}{\partial x_k}$ сходятся слабо в $L_2(Q_T)$ к ее обобщенным производным $\frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k}$. К этим же пределам и в том же смысле сходятся и кусочно-непрерывные функции $\vec{v}_h^\pm(x, t)$, определяемые условиями:

$$\vec{v}_h^+(x, t) = \vec{v}_h(x, kh),$$

$$\vec{v}_h^-(x, t) = \vec{v}_h(x, (k+1)h) \text{ для } t \in [kh, (k+1)h]$$

[см. (14), стр. 48—58]. Покажем, что предельная функция \vec{v} есть иско-
мое обобщенное решение задачи (2). Для этого осталось проверить, что
она удовлетворяет интегральному тождеству (5) при всех указанных
в определении функциях $\vec{\Phi}(x, t)$. Однако легко видеть, что это тожде-
ство достаточно установить лишь для непрерывно дифференцируемых
 $\vec{\Phi}$, равных нулю на S , и при $t = T$. Возьмем одну такую функцию $\vec{\Phi}$.
Умножим первое из равенств (2_h) скалярно на $h\vec{\Phi}$, результат проинтег-
рируем по Ω и просуммируем по p от 1 до $m = \frac{T}{h}$:

$$h \sum_{p=1}^m \left[(\vec{v}_{ht}, \vec{\Phi}) - \nu (\Delta \vec{v}_h, \vec{\Phi}) + (v_{h_k}(x, t-h) \frac{\partial \vec{v}_h}{\partial x_k}, \vec{\Phi}) \right] = h \sum_{p=1}^m (\vec{f}, \vec{\Phi}).$$

Преобразуем это равенство при помощи формул интегрирования и сум-
мирования по частям, учитывая также, что $\vec{\Phi}(x, mh) = \vec{\Phi}|_S = 0$:

$$\begin{aligned} & -h \sum_{p=0}^{m-1} (\vec{v}_h, \vec{\Phi}_t) - (\vec{a}, \vec{\Phi}(x, 0)) + h \sum_{p=1}^m [\nu (\vec{v}_{hx_k}, \vec{\Phi}_{x_k}) + \\ & + (v_{h_k}(x, t-h) \vec{v}_{hx_k}, \vec{\Phi})] = h \sum_{p=1}^m (\vec{f}, \vec{\Phi}). \end{aligned}$$

Перепишем последнее равенство в виде интегрального соотношения, используя введенные выше восполнения функций, заданных на слоях:

$$\int_0^T (\vec{v}_h^+, \vec{\Phi}_t^+) dt + (\vec{a}, \vec{\Phi}(x, 0)) - \int_0^T [\nu (\vec{v}_{hx_k}^-, \vec{\Phi}_{x_k}^-) + (\vec{v}_{hx_k}^+, \vec{\Phi}_{x_k}^-)] dt = \int_0^T (\vec{f}^-, \vec{\Phi}^-) dt.$$

В этом соотношении можно перейти к пределу по выбранной выше последовательности $\{h'\}$, в результате чего убедимся, что найденная функция удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_0^T \left[\left(\vec{v}, \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial t} \right) - \nu (\vec{v}_{x_k}, \vec{\Phi}_{x_k}) + (v_k \vec{v}, \vec{\Phi}_{x_k}) \right] dt + (\vec{a}, \vec{\Phi}(x, 0)) = \int_0^T (\vec{f}, \vec{\Phi}) dt,$$

а следовательно, является обобщенным решением задачи (2).

Итак, доказана следующая

ТЕОРЕМА 3. Если \vec{a} и \vec{f} суть непрерывные функции, удовлетворяющие условию Гёльдера по x с какими-либо положительными показателями γ , то задача (2) имеет обобщенное решение в смысле постановки 3. Единственность его доказана выше, в § 2. Для этого решения верны неравенства:

$$|\vec{v}| \leq c'_1, \quad \int_0^T \sum_k \|\vec{v}_{x_k}\|^2 dt \leq c'_2,$$

где постоянные c'_1 и c'_2 определяются лишь величинами $\nu, T, \max(|\vec{a}|, |\vec{f}|)$.

Замечание. Теорема остается в силе, если относительно \vec{a} и \vec{f} известно лишь, что они суть ограниченные функции аргументов. Это нетрудно доказать дополнительным предельным переходом, используя теорему 3 и то, что постоянные c'_1 и c'_2 зависят лишь от $\max(|\vec{a}|, |\vec{f}|)$.

§ 5. Доказательство существования решения задачи (1)

Мы докажем существование обобщенного решения задачи (2) во второй, а тем самым и в первой постановках. Это можно сделать или так, как в § 4, используя метод Роте, или используя метод Галеркина. Ради разнообразия остановимся на методе Галеркина. Обозначим через $J_{0,1}(\Omega)$ гильбертово пространство вектор-функций $\vec{v}(x)$, полученное пополнением множества непрерывно дифференцируемых соленоидальных (т. е. имеющих дивергенцию, равную нулю) векторов, равных нулю в пограничной полоске, в норме

$$\|\vec{v}\|_{w_2^1} \equiv \sqrt{\sum_k \|\vec{v}_{x_k}\|^2 + \|\vec{v}\|^2}.$$

Скалярное произведение в $J_{0,1}(\Omega)$ определим равенством

$$(\vec{v}, \vec{u})_{w_2^1} = \sum_k (\vec{v}_{x_k}, \vec{u}_{x_k}) + (\vec{v}, \vec{u}).$$

Возьмем в $J_{0,1}(\Omega)$ базис $\{\vec{\psi}^k(x)\}$, $k = 1, 2, \dots$, ортонормированный в $L_2(\Omega)^*$:

$$(\vec{\psi}^k, \vec{\psi}^m) = \int_{\Omega} \vec{\psi}^k \vec{\psi}^m dx = \delta_k^m,$$

причем в качестве $\vec{\psi}^0$ возьмем вектор $\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ (так что считаем $\vec{a} \in J_{0,1}(\Omega)$).

Приближенное решение \vec{v}^n задачи (1) будем искать в виде

$$\vec{v}^n(x, t) = \sum_{k=0}^n c_{kn}(t) \vec{\psi}^k(x)$$

из условий

$$c_{kn}(0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad c_{0n} = \|\vec{a}\|,$$

$$\left(\frac{\partial \vec{v}^n}{\partial t} + v_p^n \frac{\partial \vec{v}^n}{\partial x_p} - \vec{f}, \vec{\psi}^k \right) + \nu \left(\frac{\partial \vec{v}^n}{\partial x_p}, \frac{\partial \vec{\psi}^k}{\partial x_p} \right) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (50)$$

или, что то же, из условий:

$$\left(\frac{\partial \vec{v}^n}{\partial t} - \vec{f}, \vec{\psi}^k \right) - (v_p^n \vec{v}^n, \vec{\psi}_{x_p}^k) + \nu (\vec{v}_{x_p}^n, \vec{\psi}_{x_p}^k) = 0. \quad (51)$$

Равенства (51) являются системой обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{dc_{kn}}{dt} - \nu \sum_{i=0}^n a_{ki} c_{in} + \sum_{i,s=0}^n a_{kis} c_{in} c_{sn} = f_k, \quad (52)$$

где a_{ki} и a_{kis} — постоянные числа, а $f_k = (\vec{f}, \vec{\psi}^k)$.

Мы докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4. Если $\vec{a} \in J_{0,1}(\Omega) \cap W_2^2(\Omega)$, а \vec{f} и $\vec{f}_t \in L_2(Q_l)$, $Q_l = \Omega \times [0, l]$, то задача (1) имеет обобщенное решение в смысле постановки 2 во всяком случае в цилиндре $Q_T = \Omega \times [0, T]$, высота которого T не меньше некоторого числа, определяемого числами $\nu, \|\vec{a}\|_{W_2^2(\Omega)}, \|\vec{f}, \vec{f}_t\|_{L_2(Q_l)}$ и размерами области Ω .

Доказательство. Свободные члены f_k системы (52), в силу наших предположений о \vec{f} , являются непрерывными функциями t с локально квадратично-суммируемой производной. Покажем, что система (52) при начальных условиях (50) однозначно разрешима для всех $t \geq 0$. Так как левая часть ее аналитически зависит от неизвестных c_{kn} , то для этого достаточно установить, что решение ее ограничено на любом промежутке

* Ортонормированность $\{\vec{\psi}^k\}$ предполагаем лишь ради сокращения изложения

$0 \leq t \leq l$. Но последнее действительно имеет место, так как, умножая (51) на c_{kn} и складывая по k от 0 до n , найдем:

$$(\vec{v}_t^n + v_p^n \vec{v}_{x_p}^n - \vec{f}, \vec{v}^n) + \nu (\vec{v}_{x_k}^n, \vec{v}_{x_k}^n) = 0, \quad (53)$$

откуда легко получается (см. лемму 6), что

$$\|\vec{v}^n(x, t)\| = \sqrt{\sum_{k=0}^n c_{kn}^2(t)} \leq \|\vec{a}\| + \int_0^t \|\vec{f}(x, \tau)\| d\tau.$$

Итак, то, что $c_{kn}(t)$ однозначно определяются условиями (50), (51) на всем промежутке $0 \leq t \leq \infty$, доказано. Покажем теперь, что при $n \rightarrow \infty$ функции \vec{v}^n сходятся к некоторой функции \vec{v} , которая и будет искомым обобщенным решением задачи (1). Для этого достаточно доказать, что существует такое $T > 0$, для которого

$$\sum_0^T \sum_k \|\vec{v}_{x_k t}^n\|^2 dt \leq \text{const} \quad (54)$$

при всех $n = 1, 2, \dots$

Действительно, если соотношение (54) установлено, то из последовательности $\{n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{n_k\}$, для которой \vec{v}^{n_k} будут сходить в норме $L_4(\Omega)$ равномерно относительно $t \in [0, T]$ к некоторой функции \vec{v} [см. (13)], а $\frac{\partial \vec{v}^n}{\partial t}, \frac{\partial \vec{v}^n}{\partial x_k}, \frac{\partial^2 \vec{v}^n}{\partial t \partial x_k}$ будут сходить слабо в $L_2(Q_T)$ к соответствующим производным. Для \vec{v}^n справедливо интегральное тождество (4) с

$$\vec{\Phi}(x, t) = \sum_{k=0}^n d_k(t) \vec{\psi}^k(x), \quad (55)$$

где $d_k(t)$ — произвольные непрерывные функции, имеющие квадратично-суммируемую на $[0, T]$ производную по t . Действительно, умножая (51) на d_k , складывая по k от 0 до n и интегрируя по t от 0 до T , мы придем к тождеству, которое легко преобразуется к виду (4):

$$\int_0^T \left\{ \left(\frac{\partial \vec{v}^n}{\partial t}, \vec{\Phi} \right) - (v_k^n \vec{v}^n, \vec{\Phi}_{x_k}) + \nu (\vec{v}_{x_k}^n, \vec{\Phi}_{x_k}^n) - (\vec{f}, \vec{\Phi}) \right\} dt = 0. \quad (56)$$

Переходя в этом тождестве к пределу по выбранной выше подпоследовательности n_k (при закрепленной функции $\vec{\Phi}$), мы убедимся, что предельная функция \vec{v} действительно удовлетворяет тождеству (4) при всех $\vec{\Phi}$ вида (55). Но так как $\{\vec{\psi}^k\}$ есть базис в $J_{0,1}(\Omega)$, то любую $\vec{\Phi}$ из класса, указанного в определении обобщенного решения (см. стр. 658), можно приблизить в $L_2(Q_T)$ вместе с ее производными $\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial x_k}$ функциями вида (55), следовательно, найденная нами функция действительно является искомым решением задачи (1). В силу теоремы единственности для таких реше-

ний, вся последовательность \vec{v}^n сходится к \vec{v} . Итак, для полного доказательства теоремы нам осталось показать справедливость неравенства (54). Это выводится из (51) так же, как мы это сделали выше, в § 3, в леммах 7—9. Действительно, продифференцируем (51) по t , затем умножим на $\frac{dc_{kn}}{dt}$ и просуммируем по k от 0 до n . В результате элементарных преобразований получим:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\vec{v}_t^n\|^2 + \nu \sum_k \|\vec{v}_{tx_k}^n\|^2 + (\vec{v}_{kt}^n \vec{v}_{x_k}^n, \vec{v}_t^n) - (\vec{f}_t, \vec{v}_t^n) = 0.$$

Это равенство совпадает с равенством (24) § 4. Из него и из равенства (53), которое совпадает с (23), мы вывели в этих леммах оценку для \vec{v}_{tx_k} и подсчитали нижнюю положительную границу для T . Таким образом, теорема доказана.

Если же выполнены условия леммы 7, то оценка (54) имеет место при любом T и потому справедлива

ТЕОРЕМА 5. Если $\vec{f} \equiv 0$ (т. е. внешние силы имеют потенциал) и выполнено условие

$$\|\vec{a}\| \|L\vec{a}\| < \frac{\nu^3}{\beta^2}, \quad \beta = \sqrt{3} c_\Omega^2,$$

то задача (1) имеет единственное обобщенное решение при любом T . Это решение при $t \rightarrow \infty$ стремится к нулю как элемент $W_2^1(\Omega)$.

Существование решения для всех $t \geq 0$ при условиях теоремы следует, как мы только что показали, из лемм 6 и 7. Для этого решения справедливо неравенство

$$\|v(x, t)\|^2 + \nu \int_0^t \sum_k \|\vec{v}_{x_k}\|^2 d\tau \leq \|\vec{a}\|^2$$

(см. § 3 и неравенство (26)) и неравенство

$$\|\vec{v}_t(x, t)\|^2 + 2\nu \int_0^t \sum_k \|\vec{v}_{tx_k}\|^2 d\tau \leq \|\vec{v}_t(x, 0)\|^2$$

(см. § 3, лемма 7). В силу этих неравенств, для непрерывной неотрицательной функции

$$\chi(t) = \sum_k \|\vec{v}_{x_k}(x, t)\|^2$$

имеем:

$$\int_0^\infty \chi(t) dt + \int_0^\infty |\chi'(t)| dt < \infty.$$

Но тогда существует последовательность точек $t_k \rightarrow \infty$, для которой $\chi(t_k) \rightarrow 0$. С другой стороны, для $t \geq t_k$

$$\chi(t) = \chi(t_k) + \int_{t_k}^t \chi'(\tau) d\tau \leq \chi(t_k) + \int_{t_k}^\infty |\chi'| d\tau,$$

откуда и следует, что $\chi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Теорема доказана.

Исследование дифференциальных свойств обобщенного решения проводится тем же способом, каким это было сделано для линейных задач в работе ⁽¹⁴⁾. О получении необходимых для этого априорных оценок для \vec{u} сказано выше в § 3.

Поступило
16. III. 1957

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ К и с е л е в А. А., Нестационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в ограниченной трехмерной области, Доклады Ак. наук СССР, т. 106, № 1 (1956), 27—30.
- ² К и с е л е в А. А., О нестационарном течении вязкой жидкости при наличии внешних сил, Доклады Ак. наук СССР, т. 100, № 5 (1955), 871—874.
- ³ L e r a y J., Étude de diverses équations, intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'Hydrodynamique, J. Math. pures et appl., s. IX, t. XII, Fasc. № 1 (1933), 1—82.
- ⁴ L e r a y J., Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueux que limitent des parois, J. Math. pures et appl., s. IX, t. 13, Fasc. № 4 (1934), 331—418.
- ⁵ L e r a y J., Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace, Acta Math., 63 (1934), 193—248.
- ⁶ Н о р ф Е., Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen, Math. Nachrichten, Bd 4 (1950/51), 213—231.
- ⁷ К р е й н С. Г., Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве и их приложение в гидромеханике, Успехи матем. наук, т. XII, в. 1 (73) (1957), 208—211.
- ⁸ В и ш и к М. И. и Л а д ы ж е н с к а я О. А., Краевые задачи для уравнений в частных производных и некоторых классов операторных уравнений, Успехи матем. наук, т. XI, вып. 6 (1956), 41—98.
- ⁹ Л а д ы ж е н с к а я О. А., Первая краевая задача для квазилинейных параболических уравнений, Доклады Ак. наук СССР, т. 107, № 5 (1956), 636—639.
- ¹⁰ Л а д ы ж е н с к а я О. А., О построении разрывных решений квазилинейных гиперболических уравнений как пределов решений соответствующих параболических уравнений при стремлении коэффициента вязкости к нулю, Доклады Ак. наук СССР, т. 111, № 2 (1956), 291—294.
- ¹¹ W e y l H., The method of orthogonal projection in potential theory, Duke Math. J., v. 7 (1940), 411—444.
- ¹² С о б о л е в С. Л., Об одной новой задаче для систем уравнений в частных производных, Доклады Ак. наук СССР, 81, № 6 (1951), 1007—1009.
- ¹³ С о б о л е в С. Л., Некоторые применения функционального анализа к математической физике, Изд. ЛГУ, 1950.
- ¹⁴ Л а д ы ж е н с к а я О. А., Смешанная задача для гиперболического уравнения, Гостехиздат, 1953.
- ¹⁵ Л а д ы ж е н с к а я О. А., О замыкании эллиптического оператора, Доклады Ак. наук СССР, т. 79, № 5 (1951), 723—725.
- ¹⁶ Л а д ы ж е н с к а я О. А., О разрешимости основных краевых задач для уравнений параболического и гиперболического типов, Доклады Ак. наук СССР, т. 97, № 3 (1954), 395—398.
- ¹⁷ Л а д ы ж е н с к а я О. А., Простое доказательство разрешимости основных краевых задач и задачи о собственных значениях для линейных эллиптических уравнений, Вестник ЛГУ, 11(1955), 23—29.

В. С. ВЛАДИМИРОВ

ОБ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ПЕРЕНОСА ЧАСТИЦ

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым)

Работа посвящена обобщению и перенесению результатов, полученных автором в работе (3) для стационарного односкоростного уравнения переноса частиц при изотропном рассеянии, на случай анизотропного рассеяния.

§ 1. Введение. Основные предположения. Как известно, стационарные моноэнергетические процессы переноса частиц (например, перенос лучистой энергии в атмосфере, диффузия нейтронов в веществе и др.) описываются линейным интегро-дифференциальным уравнением вида*:

$$\frac{1}{a(P)}(s, \text{grad } \varphi) + \varphi = \lambda \int_{\Omega} \theta(P, s, s') \varphi(s', P) ds' + F(s, P). \quad (1.1)$$

Неизвестная функция $\varphi(s, P)$ в уравнении (1.1) обозначает плотность частиц, летящих в направлении $s = (s_1, s_2, \dots, s_n, \sum_{i=1}^n s_i^2 = 1)$ из данной точки $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Назовем фазовым пространством $\Omega \times R_n$ ($2n-1$ -мерное множество пар точек (s, P)), где P пробегает n -мерное евклидово пространство R_n , а s пробегает $(n-1)$ -мерное многообразие Ω — множество всех единичных векторов направлений в R_n . Таким образом, точки (s, P) из фазового пространства $\Omega \times R_n$ можно отождествить с множеством всех несвободных единичных векторов в R_n , точки приложения которых P пробегает R_n , а направления s пробегает Ω .

Обозначим через G n -мерное открытое ограниченное множество, где происходит процесс переноса частиц; пусть Γ обозначает границу G . Мы будем рассматривать уравнение (1.1) в фазовой области $\Omega \times G$.

В уравнении (1.1) символ $(s, \text{grad } \varphi)$ обозначает скалярное произведение векторов s и $\text{grad } \varphi$ в R_n , т. е. производную функцию $\varphi(s, P)$ в точке P вдоль направления s :

$$(s, \text{grad } \varphi) = \sum_{i=1}^n s_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi(s, Q + \xi s) \Big|_{\xi=0}. \quad (1.2)$$

* Подробности по поводу физического содержания уравнения (1.1) и библиографию вопроса можно найти в монографии С. Чандрасекара (1) и в обзоре Г. Судэка, Ф. Адлера, Е. Грейлинга (2).

К уравнению (1.1) нужно присоединить граничные условия. Для ограниченной и выпуклой области G с кусочно-гладкой границей Γ граничное условие может быть записано в виде

$$\varphi(s, P) = 0 \text{ при } P \in \Gamma \text{ и } (s, n_P) \leq 0, \quad (1.3)$$

где n_P обозначает единичный вектор внешней нормали в точке $P \in \Gamma$. Для невыпуклой области G граничные условия записываются сложнее и будут приведены ниже. Физические основания для формулировки граничных условий суть следующие: а) отсутствие падающего извне потока частиц в G и б) вне G поток частиц распространяется прямолинейно и плотность его не изменяется.

В работе (3), § 1 введена мера в фазовом пространстве $\Omega \times R_n$ и соответствующий ей процесс интегрирования. Обозначим через ω_n площадь поверхности единичной сферы в R_n , т. е.

$$\int_{\Omega} ds = \omega_n.$$

Мы будем предполагать, что почти все прямые линии, имеющие с G общую точку, пересекают G по конечному числу интервалов. Сформулируем последнее условие в аналитической форме. Обозначим через π_s ортогональную проекцию G на плоскость, перпендикулярную направлению s и проходящую через некоторую фиксированную точку O . Множество π_s — $(n-1)$ -мерное, открытое и ограниченное. Пусть Q обозначает переменную точку π_s . Проведем через Q прямую, параллельную направлению s , $\{Q + \xi s, -\infty < \xi < \infty\}$. Обозначим через $\pi_{s,Q}$ множество, получающееся от пересечения указанной прямой с G . По построению, $\pi_{s,Q}$ — непустое, одномерное, открытое и ограниченное множество. В силу нашего предположения, для почти всех точек $(s, Q) \in \Omega \times \pi_s$ множество $\pi_{s,Q}$ представляет собой соединение конечного числа интервалов:

$$\pi_{s,Q} = \sum_{i=1}^{N(s,Q)} \{Q + \xi s, \xi_i(s, Q) < \xi < \eta_i(s, Q)\}. \quad (1.4)$$

Интервалы в (1.4) можно считать занумерованными так, что выполнены неравенства $\eta_i \leq \xi_{i+1}$. Кроме того, $0 < \eta_N - \xi_1 \leq d$, где d — диаметр G .

Формула (1.4) дает разложение G при каждом s на декартово произведение π_s и $\pi_{s,Q}$, $G = \pi_s \times \pi_{s,Q}$. Это разложение выражает взаимно однозначное преобразование точек $P \in G$ в точки $(Q, \xi) = \pi_s \times \pi_{s,Q}$ по формуле

$$P = Q + \xi s. \quad (1.5)$$

Имеет место следующее утверждение [см. (3), § 1], связанное с преобразованием (1.5): для того чтобы функция $F(s, P)$ была суммируема на $\Omega \times G$, необходимо и достаточно, чтобы функция $F(s, Q + \xi s)$ была суммируема на $\Omega \times \pi_s \times \pi_{s,Q}$, причем имеет место равенство:

$$\int_{\Omega \times G} F(s, P) ds dP = \int_{\Omega \times \pi_s \times \pi_{s,Q}} F(s, Q + \xi s) ds dQ d\xi.$$

Коэффициент $a(P)$, входящий в уравнение (1.1), предполагаем вещественным, измеримым, почти всюду положительным и ограниченным на G , $0 < a(P) \leq \alpha$. Кроме того, предполагаем, что

$$\int_G \frac{1}{a(P)} dP < \infty. \quad (1.6)$$

Введем гильбертово пространство \mathfrak{H} вещественных функций, суммируемых с квадратом на $\Omega \times G$ по весу $a(P)$, положив

$$(\varphi, \psi) = \int_{\Omega \times G} a(P) \varphi(s, P) \psi(s, P) ds dP, \quad \|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}, \quad \varphi, \psi \in \mathfrak{H}.$$

Предполагаем, что свободный член F в уравнении (1.1) принадлежит пространству \mathfrak{H} ; λ — некоторый вещественный параметр.

Сформулируем ограничения на функцию $\theta(P, s, s')$:

а) $\theta(P, s, s')$ измерима и почти всюду положительна на $\Omega \times \Omega \times G$.

б) При почти всех $(s, P) \in \Omega \times G$ функция $\theta(P, s, s')$ суммируема на Ω :

$$\int_{\Omega} \theta(P, s, s') ds' \leq \beta \omega_n. \quad (1.7)$$

в) При почти всех $(s, s', P) \in \Omega \times \Omega \times G$ функция $\theta(P, s, s')$ удовлетворяет условиям:

$$\theta(P, s, s') = \theta(P, s', s) = \theta(P, s, -s'). \quad (1.8)$$

г) Для всех функций F из \mathfrak{H} имеет место неравенство:

$$\int_{\Omega \times G} a(P) F(s, P) \int_{\Omega} \theta(P, s, s') F(s', P) ds' ds dP \geq 0. \quad (1.9)$$

д) Функция $\theta(P, s, s')$ удовлетворяет одному из следующих двух условий:

д₁) Функция $\theta(P, s, s')$ есть сумма конечного числа слагаемых вида $b_i(P) \theta_i[(s, s')]$:

$$\theta(P, s, s') = \sum_i b_i(P) \theta_i[(s, s')], \quad (1.10)$$

где функции $b_i(P)$ и $\theta_i(\mu)$ измеримы и удовлетворяют условиям:

$$0 < b_i(P) \leq \beta_i, \quad 0 < \theta_i(\mu) = \theta_i(-\mu), \quad \int_{-1}^1 \theta_i(\mu) d\mu < \infty. \quad (1.11)$$

Условия (1.10) и (1.11), очевидно, обеспечивают выполнение условий а) — в).

д₂) Функция $\theta(P, s, s')$ суммируема с q -й степенью ($q > 1$) по s' на Ω при почти всех $(s, P) \in \Omega \times G$, причем

$$\int_{\Omega} \theta^q(P, s, s') ds' \leq C. \quad (1.12)$$

Приведем пример функции $\theta(P, s, s')$, удовлетворяющей условиям а) — д) при $n = 3$. Пусть функция $\theta(\mu)$, $-1 \leq \mu \leq 1$, удовлетворяет следующим условиям:

$$\theta(\mu) = \theta(-\mu) > 0, \quad \int_0^1 \theta^2(\mu) d\mu < \infty,$$

$$c_k = \int_{-1}^1 \theta(\mu) P_k(\mu) d\mu \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $P_k(\mu)$ обозначают полиномы Лежандра. Тогда функция $\theta[(s, s')]$ удовлетворяет условиям а)—д). Выполнение условий а)—в) и д) очевидно. Условие г) следует из условия $c_k \geq 0$ и из теоремы Эрдейи [см. (4)], согласно которой характеристические числа ядра $\theta[(s, s')]$ суть $\frac{2k+1}{4\pi c_k} > 0$.

Фиксируем некоторое $s \in \Omega$ и обозначим через Γ_s $(n-1)$ -мерное многообразие в R_n :

$$\Gamma_s = \{Q + \eta_N(s, Q)s, Q \in \pi_s\}. \quad (1.13)$$

Из (1.13) следует [см. также (3), § 1], что

$$\Gamma_{-s} = \{Q + \eta_N(-s, Q)(-s), Q \in \pi_{-s}\} = \{Q + \xi_1(s, Q)s, Q \in \pi_s\}. \quad (1.14)$$

Легко видеть, что если в точке $P \in \Gamma_s$ существует внешняя нормаль n_P к поверхности Γ , то

$$(s, n_P) \geq 0. \quad (1.15)$$

Если граница Γ такова, что при всех s Γ_s есть совокупность конечного числа кусков кусочно-гладких поверхностей, то, в силу (1.14) и (1.15), граничное условие (1.3) можно записать в виде

$$\varphi(s, P) = 0, \quad (s, P) \in \Omega \times \Gamma_{-s}. \quad (1.16)$$

Примем следующее обозначение. Пусть для некоторой функции $\varphi(s, P)$ существует интеграл, стоящий в левой части выражения (1.17). Мы будем обозначать этот интеграл символом, стоящим в правой части выражения (1.17):

$$\int_{\Omega \times \pi_s} \varphi(s, Q + \eta_N s) ds dQ = \int_{\Omega \times \Gamma_s} (s, n_P) \varphi(s, P) ds d\Gamma(P). \quad (1.17)$$

Заметим, что если функция $\varphi(s, P)$ непрерывна на $\Omega \times \Gamma_s$ и при всех s Γ_s есть совокупность конечного числа кусков кусочно-гладких поверхностей, то равенство (1.17) справедливо в классическом смысле и дает связь между поверхностными интегралами I и II родов.

Цель этой работы — построить математическую теорию уравнения (1.1) при сформулированных предположениях. При $\theta(P, s, s') = b(P)$ уравнение (1.1) изучалось в работе (3), на некоторые результаты которой мы будем опираться.

§ 2. Постановка задачи. Определим класс функций D , в котором будем искать решение уравнения (1.1). Множество функций D будет одновременно и областью задания линейного дифференциального выражения $l\varphi$, стоящего в левой части уравнения (1.1). В силу (1.2) и (1.5), выражение $l\varphi$ примет следующий вид в точке $(s, P) = (s, Q, \xi)$:

$$l\varphi \equiv \frac{1}{a(P)}(s, \text{grad } \varphi) + \varphi \equiv \frac{1}{a(Q+\xi s)} \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi(s, Q + \xi s) + \varphi(s, Q + \xi s). \quad (2.1)$$

К классу D отнесем функции φ , обладающие следующими свойствами (при почти всех $(s, Q) \in \Omega \times \pi_s$):

1) $\varphi(s, Q + \xi s)$ абсолютно непрерывна на замкнутом множестве $\bar{\pi}_{s,Q} = \sum_{i=1}^N \{Q + \xi s, \xi_i \leq \xi \leq \eta_i\}$;

2) $\varphi(s, Q + \xi s)$ удовлетворяет граничным условиям:

а) $\varphi(s, Q + \xi_1, s) = 0$ и

б) $\varphi(s, Q + \xi_{i+1}s) = \varphi(s, Q + \eta_i s)$, $i = 1, 2, \dots, N-1$;

3) Функция φ должна быть такой, что $l\varphi \in \mathfrak{H}$.

Имеют место следующие неравенства типа теорем вложения [см. (3), § 1,2]: если $\varphi \in D$, то $\varphi \in \mathfrak{H}$, причем

$$\|\varphi\| \leq (1 - e^{-\alpha d}) \|l\varphi\|, \quad (2.2)$$

$$\int_{\Omega \times \Gamma_s} (s, n_P) \varphi^2(s, P) ds d\Gamma(P) \leq 2(1 - e^{-\alpha d}) \|l\varphi\|^2.$$

Множество функций D — линейное и содержится в \mathfrak{H} . В силу условий 1)–3) и (1.6), D содержит в себе непрерывно дифференцируемые функции, которые обращаются в нуль в пограничной полосе области $\Omega \times G$. Поэтому D плотно в \mathfrak{H} . Линейное дифференциальное выражение $l\varphi$, вместе с областью его задания D , определяет линейный оператор L с областью определения D .

Введем в D метрику при помощи скалярного произведения и соответствующей нормы:

$$(\varphi, \psi)_D = (L\varphi, L\psi), \quad \|\varphi\|_D = \sqrt{(\varphi, \varphi)_D} = \|L\varphi\|, \quad \varphi, \psi \in D.$$

В силу первого из неравенств (2.2), введенное скалярное произведение удовлетворяет соответствующим аксиомам. Таким образом, множество D мы превратили в гильбертово пространство (полнота его доказана в работе (3), § 2).

Приведем некоторые из свойств оператора L , доказанные в работе (3), § 2.

I. Оператор L^{-1} существует и ограничен в \mathfrak{H} , причем при всех $F \in \mathfrak{H}$

$$L^{-1}F = \int_0^d a(P - \xi s) F(s, P - \xi s) \exp \left[- \int_0^\xi a(P - \xi' s) d\xi' \right] d\xi, \quad (2.3)$$

$$\|L^{-1}\| \leq 1 - e^{-\alpha d}.$$

Здесь, как и в дальнейшем, предполагается, что функция $a(P)$ продолжена нулем вне G .

II. Если $\varphi \in D$ и $\psi \in D$, то имеет место формула [см. обозначение (1.17)]:

$$(\varphi, L\psi) + (\psi, L\varphi) = \int_{\Omega \times \Gamma_s} (s, n_P) \varphi(s, P) \psi(s, P) ds d\Gamma(P) + 2(\varphi, \psi).$$

В частности, при $\varphi = \psi$ имеем:

$$(\varphi, L\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega \times \Gamma_s} (s, n_P) \varphi^2(s, P) ds d\Gamma(P) + \|\varphi\|^2. \quad (2.4)$$

III. Существует оператор L^* , сопряженный с L , причем $L^* = ULU$. Область задания оператора L^* равна UD . Здесь U — оператор, действующий в пространстве \mathfrak{H} ,

$$\begin{aligned} UF(s, P) &= F(-s, P), \quad F \in \mathfrak{H}; \\ U &= U^* = U^{-1}, \quad \|U\| = 1. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Обозначим через S оператор, стоящий в правой части уравнения (1.1),

$$SF = \int_{\Omega} \theta(P, s, s') F(s', P) ds'. \quad (2.6)$$

Принимая во внимание введенные операторы L и S , запишем уравнение (1.1) в операторной форме:

$$L\varphi = \lambda S\varphi + F, \quad \varphi \in D. \quad (2.7)$$

Для уравнения (1.1) задача (2.7) ставится следующим образом: найти функцию φ из D , удовлетворяющую уравнению (1.1) при почти всех $(s, P) \in \Omega \times G$.

Сформулированная постановка задачи (2.7) для уравнения (1.1) является обобщенной как в смысле удовлетворения уравнению (почти всюду в $\Omega \times G$), так и в смысле удовлетворения граничным условиям: при почти всех $(s, Q) \in \Omega \times \pi_s$ функция $\varphi(s, P)$ стремится к соответствующим граничным значениям, если двигаться к границе Γ изнутри G вдоль прямой $Q + \xi s$. В частности, граничное условие 2а) есть соответствующая запись граничного условия (1.16) для произвольной границы Γ и негладкой функции $\varphi(s, P)$. Заметим, что из условий 1)–3), определяющих класс D , следует существование у функции $\varphi(s, P)$ обобщенных первых производных в смысле С. Л. Соболева [см. (6), гл. 1] вдоль почти всех направлений s из Ω , причем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} \equiv (s, \text{grad } \varphi) \in L_2(\Omega \times G).$$

Условия 1)–3) определяют класс D обобщенных решений уравнения (1.1) подобно тому, как обобщенные производные в смысле С. Л. Соболева (6), определенные первоначально как функционалы, охарактеризованы в терминах теории функций действительного переменного [см. (6)]. Этот класс обобщенных решений D оказывается настолько широким, что если его взять в качестве первоначальной области определения оператора L , то оператор L^{-1} существует и ограничен на всем пространстве \mathfrak{H} (см. свойство I).

Для определения обобщенных решений уравнения (1.1) можно также воспользоваться общей схемой построения разрешимого расширения положительно-определенного оператора (вообще говоря, несимметричного), данной М. И. Вишиком и О. А. Ладыженской [см. (7), гл. I, § 1], если за область первоначального определения оператора L взять множество достаточно гладких функций, удовлетворяющих соответствующим граничным условиям. Возможность применения указанной схемы обеспечивается равенством (2.4).

§ 3. Дальнейшие свойства операторов S и L . Изучим свойства оператора S , определенного формулой (2.6).

ЛЕММА 3.1. Оператор S существует и является ограниченным и самосопряженным в пространстве \mathfrak{H} , причем

$$\|S\| \leq \beta \omega_n. \quad (3.1)$$

Доказательство. Пусть $F \in \mathfrak{H}$. В силу теоремы Фубини, измеримая неотрицательная функция $a(P) \theta(P, s, s') |F(s', P)|$ суммируема на $\Omega \times \Omega \times G$, так как, на основании (1.7) и (1.8), существует повторный интеграл от нее,

$$\int_{\Omega \times G} \left[\int_{\Omega} \theta(P, s, s') ds \right] a(P) |F(s', P)| ds' dP \leq c \|F\|.$$

Отсюда и из (1.6) следует, что интеграл (2.6) существует при почти всех (s, P) и является измеримой функцией на $\Omega \times G$.

Докажем, что $SF \in \mathfrak{H}$. Принимая во внимание (1.7) и (1.8), при помощи неравенства Буняковского — Шварца получим:

$$\|SF\|^2 = \int_{\Omega \times G} a(P) \left[\int_{\Omega} \theta(P, s, s') F(s', P) ds' \right]^2 ds dP \leq$$

$$\leq \int_{\Omega \times G} a(P) \left[\int_{\Omega} \theta(P, s, s') ds' \right] \left[\int_{\Omega} \theta(P, s, s') F^2(s', P) ds' \right] ds dP \leq \beta^2 \omega_n^2 \|F\|^2,$$

что и устанавливает справедливость неравенства (3.1).

Для доказательства самосопряженности оператора S достаточно установить его симметрию. В силу (1.8), при любых F и G из \mathfrak{H} имеем:

$$\begin{aligned} (SF, G) &= \int_{\Omega \times G} a(P) \left[\int_{\Omega} \theta(P, s, s') F(s', P) ds' \right] G(s, P) ds dP = \\ &= \int_{\Omega \times G} a(P) F(s', P) \left[\int_{\Omega} \theta(P, s', s) G(s, P) ds \right] ds' dP = (F, SG). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Отметим, что из условий (1.8) и (1.9) следует:

$$(F, SF) \geq 0, \quad F \in \mathfrak{H}, \quad US = SU = S. \quad (3.2)$$

ЛЕММА 3.2. Оператор $L^{-1}S$ вполне непрерывен в пространстве \mathfrak{H} .

Доказательство. Принимая во внимание (2.3) и (2.6), при любом $F \in \mathfrak{H}$ получим:

$$\begin{aligned} L^{-1}SF &= \int_0^d \int_{\Omega} a(P - \xi s) \exp \left[- \int_0^{\xi} a(P - \xi' s) d\xi' \right] \times \\ &\times \theta(P - \xi s, s, s') F(s', P - \xi s) ds' d\xi, \end{aligned} \quad (3.3)$$

Оператор $L^{-1}S$ не является интегральным. Однако оператор $B = (L^{-1}S)^*L^{-1}S$ является уже интегральным. Действительно, в силу свойства III (§ 2), леммы 3.1 и соотношений (3.2), имеем:

$$B = (L^{-1}S)^*L^{-1}S = S^*(L^{-1})^*L^{-1}S = SUL^{-1}UL^{-1}S = SL^{-1}UL^{-1}S. \quad (3.4)$$

Из (1.8), (2.3) и (3.3) и в силу теоремы Фубини получим:

$$\begin{aligned} L^{-1}UL^{-1}SF &= \int_0^d \int_0^d \int_{\Omega} a(P - \xi_1 s) \exp \left[- \int_0^{\xi_1} a(P - \xi'_1 s) d\xi'_1 \right] a(P + \xi s - \xi_1 s) \cdot \\ &\cdot \exp \left[- \int_0^{\xi} a(P + \xi' s - \xi_1 s) d\xi' \right] \theta(P + \xi s - \xi_1 s, s, s') F(s', P + \xi s - \xi_1 s) ds' d\xi d\xi_1 = \\ &= \int_0^d \int_{\xi_1=d}^{\xi_1} \int_{\Omega} a(P - \xi_1 s) a(P - ts) \exp \left[- \int_0^{\xi_1} a(P - \xi'_1 s) d\xi'_1 \right] \exp \left[- \int_t^{\xi_1} a(P - t's) dt' \right] \cdot \\ &\cdot \theta(P - ts, s, s') F(s', P - ts) ds' dt d\xi_1 = \int_0^d \int_t^d \int_{\Omega} a(P - \xi_1 s) a(P - ts) \cdot \\ &\cdot \exp \left[\int_0^t a(P - t's) dt' \right] \exp \left[- 2 \int_0^{\xi_1} a(P - t's) dt' \right] \theta(P - ts, s, s') \cdot \\ &\cdot F(s', P - ts) ds' d\xi_1 dt + \int_0^d \int_0^d \int_{\Omega} a(P - \xi_1 s) a(P + ts) \exp \left[- \int_0^t a(P + t's) dt' \right] \cdot \\ &\cdot \exp \left[- 2 \int_0^{\xi_1} a(P - t's) dt' \right] \theta(P + ts, s, s') F(s', P + ts) ds' d\xi_1 dt. \end{aligned}$$

Принимая во внимание формулу

$$\int_a^b a(P - \xi_1 s) \exp \left[- 2 \int_0^{\xi_1} a(P - t's) dt' \right] d\xi_1 = \frac{1}{2} \exp \left[- 2 \int_0^{\xi_1} a(P - t's) dt' \right] \Big|_{\xi_1=b}^{\xi_1=a},$$

получим далее:

$$\begin{aligned} L^{-1}UL^{-1}SF &= \frac{1}{2} \int_0^d \int_{\Omega} a(P - ts) \exp \left[- \int_0^t a(P - t's) dt' \right] \cdot \\ &\cdot \left\{ 1 - \exp \left[- 2 \int_t^d a(P - t's) dt' \right] \right\} \theta(P - ts, s, s') F(s', P - ts) ds' dt + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^d \int_{\Omega} a(P + ts) \exp \left[- \int_0^t a(P + t's) dt' \right] \cdot \\ &\cdot \left\{ 1 - \exp \left[- 2 \int_0^d a(P - t's) dt' \right] \right\} \theta(P + ts, s, s') F(s', P + ts) ds' dt. \end{aligned}$$

Применяя к обеим частям последнего равенства оператор S , в силу (3.4), (2.6) и (1.8) получим:

$$\begin{aligned}
 BF &= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \int_{\Omega} \theta(P, s'', s) a(P - ts'') \exp \left[- \int_0^t a(P - t's'') dt' \right] \cdot \\
 &\cdot \left\{ 1 - \exp \left[- 2 \int_t^d a(P - t's'') dt' \right] \right\} \theta(P - ts'', s'', s') F(s', P - ts'') ds' dt ds'' + \\
 &+ \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \int_{\Omega} \theta(P, s'', s) a(P + ts'') \exp \left[- \int_0^t a(P + t's'') dt' \right] \cdot \\
 &\cdot \left\{ 1 - \exp \left[- 2 \int_0^{d-t} a(P - t's'') dt' \right] \right\} \theta(P + ts'', s'', s') F(s', P + ts'') ds' dt ds'' = \\
 &= \iint_{\Omega} \int_{\Omega} a(P - ts'') \theta(P, s'', s) \theta(P - ts'', s'', s') \exp \left[- \int_0^t a(P - t's'') dt' \right] \cdot \\
 &\cdot \left\{ 1 - \frac{1}{2} \exp \left[- 2 \int_t^d a(P - t's'') dt' \right] - \frac{1}{2} \exp \left[- 2 \int_0^{d-t} a(P + t's'') dt' \right] \right\} \cdot \\
 &\cdot F(s', P - ts'') ds' dt ds''.
 \end{aligned}$$

Подынтегральная функция в полученном повторном интеграле измерима при почти всех $(s, P) \in \Omega \times G$ [см. (3), § 3]. В силу теоремы Фубини, этот повторный интеграл можно записать в виде кратного интеграла:

$$\begin{aligned}
 BF &= \int_{\Omega \times \Omega \times (0, d)} a(P - ts'') \theta(P, s'', s) \theta(P - ts'', s'', s') \exp \left[- \int_0^t a(P - t's'') dt' \right] \cdot \\
 &\cdot \left\{ 1 - \frac{1}{2} \exp \left[- 2 \int_t^d a(P - t's'') dt' \right] - \right. \\
 &\left. - \frac{1}{2} \exp \left[- 2 \int_0^{d-t} a(P + t's'') dt' \right] \right\} F(s', P - ts'') ds' ds'' dt. \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

Фиксируем теперь ту из точек $(s, P) \in \Omega \times G$, для которой существует интеграл в (3.5), и совершим преобразование координат:

$$P' = P - ts'', \quad s' = s'. \quad (3.6)$$

Преобразование (3.6) — непрерывное и непрерывно дифференцируемое в обе стороны всюду в $\Omega \times G$, кроме $P' = P$, с якобианом, равным

$$t^{n-1} = |P - P'|^{n-1}.$$

Таким образом, из (3.5) получаем:

$$BF = \int_{\mathfrak{Q} \times G} a(P') \theta\left(P, \frac{P-P'}{|P-P'|}, s\right) \theta\left(P', \frac{P-P'}{|P-P'|}, s'\right) \cdot \\ \cdot \exp\left[-\int_0^{|P-P'|} a\left(P-t' \frac{P-P'}{|P-P'|}\right) dt'\right] \cdot \\ \cdot \left\{1 - \frac{1}{2} \exp\left[-2 \int_{|P-P'|}^d a\left(P-t' \frac{P-P'}{|P-P'|}\right) dt'\right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \exp\left[-2 \int_0^{d-|P-P'|} a\left(P+t' \frac{P-P'}{|P-P'|}\right) dt'\right]\right\} \frac{F(s', P')}{|P-P'|^{n-1}} ds' dP'.$$

Совершая в экспонентах полученного выражения соответствующие подстановки, получим далее:

$$BF = \int_{\mathfrak{Q} \times G} a(P') \theta\left(P, \frac{P-P'}{|P-P'|}, s\right) \theta\left(P', \frac{P-P'}{|P-P'|}, s'\right) \cdot \\ \cdot \exp\left[-|P-P'| \int_0^1 a(\xi P' + (1-\xi)P) d\xi\right] \cdot \\ \cdot \left\{1 - \frac{1}{2} \exp\left[-2|P-P'| \int_1^\infty a(\xi P' + (1-\xi)P) d\xi\right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \exp\left[-2|P-P'| \int_1^\infty a(\xi P + (1-\xi)P') d\xi\right]\right\} \cdot \\ \cdot |P-P'|^{-n+1} F(s', P') ds' dP'. \quad (3.7)$$

Введем обозначение:

$$K(s, P; s', P') = K(P, P') \theta\left(P, \frac{P-P'}{|P-P'|}, s\right) \theta\left(P', \frac{P-P'}{|P-P'|}, s'\right) \cdot \\ \cdot \left\{1 - \frac{1}{2} \exp\left[-2|P-P'| \int_1^\infty a(\xi P' + (1-\xi)P) d\xi\right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \exp\left[-2|P-P'| \int_1^\infty a(\xi P + (1-\xi)P') d\xi\right]\right\}, \quad (3.8)$$

где

$$K(P, P') = \exp\left[-|P-P'| \int_0^1 a(\xi P + (1-\xi)P') d\xi\right] |P-P'|^{-n+1}, \quad (3.9)$$

и запишем оператор (3.7) в виде

$$BF = \int_{\mathfrak{Q} \times G} a(P') K(s, P; s', P') F(s', P') ds' dP'. \quad (3.10)$$

Таким образом, оператор B является интегральным с ядром K .

Для доказательства полной непрерывности оператора $L^{-1}S$ в \mathfrak{H} достаточно установить полную непрерывность оператора $B = (L^{-1}S)^* L^{-1}S$ в \mathfrak{H} [см. (8), гл. II]. Докажем полную непрерывность оператора B .

Пусть функция $\theta(P, s, s')$ удовлетворяет условию d_1). Тогда доста-

точно доказать полную непрерывность оператора B для случая, когда $\theta(P, s, s') = b(P)\theta[(s, s')]$, где функции b и θ удовлетворяют условиям (1.11). Так как $\theta(\mu)$ суммируема на $[-1, 1]$, то существует последовательность ограниченных функций $\theta_k(\mu)$ такая, что

$$\varepsilon_k = \int_{-1}^1 |\theta(\mu) - \theta_k(\mu)| d\mu \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (3.11)$$

Обозначим через B_k операторы $(L^{-1}S_k)^*L^{-1}S_k$; операторы S_k определяются формулой (2.6), где $\theta(P, s, s')$ заменено на $b(P)\theta_k[(s', s)]$. В силу (3.7) — (3.10), операторы B_k определяются симметричными ядрами K_k с оценками (при почти всех $(s, P) \in \Omega \times G$):

$$\int_{\Omega \times G} |K_k(s, P; s', P')|^r ds' dP' < d_k \int_G |P - P'|^{r(1-n)} dP' < d'_k, \quad (3.12)$$

$$1 \leq r < \frac{n}{n-1}.$$

Полагая в теореме 3 § 1 работы Л. В. Канторовича ⁽⁹⁾ *

$$p = s = 2, \quad 1 < r = t < \min\left(2, \frac{n}{n-1}\right),$$

закключаем, в силу (3.12), что операторы B_k вполне непрерывны в \mathfrak{H} .

Используя (1.8), (1.11), (3.8), (3.9) и (3.11), оценим величину

$$\rho_k = \sup_{(s, P) \in \Omega \times G} \int_{\Omega \times G} |K(s, P; s', P') - K_k(s, P; s', P')| ds' dP'.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \rho_k &= \sup_{(s, P) \in \Omega \times G} \int_{\Omega \times G} b(P)b(P') \left| \theta\left[\left(s, \frac{P-P'}{|P-P'|}\right)\right] \theta\left[\left(s', \frac{P-P'}{|P-P'|}\right)\right] - \right. \\ &\quad \left. - \theta_k\left[\left(s, \frac{P-P'}{|P-P'|}\right)\right] \theta_k\left[\left(s', \frac{P-P'}{|P-P'|}\right)\right] \right| \cdot \\ &\quad \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{2} \exp\left[-2|P-P'| \int_1^\infty a(\xi P' + (1-\xi)P) d\xi\right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \exp\left[-2|P-P'| \int_1^\infty a(\xi P + (1-\xi)P') d\xi\right] \right\} K(P, P') ds' dP' \leq \\ &\leq e_1 \sup_{(s, P)} \int_G \int_G \left\{ \theta\left[\left(s, \frac{P-P'}{|P-P'|}\right)\right] \theta\left[\left(s', \frac{P-P'}{|P-P'|}\right)\right] - \right. \\ &\quad \left. - \theta_k\left[\left(s', \frac{P-P'}{|P-P'|}\right)\right] \right\} + \left| \theta_k\left[\left(s', \frac{P-P'}{|P-P'|}\right)\right] \right| \theta\left[\left(s, \frac{P-P'}{|P-P'|}\right)\right] - \\ &\quad - \theta_k\left[\left(s, \frac{P-P'}{|P-P'|}\right)\right] \left| \right\} |P-P'|^{-n+1} ds' dP' \leq \\ &\leq e_2 \sup_{(s, P)} \int_G \left\{ \varepsilon_k \theta\left[\left(s, \frac{P-P'}{|P-P'|}\right)\right] + \left| \theta\left[\left(s, \frac{P-P'}{|P-P'|}\right)\right] - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \theta_k\left[\left(s, \frac{P-P'}{|P-P'|}\right)\right] \right| \right\} |P-P'|^{-n+1} dP'. \end{aligned}$$

* В этой работе рассматриваются операторы, действующие в пространствах L_p , составленных из функций, заданных в конечной области D из R_m . Очевидно, что используемые здесь результаты работы ⁽⁹⁾ справедливы и в том случае, когда вместо L_p взято пространство \mathfrak{H} .

Совершая под интегралом преобразование координат типа (3.6), получим:

$$\rho_k \leq e_2 \sup_{\Omega} \iint_{\Omega} \{ \varepsilon_k \theta[(s, s')] + |\theta[(s, s')] - \theta_k[(s, s')]| \} ds' d\xi \leq e_3 \varepsilon_k. \quad (3.13)$$

Применяя к операции $B - B_k$, определяемой ядром $K - K_k$, неравенство (5) теоремы 1 работы (9) при $s = p = 2$, $t = r = 1$ и $c_1 = c_2 = e_3 \varepsilon_k$, мы, в силу (3.13), получим:

$$\|B - B_k\| < e_4 \varepsilon_k,$$

откуда, на основании (3.11), ясно, что вполне непрерывные операторы B_k сильно сходятся к B в пространстве \mathfrak{H} . Поэтому оператор B , а значит, и оператор $L^{-1}S$ вполне непрерывны в \mathfrak{H} .

Пусть теперь функция $\theta(P, s, s')$ удовлетворяет условию d_2). Выберем число r таким, что

$$1 < r < \min(2, q), \quad (r-1)(n-1) < 1. \quad (3.14)$$

Принимая во внимание (3.8) и (3.9), оценим величину

$$\begin{aligned} 0 < I &= \sup_{(s, P) \in \Omega \times G} \int_{\Omega \times G} K^r(s, P; s', P') ds' dP' \leq \\ &\leq e_5 \sup_{(s, P) \in \Omega \times G} \int_{\Omega \times G} \theta^r\left(P, \frac{P-P'}{|P-P'|}, s\right) \theta^r\left(P', \frac{P-P'}{|P-P'|}, s'\right) |P-P'|^{-(n+1)r} ds' dP'. \end{aligned}$$

Совершим в последнем интеграле преобразование координат типа (3.6) и применим неравенство Гельдера. Учитывая (1.12) и (3.14), получим:

$$I \leq e_6 \sup_{(s, P) \in \Omega \times G} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \theta^r(P, s', s) ds' t^{-(r-1)(n-1)} dt \leq e_7.$$

Полагая в теореме 3 § 1 работы (9) $p = s = 2$ и $r = t$, убеждаемся, в силу (3.14), что условия теоремы выполнены. Поэтому оператор B , а значит, и оператор $L^{-1}S$ вполне непрерывны в \mathfrak{H} и в этом случае. Лемма доказана.

Замечание. Четность функции $\theta(P, s, s')$ по s' использовалась при доказательстве леммы 3.2 только для сокращения записи.

Следствие. Операторы $(L^{-1})^* S = UL^{-1}S$, $SL^{-1} = (UL^{-1}S)^*$ и $S(L^{-1})^* = (L^{-1}S)^*$ вполне непрерывны в \mathfrak{H} .

Выпишем явное выражение для оператора SL^{-1} [см. (3), § 4]:

$$SL^{-1}F = \int_G a(P') \theta\left(P, \frac{P-P'}{|P-P'|}, s\right) K(P, P') F\left(\frac{P-P'}{|P-P'|}, P'\right) dP', \quad (3.15)$$

где ядро $K(P, P')$ определяется формулой (3.9).

Наконец, отметим, оценки, которые следуют из (2.3) и (3.1):

$$\|L^{-1}S\| \leq \beta \omega_n (1 - e^{-\alpha d}), \quad \|SL^{-1}\| \leq \beta \omega_n (1 - e^{-\alpha d}). \quad (3.16)$$

§ 4. Свойства решений задачи. Наряду с задачей (2.7):

$$L\varphi = \lambda S\varphi + F, \quad \varphi \in D, \quad (2.7)$$

мы будем рассматривать и сопряженную к ней задачу (см. свойство III, § 2):

$$L^*\psi = \lambda S\psi + F, \quad \psi \in UD. \quad (2.7^*)$$

В силу сказанного в § 2, задачи (2.7) и (2.7*) соответственно эквивалентны задачам

$$\varphi = \lambda L^{-1}S\varphi + L^{-1}F, \quad \psi = \lambda (L^{-1})^*S\psi + (L^{-1})^*F, \quad (4.1)$$

где операторы $L^{-1}S$ и $(L^{-1})^*S$ вполне непрерывны в пространстве \mathfrak{H} .

Назовем собственным значением λ_k задачи (2.7) то вещественное значение параметра λ , при котором однородное уравнение $L\varphi = \lambda S\varphi$, имеет ненулевое решение φ_k из D — собственную функцию, соответствующую собственному значению λ_k ,

$$L\varphi_k = \lambda_k S\varphi_k.$$

Так как $L^* = ULU$ и $US = SU = S$, то собственные значения задач (2.7) и (2.7*) совпадают, а соответствующие собственные функции связаны соотношением $\psi_k = U\varphi_k$, где ψ_k — собственные функции задачи (2.7*).

ТЕОРЕМА I. *Множество собственных значений λ_k бесконечно (счетно), не имеет точек сгущения на конечном расстоянии и состоит из положительных чисел; каждому λ_k соответствует конечномерное собственное подпространство. Наименьшее собственное значение λ_1 — простое, а соответствующая ему собственная функция $\varphi_1(s, P)$ положительна почти всюду в $\Omega \times G$.*

Имеет место вариационный принцип:

$$\frac{1}{\lambda_k} = \inf_{F \in \mathfrak{H}} \sup_{\substack{F \in \mathfrak{H} \\ (F, S\varphi_i) = 0 \\ i=1,2,\dots,k-1}} \frac{(SF, L^{-1}SF)}{(F, SF)} = \sup_{\substack{F \in \mathfrak{H} \\ (F, S\varphi_i) = 0 \\ i=1,2,\dots,k-1}} \frac{(SF, L^{-1}SF)}{(F, SF)}, \quad (4.2)$$

причем реализация \sup в (4.2) осуществляется собственной функцией φ_k .

Кроме того,

$$(\varphi_i, S\varphi_k) = \delta_{ik}. \quad (4.3)$$

Далее, при любом $F \in \mathfrak{H}$ имеет место разложение

$$SF = \sum_{k=1}^{\infty} (F, S\varphi_k) S\varphi_k, \quad \|SF\|^2 \leq \beta \omega_n \sum_{k=1}^{\infty} (F, S\varphi_k)^2, \quad (4.4)$$

причем ряд в (4.4) сходится в пространстве \mathfrak{H} . Система функций φ_k не полна в \mathfrak{H} .

Собственные значения λ_k удовлетворяют соотношениям:

$$\frac{1}{\beta \omega_n (1 - e^{-\alpha d})} \leq \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots, \quad \lambda_k \rightarrow \infty \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (4.5)$$

Доказательство. Собственные значения и собственные функции однородной задачи (2.7) совпадают с характеристическими числами и собственными функциями оператора $L^{-1}S$. По лемме 3.2, оператор $L^{-1}S$ вполне непрерывен в пространстве \mathfrak{H} . Поэтому к оператору $L^{-1}S$ можно

применить результаты общей теории линейных вполне непрерывных операторов в пространстве Банаха [см. (10), гл V].

Далее, симметричный, неотрицательный оператор S (лемма 3.1 и формулы (3.2)) симметризует оператор $L^{-1}S$ слева. Действительно, в силу свойства III (§ 2) и условий (3.2),

$$(SL^{-1}S)^* = S^*(L^{-1})^*S^* = SUL^{-1}US = SL^{-1}S.$$

Очевидно, $S\varphi_k \neq 0$ (почти всюду в $\Omega \times G$) и $(\varphi_k, S\varphi_k) > 0$. Это значит, что оператор $L^{-1}S$ вполне симметризуется оператором $S \geq 0$ [в терминологии Рида (11)]. Поэтому к оператору $L^{-1}S$ можно применить результаты, полученные Ридом в п. 5 работы (11). В частности, имеет место непустота множества собственных значений λ_k задачи (2.7). Соответствующие собственные функции φ_k удовлетворяют условиям ортогональности (4.3). Кроме того, имеет место вариационный принцип (4.2), если заметить, что, в силу (2.4),

$$\lambda_k = \frac{(\varphi_k, L\varphi_k)}{(\varphi_k, S\varphi_k)} = \frac{1}{2} \int_{\Omega \times \Gamma_s} (s, n_P) \varphi_k^2(s, P) ds d\Gamma(P) + \|\varphi_k\|^2 > 0. \quad (4.6)$$

Прежде чем переходить к доказательству формулы (4.4), докажем более слабое утверждение: при любом $F \in \mathfrak{H}$ имеет место разложение (обобщение теоремы Гильберта — Шмидта):

$$L^{-1}SF = \sum_k \frac{(F, S\varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k, \quad (4.7)$$

причем ряд в (4.7) сходится в пространстве \mathfrak{H} . Обозначим

$$F_i = F - \sum_{k=1}^i (F, S\varphi_k) \varphi_k. \quad (4.8)$$

Так как $(F_i, S\varphi_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots, i$, то из (4.2) следует, что

$$\begin{aligned} (SF_i, L^{-1}SF_i) &\leq \frac{1}{\lambda_{i+1}} (F_i, SF_i) = \\ &= \frac{1}{\lambda_{i+1}} \left[(F, SF) - \sum_{k=1}^i (F, S\varphi_k)^2 \right] \leq \frac{1}{\lambda_{i+1}} (F, SF). \end{aligned}$$

Если система собственных функций φ_k конечна, то при достаточно большом i будет

$$(SF_i, L^{-1}SF_i) = 0;$$

если же система φ_k бесконечна, то $\lambda_i \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$. Поэтому

$$(SF_i, L^{-1}SF_i) \rightarrow 0 \quad \text{при } i \rightarrow \infty.$$

Обозначим $L^{-1}SF_i = G_i$. Тогда $SF_i = LG_i$ и $(G_i, LG_i) \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$. Принимая во внимание (2.4), получим:

$$\begin{aligned} \|G_i\|^2 &\leq \|G_i\|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega \times \Gamma_s} (s, n_P) G_i^2(s, P) ds d\Gamma(P) = \\ &= (G_i, LG_i) \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

В силу (4.8), отсюда следует:

$$\|G_i\|^2 = \|L^{-1}SF_i\|^2 = \|L^{-1}SF - \sum_{k=1}^i \frac{(F, S\varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k\|^2 \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty,$$

что эквивалентно формуле (4.7)

Докажем теперь формулы (4.4). Из (4.3) при любом $F \in \mathfrak{H}$ следует неравенство Бесселя:

$$\sum_k (F, S\varphi_k)^2 \leq (F, SF). \quad (4.9)$$

Из полноты пространства \mathfrak{H} и из (4.3) и (4.9) следует, что функция

$$F_1 = \sum_k (F, S\varphi_k) S\varphi_k \in \mathfrak{H}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=m}^{m_1} (F, S\varphi_k) S\varphi_k \right\|^2 &\leq \|S\|^2 \left(\sum_{k=m}^{m_1} (F, S\varphi_k) \varphi_k, \sum_{k=m}^{m_1} (F, S\varphi_k) S\varphi_k \right) \leq \\ &\leq \beta \omega_n \sum_{k=m}^{m_1} (F, S\varphi_k)^2 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при m и $m_1 \rightarrow \infty$.

Принимая во внимание доказанную формулу (4.7), получим:

$$\begin{aligned} L^{-1}(F_1 - SF) &= \sum_k (F, S\varphi_k) L^{-1}S\varphi_k - L^{-1}SF = \\ &= \sum_k \frac{(F, S\varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k - L^{-1}SF = 0, \end{aligned}$$

откуда следует:

$$F_1 = SF = \sum_k (F, S\varphi_k) S\varphi_k,$$

что и устанавливает справедливость первой из формул (4.4). Вторая из формул (4.4) получается из первой:

$$\|SF\|^2 \leq \|S\|^2 (F, SF) \leq \beta \omega_n \sum_k (F, S\varphi_k)^2.$$

Докажем бесконечность числа собственных элементов задачи (2.7). Если бы их было конечное число, то из (4.4) следовало бы такое представление для оператора S :

$$SF = \int_{\Omega \times \Omega} a(P') T(s, P; s', P') F(s', P') ds' dP', \quad (4.10)$$

где

$$T(s, P; s', P') = \int_{\Omega} \int_{\Omega} \theta(P, s, s''') \theta(P', s'', s') \sum_i \gamma_i(P, s''') \varphi_i(P', s'') ds'' ds'''. \quad (4.11)$$

Но представление (4.10) находится в противоречии с представлением (2.6).

Докажем, что $\varphi_1(s, P)$ положительна почти всюду в $\Omega \times G$. Из (3.3) следует, что вполне непрерывный оператор $L^{-1}S$ оставляет инвариантным конус неотрицательных функций в пространстве \mathfrak{H} . По доказанному, у оператора $L^{-1}S$ существуют собственные значения. А тогда из теоремы Ентча, обобщенной в работе ⁽¹²⁾ на вполне непрерывные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха (теорема 6.4), заключаем, что собственному значению λ_1 принадлежит, по крайней мере, одна неотрицательная собственная функция $\varphi_1(s, P) \geq 0$. Докажем, что $\varphi_1(s, P) > 0$. Имеем:

$$\varphi_1 = \lambda_1^2 (L^{-1}S) \varphi_1 = \lambda_1^2 L^{-1} (SL^{-1}S\varphi_1).$$

Принимая во внимание (4.6) и (3.15), получим:

$$SL^{-1}S\varphi_1 = \int_{\Omega \times G} a(P') \theta\left(P, \frac{P-P'}{|P-P'|}, s\right) \theta\left(P', \frac{P-P'}{|P-P'|}, s'\right) \times \\ \times K(P, P') \varphi_1(s', P') ds' dP',$$

где ядро $K(P, P')$ определено формулой (3.9), $K(P, P') \geq \sigma > 0$. Отсюда и из условия $\theta(P, s, s') > 0$ следует, что

$$SL^{-1}S\varphi_1 > 0.$$

Так как оператор L^{-1} преобразует положительные функции в положительные [см. (2.3)], то

$$\varphi_1 = \lambda_1^2 L^{-1} (SL^{-1}S\varphi_1) > 0.$$

Докажем простоту λ_1 [см. ⁽¹²⁾]. Пусть, кроме функции φ_1 , существует функция ψ_1 , удовлетворяющая уравнению $\psi_1 = \lambda_1 L^{-1}S\psi_1$. Тогда

$$|\psi_1| \leq \lambda_1 L^{-1}S|\psi_1|, \quad (4.11)$$

откуда

$$(|\psi_1|, S\varphi_1) \leq \lambda_1 (L^{-1}S|\psi_1|, S\varphi_1) = \lambda_1 (|\psi_1|, SL^{-1}S\varphi_1) = (|\psi_1|, S\varphi_1). \quad (4.12)$$

Так как $\varphi_1 > 0$, то из (2.6) следует, что $S\varphi_1 > 0$. Отсюда и из (4.11) и (4.12) заключаем, что почти всюду в $\Omega \times G$

$$|\psi_1| = \lambda_1 L^{-1}S|\psi_1|,$$

т. е. $|\psi_1|$ есть собственная функция оператора $L^{-1}S$. Но тогда

$$(|\psi_1|, S\varphi_1) = \int_{\Omega \times G} a(P) S\varphi_1(s, P) |\psi_1(s, P)| ds dP = 0.$$

Так как $aS\varphi_1 > 0$, то $|\psi_1(s, P)| = 0$ почти всюду в $\Omega \times G$, что невозможно. Следовательно, λ_1 — простое.

Докажем, что система собственных функций φ_k не полна в \mathfrak{H} . Пусть непрерывная в G функция $n(P)$ имеет ограниченные первые производные по всем координатам и обращается в нуль в пограничной полосе открытого множества G . Пусть $l(s)$ — функция из $L_2(\Omega)$ такая, что $Sl = 0$ (в силу (1.8), такие функции существуют). Из (1.6) следует, что функция

$$\varphi(s, P) = l(s) n(P)$$

принадлежит D и $S\varphi = 0$. Обозначим $\varphi_0 = UL\varphi$. Очевидно, $\varphi_0 \in \mathfrak{H}$ и $\varphi_0 \neq 0$. Однако при $k = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} (\varphi_0, \varphi_k) &= (UL\varphi, \varphi_k) = (\varphi, ULUL\varphi_k) = \\ &= (\varphi, UL\varphi_k) = (\varphi, \lambda_k US\varphi_k) = \lambda_k (S\varphi, \varphi_k) = 0, \end{aligned}$$

что и доказывает неполноту системы функций φ_k .

Наконец, из доказанного и из (3.16) следуют соотношения (4.5). Теорема доказана.

Замечание 1. Пользуясь результатами Рида ⁽¹¹⁾, можно было бы только утверждать сходимость ряда

$$SL^{-1}SF = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(F, S\varphi_k)}{\lambda_k} S\varphi_k$$

при любом $F \in \mathfrak{H}$ вместо сходимости ряда (4.4).

Замечание 2. В случае $\theta(P, s, s') = b(P)$ формула (4.4) выражает собой полноту системы функций $\int_{\Omega} \varphi_k(s, P) ds$ в пространстве функций,

суммируемых с квадратом на области G с весом $a(P)b(P)$. Этот результат был доказан раньше в работе ⁽³⁾, § 4.

Замечание 3. Действуя подобным образом, можно построить теорию уравнения (2.7) при менее ограничительных предположениях о функции $\theta(P, s, s')$, а именно, если условия (1.8) и (1.9) заменить на следующие:

$$\begin{aligned} \theta(P, s, s') &= \theta(P, s', s) = \theta(P, -s, -s'), \\ \int_{\Omega \times G} a(P) F(-s, P) \int_{\Omega} \theta(P, s, s') F(s', P) ds' ds dP &\geq 0, \quad F \in \mathfrak{H}. \end{aligned}$$

Тогда вместо (3.2) будем иметь:

$$(F, USF) \geq 0, \quad F \in \mathfrak{H}; \quad US = SU.$$

Неотрицательный симметричный оператор US вполне симметризует (слева) вполне непрерывный оператор $L^{-1}S$:

$$(USL^{-1}S)^* = SUL^{-1}USU = USL^{-1}S, \quad US\varphi_k \neq 0.$$

Поэтому к оператору $L^{-1}S$ применимы результаты Рида ⁽¹¹⁾, а также теорема Ентча ⁽¹²⁾. Однако доказательство положительности собственных значений и справедливости разложения типа (4.4) здесь не проходит.

ТЕОРЕМА II. При $\lambda \neq \lambda_k$ оператор $(L - \lambda S)^{-1}$ существует и ограничен в \mathfrak{H} , т. е. при любом $F \in \mathfrak{H}$ задача (2.7) имеет единственное решение

$$\varphi = (L - \lambda S)^{-1} F \equiv \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(F, U\varphi_k)}{\lambda_k(\lambda_k - \lambda)} \varphi_k + L^{-1} F, \quad (4.13)$$

причем ряд (4.13) сходится в пространстве D и, тем более, в пространстве \mathfrak{H} ;

$$\|\varphi\| \leq (1 - e^{-\alpha d}) \|\varphi\|_D \leq \left[1 + \beta \omega_n \sup_k \left| \frac{\lambda \lambda_k}{\lambda_k - \lambda} \right| (1 - e^{-\alpha d})\right] \times \\ \times (1 - e^{-\alpha d}) \|F\|. \quad (4.14)$$

Для того чтобы при $\lambda = \lambda_k$ существовало решение задачи (2.7), необходимо и достаточно, чтобы свободный член F был ортогонален ко всем функциям $U\varphi_k$, где φ_k образуют собственное подпространство, соответствующее собственному значению λ_k .

Доказательство. Так как оператор $L^{-1}S$ вполне непрерывен в \mathfrak{H} , то при $\lambda \neq \lambda_k$ существует ограниченный в \mathfrak{H} оператор $(I - \lambda L^{-1}S)^{-1}$, где I — тождественный оператор в \mathfrak{H} . Поэтому из уравнения (4.1) имеем:

$$\varphi = (I - \lambda L^{-1}S)^{-1} L^{-1}F = (L - \lambda S)^{-1}F. \quad (4.15)$$

Докажем формулу (4.13). Принимая во внимание (4.1) и (4.4), получим:

$$\varphi = \lambda L^{-1}S\varphi + L^{-1}F = \lambda L^{-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\varphi, S\varphi_k) S\varphi_k \right) + L^{-1}F = \\ = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\varphi, S\varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k + L^{-1}F. \quad (4.16)$$

Отсюда, в силу (4.3), найдем:

$$(\varphi, S\varphi_k) = \frac{\lambda_k (L^{-1}F, S\varphi_k)}{\lambda_k - \lambda} = \frac{\lambda_k (F, U L^{-1} U S\varphi_k)}{\lambda_k - \lambda} = \frac{(F, U\varphi_k)}{\lambda_k - \lambda}. \quad (4.17)$$

Подставляя выражение (4.17) для $(\varphi, S\varphi_k)$ в формулу (4.16), получим (4.13).

Докажем, что ряд (4.13) сходится в пространстве D . Из (4.4), (4.16) и (4.17) имеем:

$$\|\varphi\|_D = \|L\varphi\| = \|\lambda S\varphi + F\| \leq \|F\| + |\lambda| \|S\varphi\| \leq \\ \leq \|F\| + \sqrt{\beta \omega_n} |\lambda| \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^2}{(\lambda_k - \lambda)^2} (L^{-1}F, S\varphi_k)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \\ \leq \|F\| + \sqrt{\beta \omega_n} \sup_k \left| \frac{\lambda \lambda_k}{\lambda_k - \lambda} \right| \left[\sum_{k=1}^{\infty} (L^{-1}F, S\varphi_k)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \\ = \|F\| + \sqrt{\beta \omega_n} \sup_k \left| \frac{\lambda \lambda_k}{\lambda_k - \lambda} \right| (L^{-1}F, S L^{-1}F)^{\frac{1}{2}} \leq \\ \leq \left[1 + \beta \omega_n \sup_k \left| \frac{\lambda \lambda_k}{\lambda_k - \lambda} \right| (1 - e^{-\alpha d}) \right] \|F\|.$$

Здесь мы воспользовались неравенствами (2.3) и (3.1). Отсюда и из (2.2) следуют неравенства (4.14).

Пусть теперь $\lambda = \lambda_k$. Оператор $L^{-1}S$ вполне непрерывен в \mathfrak{H} . По теореме Фредгольма, для того чтобы при $\lambda = \lambda_k$ неоднородное уравнение (2.7) имело решение, необходимо и достаточно, чтобы

$$(L^{-1}F, \psi_k^*) = 0,$$

где ψ_k^* — собственные функции оператора

$$(L^{-1}S)^* = SUL^{-1}U = SL^{-1}U,$$

соответствующие характеристическому числу λ_k :

$$\psi_k^* = \lambda_k SL^{-1}U\psi_k^*.$$

Легко видеть, что $\psi_k^* = S\varphi_k$, так как из

$$\varphi_k = \lambda_k L^{-1}S\varphi_k$$

следует, что

$$S\varphi_k = \lambda_k SL^{-1}US\varphi_k,$$

а размерности соответствующих собственных подпространств операторов $L^{-1}S$ и $(L^{-1}S)^* = SL^{-1}U$ равны и $S\varphi_k$ линейно независимы (S вполне симметризует $L^{-1}S$). Полученное необходимое и достаточное условие разрешимости задачи (2.7) при $\lambda = \lambda_k$ можно переписать в виде:

$$0 = (L^{-1}F, \psi_k^*) = (L^{-1}F, S\varphi_k) = (F, UL^{-1}US\varphi_k) = (F, UL^{-1}S\varphi_k) = \frac{(F, U\varphi_k)}{\lambda_k}.$$

Заметим, что функции $U\varphi_k$ суть собственные функции задачи (2.7^{*}). Теорема доказана.

Замечание 1. Дадим оценку решения задачи (2.7) при условии

$$|\lambda| \beta \omega_n (1 - e^{-\alpha d}) < 1. \quad (4.18)$$

Из (4.5), (4.14) и (4.18) имеем:

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_D &\leq \left[1 + \beta \omega_n \frac{|\lambda| \lambda_1}{\lambda_1 - |\lambda|} (1 - e^{-\alpha d}) \right] \|F\| < \\ &< \left[1 + \frac{|\lambda| \beta \omega_n (1 - e^{-\alpha d})}{1 - |\lambda| \beta \omega_n (1 - e^{-\alpha d})} \right] \|F\| = \frac{\|F\|}{1 - |\lambda| \beta \omega_n (1 - e^{-\alpha d})}. \end{aligned}$$

Замечание 2. Установим вариационный принцип при $\lambda < \lambda_1$. Пусть φ есть решение задачи (2.7) при $\lambda < \lambda_1$,

$$\varphi = \lambda L^{-1}S\varphi + L^{-1}F, \quad \varphi \in D.$$

Тогда для того чтобы функция f из \mathfrak{H} сообщала минимум функционалу

$$H(f) = (f, Sf) - \lambda (Sf, L^{-1}Sf) - 2(Sf, L^{-1}F), \quad (4.19)$$

необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла соотношению

$$(f - \varphi, S(f - \varphi)) = 0.$$

Сформулированное утверждение следует из тождества

$$H(f) = (S(f - \varphi), (I - \lambda L^{-1}S)(f - \varphi)) - (S\varphi, (I - \lambda L^{-1}S)\varphi)$$

и из неравенств:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)(f - \varphi, S(f - \varphi)) &\leq (S(f - \varphi), (I - \lambda L^{-1}S)(f - \varphi)) \leq \\ &\leq [1 + |\lambda| \beta \omega_n(1 - e^{-\alpha d})](f - \varphi, S(f - \varphi)), \end{aligned}$$

полученных из (3.16) и (4.2).

§ 5. Метод последовательных приближений. Мы рассмотрим метод последовательных приближений применительно к двум задачам, связанным с задачей (2.7) и имеющим практическое значение: задача I — определить λ_1 и φ_1 ; задача II — при $|\lambda| < \lambda_1$ определить φ — решение задачи (2.7).

Последовательные приближения строим по схеме

$$L\varphi^{(p)} = S\varphi^{(p-1)}, \quad p = 1, 2, \dots \quad (5.1)$$

Для задачи I в качестве $\varphi^{(0)}$ берем любую функцию из \mathfrak{H} такую, что $(\varphi_1, S\varphi^{(0)}) \neq 0$, например положительную функцию. Приближения к λ_1 и φ_1 строим соответственно по формулам:

$$\lambda_{(p)} = \frac{(\varphi^{(p-1)}, S\varphi^{(p-1)})^{\frac{1}{2}}}{(\varphi^{(p)}, S\varphi^{(p)})^{\frac{1}{2}}}, \quad \varphi_{1(p)} = \frac{\varphi^{(p)}}{(\varphi^{(p)}, S\varphi^{(p)})^{\frac{1}{2}}}, \quad p = 1, 2, \dots \quad (5.2)$$

Предлагаемый здесь метод итераций является модификацией известного метода Келлога ⁽¹³⁾ отыскания собственных значений и собственных функций вполне непрерывного и симметричного оператора.

Для задачи II в качестве $S\varphi^{(0)}$ нужно взять функцию F — свободный член уравнения (2.7). Приближение $\varphi_{(p)}$ для решения задачи (2.7) возьмем в виде

$$\varphi_{(p)} = \sum_{i=1}^p \lambda^{i-1} \varphi^{(i)} + \frac{\lambda^p}{\lambda_1 - \lambda} \varphi^{(p)}, \quad p = 1, 2, \dots, \quad (5.3)$$

где $\varphi^{(k)}$ определены формулой (5.1).

Идея изложенного приема, уточняющего обычную схему последовательных приближений (в виде оборванного ряда Неймана), была впервые предложена Л. А. Люстерником ⁽¹⁴⁾ для улучшения сходимости итераций при решении систем линейных алгебраических уравнений.

Докажем теорему относительно сходимости последовательностей (5.2) и (5.3).

ТЕОРЕМА III. Последовательность $\lambda_{(p)}$ сходится, монотонно убывая, к λ_1 , причем

$$0 \leq \lambda_{(p)} - \lambda_1 \leq \frac{\lambda_1}{2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{2p-2} \frac{(\varphi^{(0)}, S\varphi^{(0)}) - (\varphi^{(0)}, S\varphi_1)^2}{(\varphi^{(0)}, S\varphi_1)^2},$$

$$\lambda_{(p+1)} \leq \lambda_{(p)}, \quad p = 1, 2, \dots \quad (5.4)$$

Последовательности $\varphi_{1(p)}$ и $\varphi_{(p)}$ сходятся соответственно к φ_1 и φ в пространстве D (и, тем более, в пространстве \mathfrak{H}), причем

$$\|\varphi_{1(p)} - \varphi_1\| < \|\varphi_{1(p)} - \varphi_1\|_D \leq \sqrt{\beta \omega_n \lambda_2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^p \times$$

$$\times \frac{\sqrt{(\varphi^{(0)}, S\varphi^{(0)}) - (\varphi^{(0)}, S\varphi_1)^2}}{(\varphi^{(0)}, S\varphi_1)}, \quad p = 1, 2, \dots, \quad (5.5)$$

$$\|\varphi_{(p)} - \varphi\| < \|\varphi_{(p)} - \varphi\|_D \leq \frac{\beta \omega_n \lambda_2^2}{\lambda_1 - \lambda} \left| \frac{\lambda}{\lambda_2} \right|^p \|F\|, \quad p = 2, 3, \dots \quad (5.6)$$

Доказательство. Из (5.2) следует:

$$\varphi_{(p)} = (L^{-1}S)^p \varphi^{(0)}, \quad p = 1, 2, \dots \quad (5.7)$$

Принимая во внимание формулу (4.7), из (5.7) получим:

$$\varphi_{(p)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda_k^p} \varphi_k, \quad p = 1, 2, \dots, \quad (5.8)$$

где, в силу (4.4),

$$c_k = (\varphi^{(0)}, S\varphi_k), \quad c_1 > 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = (\varphi^{(0)}, S\varphi^{(0)}). \quad (5.9)$$

Так как ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k S\varphi_k = S\varphi^{(0)}$$

сходится в пространстве \mathfrak{H} (теорема I), то ряды (5.8) сходятся в пространстве D (и, значит, в \mathfrak{H}).

Из (5.8) следует, что

$$(\varphi_{(p)}, S\varphi_{(p)}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k^2}{\lambda_k^{2p}}, \quad p = 1, 2, \dots \quad (5.10)$$

Докажем монотонность последовательности $\lambda_{(p)}$. Имеем:

$$(\varphi_{(p)}, S\varphi_{(p)}) = (L^{-1}S\varphi_{(p-1)}, S\varphi_{(p)}) = (\varphi_{(p-1)}, SL^{-1}S\varphi_{(p)}) = (\varphi_{(p-1)}, S\varphi_{(p+1)}).$$

Применяя обобщенное неравенство Буняковского — Шварца, получим:

$$(\varphi_{(p)}, S\varphi_{(p)}) \leq (\varphi_{(p-1)}, S\varphi_{(p-1)})^{\frac{1}{2}} (\varphi_{(p+1)}, S\varphi_{(p+1)})^{\frac{1}{2}},$$

откуда имеем, на основании (5.2):

$$\lambda_{(p+1)} = \frac{(\varphi_{(p)}, S\varphi_{(p)})^{\frac{1}{2}}}{(\varphi_{(p+1)}, S\varphi_{(p+1)})^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{(\varphi_{(p-1)}, S\varphi_{(p-1)})^{\frac{1}{2}}}{(\varphi_{(p)}, S\varphi_{(p)})^{\frac{1}{2}}} = \lambda_{(p)}.$$

Далее, из (5.2) и (5.10) находим:

$$\lambda_{(p)} - \lambda_1 = \lambda_1 \left[\frac{1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c_k^2}{c_1^2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k} \right)^{2p-2}}{1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c_k^2}{c_1^2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k} \right)^{2p}} \right]^{\frac{1}{2}} - \lambda_1 \geq 0.$$

Принимая во внимание первое из неравенств

$$\left| \sqrt{\frac{1+x}{1+y}} - 1 \right| \leq \frac{1}{2} |x-y|, \quad 0 \leq 1 + \frac{1+x}{1+y} - \frac{2}{\sqrt{1+y}} \leq x, \quad (5.11)$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

и учитывая (4.5) и (5.9), получим:

$$0 \leq \lambda_{(p)} - \lambda_1 \leq \frac{\lambda_1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c_k^2}{c_1^2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k} \right)^{2p-2} \left(1 - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_k^2} \right) \leq$$

$$\leq \frac{\lambda_1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c_k^2}{c_1^2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k} \right)^{2p-2} \leq \frac{\lambda_1}{2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{2p-2} \frac{(\varphi^{(0)}, S\varphi^{(0)}) - c_1^2}{c_1^2},$$

что и доказывает неравенства (5.4).

Докажем оценки (5.5). Из (5.8) следует ($p \geq 1$):

$$\left(\frac{\varphi^{(p-1)}}{(\varphi^{(p)}, S\varphi^{(p)})^{\frac{1}{2}}} - \lambda_1 \varphi_1, S\varphi_k \right) = \begin{cases} \frac{c_1}{\lambda_1^{p-1} (\varphi^{(p)}, S\varphi^{(p)})^{\frac{1}{2}}} - \lambda_1 & \text{при } k=1, \\ \frac{c_k}{\lambda_k^{p-1} (\varphi^{(p)}, S\varphi^{(p)})^{\frac{1}{2}}} & \text{при } k>1. \end{cases}$$

Отсюда и из (4.4), (5.1), (5.2) и (5.10) будем иметь:

$$\|\varphi_{1(p)} - \varphi_1\|_D^2 = \|L(\varphi_{1(p)} - \varphi_1)\|^2 = \left\| \frac{S\varphi^{(p-1)}}{(\varphi^{(p)}, S\varphi^{(p)})^{\frac{1}{2}}} - \lambda_1 S\varphi_1 \right\|^2 \leq$$

$$\leq \beta \omega_n \left\{ \left[\frac{c_1}{\lambda_1^{p-1} (\varphi^{(p)}, S\varphi^{(p)})^{\frac{1}{2}}} - \lambda_1 \right]^2 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c_k^2}{\lambda_k^{2p-2} (\varphi^{(p)}, S\varphi^{(p)})} \right\} =$$

$$= \beta \omega_n \lambda_1^2 \left[1 + \frac{1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c_k^2}{c_1^2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k} \right)^{2p-2}}{1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c_k^2}{c_1^2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k} \right)^{2p}} - \frac{2}{\sqrt{1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c_k^2}{c_1^2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k} \right)^{2p}}} \right].$$

Принимая во внимание второе из неравенств (5.11) и учитывая (5.9) получим:

$$\|\varphi_{1(p)} - \varphi_1\|_D^2 \leq \beta \omega_n \lambda_1^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c_k^2}{c_1^2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k} \right)^{2p-2} \leq$$

$$\leq \beta \omega_n \lambda_1^2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{2p-2} \frac{(\varphi^{(0)}, S\varphi^{(0)}) - c_1^2}{c_1^2}.$$

Докажем оценки (5.6). Из (4.18) и (5.8) получаем ($p \geq 2$):

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=2}^p \lambda^{i-1} \varphi^{(i-1)} + \frac{\lambda^p}{\lambda_1 - \lambda} \varphi^{(p-1)} - \lambda \varphi, S \varphi_k \right) = \\ & = \sum_{i=2}^p \lambda^{i-1} \frac{d_k}{\lambda_k^{i-1}} + \frac{\lambda^p}{\lambda_1 - \lambda} \frac{d_k}{\lambda_k^{p-1}} - \frac{\lambda}{\lambda_k - \lambda} d_k = \\ & = d_k \frac{\lambda^p}{\lambda_k^{p-1}} \frac{\lambda_k - \lambda_1}{(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_k - \lambda)}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} d_k &= (F, U \varphi_k), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k^2}{\lambda_k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} (UF, L^{-1} S \varphi_k)^2 = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (L^{-1} F, S \varphi_k)^2 = (L^{-1} F, SL^{-1} F). \end{aligned}$$

Поэтому, в силу (4.4), (5.1) и (5.3), имеем ($p \geq 2$):

$$\begin{aligned} & \| \varphi_{(p)} - \varphi \|_D^2 = \| L(\varphi_{(p)} - \varphi) \|^2 = \\ & = \| F + \sum_{i=2}^{\infty} \lambda^{i-1} L \varphi^{(i)} + \frac{\lambda^p}{\lambda_1 - \lambda} L \varphi^{(p)} - \lambda S \varphi - F \|^2 = \\ & = \| \sum_{i=2}^{\infty} \lambda^{i-1} S \varphi^{(i-1)} + \frac{\lambda^p}{\lambda_1 - \lambda} S \varphi^{(p-1)} - \lambda S \varphi \|^2 \leq \\ & \leq \beta \omega_n \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{2p}}{\lambda_k^{2p-2}} \frac{(\lambda_k - \lambda_1)^2}{(\lambda_1 - \lambda)^2 (\lambda_k - \lambda)^2} d_k^2 \leq \frac{\beta \omega_n \lambda^{2p}}{(\lambda_1 - \lambda)^2 \lambda_2^{2p-4}} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{d_k^2}{\lambda_k^2} < \\ & < \frac{\beta \omega_n \lambda_2^4}{(\lambda_1 - \lambda)^2} \left(\frac{\lambda}{\lambda_2} \right)^{2p} (L^{-1} F, SL^{-1} F) < \frac{\beta^2 \omega_n^2 \lambda_2^4}{(\lambda_1 - \lambda)^2} \left(\frac{\lambda}{\lambda_2} \right)^{2p} \| F \|^2. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

§ 6. Вариационные принципы. В этом параграфе мы установим, помимо вариационных принципов (4.2) и (4.19), новые вариационные принципы, связанные непосредственно с дифференциальными частями уравнения (1.1) и его сопряженного. Для этой цели, пользуясь тем, что $U^* = ULU$, преобразуем задачи (2.7) и (2.7*) к другой задаче так, чтобы эта новая задача была самосопряженной (и положительно определенной) и имела бы все решения задач (2.7) и (2.7*). К исследованию и приближенному решению полученной самосопряженной задачи можно эффективно применять прямые методы вариационного исчисления (Ритца, наименьших квадратов и др.) Подробности о применении вариационных методов к самосопряженным и положительно определенным задачам можно найти в монографии С. Г. Михлина⁽⁸⁾, гл. 1.

Итак, рассмотрим новое интегро-дифференциальное уравнение второго порядка относительно неизвестной функции $u(s, P)$ в $\Omega \times G$:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{a(P)} \left(s, \operatorname{grad} \frac{1}{a(P)} \left(s, \operatorname{grad} u \right) \right) + u = \\
& = \lambda \int_{\Omega} \theta(P, s, s') u(s', P) ds' + F(s, P). \quad (6.1)
\end{aligned}$$

Решение уравнения (6.1) будем искать в классе функций D_0 , который будет также и областью задания линейного дифференциального выражения $l_0 u$, стоящего в левой части уравнения (6.1):

$$\begin{aligned}
l_0 u & \equiv -\frac{1}{a(P)} \left(s, \operatorname{grad} \frac{1}{a(P)} (s, \operatorname{grad} u) \right) + u \equiv \\
& \equiv W W u \equiv \left(\frac{1}{a(P)} (s, \operatorname{grad}) + 1 \right) \left(-\frac{1}{a(P)} (s, \operatorname{grad}) + 1 \right) u \equiv \\
& \equiv U W l u \equiv \left(-\frac{1}{a(P)} (s, \operatorname{grad}) + 1 \right) \left(\frac{1}{a(P)} (s, \operatorname{grad}) + 1 \right) u. \quad (6.2)
\end{aligned}$$

К классу D_0 отнесем функции u , обладающие следующими свойствами (при почти всех $(s, Q) \in \Omega \times \pi_s$):

1) $u(s, Q + \xi s)$ и $\frac{1}{a(Q + \xi s)} \frac{\partial}{\partial \xi} u(s, Q + \xi s)$ абсолютно непрерывны на замкнутом множестве $\bar{\pi}_s, Q$.

2) $u(s, Q + \xi s)$ удовлетворяет граничным условиям:

$$a) \quad u(s, Q + \xi_1 s) = \frac{1}{a(Q + \xi_s)} \frac{\partial}{\partial \xi} u(s, Q + \xi s) \Big|_{\xi = \xi_1},$$

$$u(s, Q + \eta_N s) = -\frac{1}{a(Q + \xi_s)} \frac{\partial}{\partial \xi} u(s, Q + \xi s) \Big|_{\xi = \eta_N}.$$

$$б) \quad u(s, Q + \xi_{i+1} s) = u(s, Q + \eta_i s),$$

$$\frac{1}{a(Q + \xi_s)} \frac{\partial}{\partial \xi} u(s, Q + \xi s) \Big|_{\xi = \xi_{i+1}} = \frac{1}{a(Q + \xi_s)} \frac{\partial}{\partial \xi} u(s, Q + \xi s) \Big|_{\xi = \eta_i},$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1.$$

3) Функция u должна быть такой, что $l_0 u \in \mathfrak{H}$.

Имеют место следующие неравенства типа теорем вложения [см. (3), § 7]: если $u \in D_0$, то $u \in \mathfrak{H}$ и $\frac{1}{a}(s, \operatorname{grad} u) \in \mathfrak{H}$, причем

$$\|u\| \leq (1 - e^{-\alpha d}) \|l_0 u\|, \quad \left\| \frac{1}{a}(s, \operatorname{grad} u) \right\| \leq (1 - e^{-\alpha d}) \|l_0 u\|,$$

$$\int_{\Omega \times (\Gamma_s + \Gamma_{-s})} |(s, n_P)| u^2(s, P) ds d\Gamma(P) \leq (1 - e^{-\alpha d}) \|l_0 u\|^2. \quad (6.3)$$

Множество функций D_0 — линейное, содержится в \mathfrak{H} и плотно в \mathfrak{H} [см. (3), § 7]. Линейное дифференциальное выражение $l_0 u$, вместе с областью его задания D_0 , определяет линейный оператор L_0 с областью определения D_0 . Введем в D_0 метрику при помощи скалярного произведения и соответствующей нормы:

$$(u, v)_{D_0} = (L_0 u, L_0 v), \quad \|u\|_{D_0} = \sqrt{(u, u)_{D_0}} = \|L_0 u\|, \quad u, v \in D_0.$$

В силу (6.3), введенное скалярное произведение удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения. Таким образом, D_0 превращается в гильбертово пространство (полнота его доказана в работе (3), § 7).

В силу (2.6), уравнение (6.1) можно записать в операторной форме:

$$L_0 u = \lambda S u + F, \quad u \in D_0. \quad (6.4)$$

Отметим некоторые из свойств оператора L_0 [см. (3), § 7]:

$$L_0^{-1} = \frac{1}{2} (L^{-1} + (L^*)^{-1}) = \frac{1}{2} (L^{-1} + U L^{-1} U), \quad \|L_0^{-1}\| \leq 1 - e^{-\alpha d}. \quad (6.5)$$

II. Если u и $v \in D$, то имеет место формула:

$$(L_0 u, v) = (u, L_0 v) = \int_{\Omega \times (\Gamma_s + \Gamma_{-s})} |(s, n_P)| u(s, P) v(s, P) ds d\Gamma(P) + \\ + \left(\frac{(s, \text{grad } u)}{a}, \frac{(s, \text{grad } v)}{a} \right) + (u, v).$$

В частности,

$$(u, L_0 u) = \int_{\Omega \times (\Gamma_s + \Gamma_{-s})} |(s, n_P)| u^2(s, P) ds d\Gamma(P) + \\ + \left\| \frac{(s, \text{grad } u)}{a} \right\|^2 + \|u\|^2. \quad (6.6)$$

III. $L_0^* = L_0$.

Установим связь между задачей (6.4) и задачами (2.7) и (2.7*).

ТЕОРЕМА IV. Если F удовлетворяет условию

$$S L^{-1} F = S L^{-1} U F, \quad (6.7)$$

то функция u — решение задачи (6.4) — и функции φ, ψ — решения соответственно задач (2.7) и (2.7*) — связаны соотношениями

$$u = \frac{1}{2} (\varphi + \psi), \quad \frac{1}{a} (s, \text{grad } u) = \frac{1}{2} (\psi - \varphi). \quad (6.8)$$

Доказательство. Пусть u — решение задачи (6.4). Это значит, что $u \in D_0$ и [см. (6.2)]

$$l_0 u \equiv U W U u \equiv U W l u = \lambda S u + F. \quad (6.9)$$

Обозначим

$$\varphi = U W U u \equiv -\frac{1}{a(P)} (s, \text{grad } u) + u, \\ \psi = l u \equiv \frac{1}{a(P)} (s, \text{grad } u) + u. \quad (6.10)$$

Так как $u \in D_0$, то из (6.9) и (6.10) следует что φ и ψ удовлетворяют уравнениям:

$$L \varphi = \lambda S u + F, \quad \varphi \in D, \quad L^* \psi = \lambda S u + F, \quad \psi \in U D. \quad (6.11)$$

Но из (3.2), (6.4), (6.5), (6.7) и (6.11) имеем:

$$S \varphi = \lambda S L^{-1} S u + S L^{-1} F = \\ = \lambda S (L^{-1})^* S u + S (L^{-1})^* F = S \psi;$$

$$\begin{aligned}
Su &= \lambda SL_0^{-1} Su + SL_0^{-1} F = \\
&= \frac{1}{2} \lambda SL^{-1} Su + \frac{1}{2} \lambda S (L^{-1})^* Su + \\
&+ \frac{1}{2} SL^{-1} F + \frac{1}{2} S (L^{-1})^* F = \\
&= \frac{1}{2} (S\varphi + S\psi) = S\varphi = S\psi.
\end{aligned}$$

Поэтому построенные в (6.10) функции φ и ψ суть решения задач (2.7) и (2.7*). Формулы (6.8) следуют из (6.10).

Обратно, пусть функции φ и ψ суть решения соответственно задач (2.7) и (2.7*). Это значит, что $\varphi \in D$, $\psi \in UD$ и φ , ψ удовлетворяют соответственно уравнениям:

$$\begin{aligned}
l\varphi &\equiv \frac{1}{a(P)} (s, \text{grad } \varphi) + \varphi = \lambda S\varphi + F, \\
UW\psi &\equiv -\frac{1}{a(P)} (s, \text{grad } \psi) + \psi = \lambda S\psi + F.
\end{aligned}$$

Складывая и вычитая полученные уравнения и обозначая

$$\varphi + \psi = 2u, \quad \varphi - \psi = 2v, \quad \varphi = u + v, \quad \psi = u - v, \quad (6.12)$$

получим:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a(P)} (s, \text{grad } v) + u &= \frac{1}{2} S(\varphi + \psi) + F, \\
\frac{1}{a(P)} (s, \text{grad } u) + v &= \frac{\lambda}{2} S(\varphi - \psi).
\end{aligned} \quad (6.13)$$

Но, в силу (3.2) и (6.7), имеем:

$$S\varphi = \lambda SL^{-1} S\varphi + SL^{-1} F, \quad S\psi = \lambda SL^{-1} S\psi + SL^{-1} F.$$

Отсюда следует, что $S\varphi = S\psi$. А тогда из (6.12) получаем:

$$Su = \frac{1}{2} (S\varphi + S\psi) = S\varphi = S\psi,$$

что, в силу (6.13), дает:

$$\frac{1}{a(P)} (s, \text{grad } v) + u = \lambda Su + F, \quad \frac{1}{a(P)} (s, \text{grad } u) + v = 0. \quad (6.14)$$

Исключая из последних уравнений v , получим уравнение (6.4) для функции u . Из (6.12) и (6.14) следуют соотношения (6.8). Так как $\varphi \in D$ и $\psi \in UD$, то из (6.8) следует, что $u \in D_0$. Теорема доказана.

Установим вариационные принципы для однородной задачи (6.4). Заметим предварительно, что из теоремы IV следует, что собственные значения задачи (6.4) равны λ_k , а соответствующие собственные функции равны

$$u_k = \frac{1}{2} (\varphi_k + \psi_k) = \frac{1}{2} (\varphi_k + U\varphi_k). \quad (6.15)$$

Из (4.3), (6.4) и (6.15) следует:

$$(u_i, L_0 u_k) = \lambda_k (u_i, Su_k) = \lambda_k \delta_{ki}. \quad (6.16)$$

ТЕОРЕМА V. Собственное значение λ_k равно наименьшему значению функционала

$$\frac{(u, L_0 u)}{(u, Su)}$$

при условии, что $u \in D_0$ и $(u_i, Su) = 0$, $i = 1, 2, \dots, k-1$. Это наименьшее значение достигается на собственной функции u_k .

Доказательство. Из (6.16) следует, что для доказательства теоремы достаточно установить невозможность неравенств

$$\frac{(u, L_0 u)}{(u, Su)} = \lambda < \lambda_k \quad (6.17)$$

ни при каком $u \in D_0$, удовлетворяющем условиям:

$$(u_i, Su) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k-1. \quad (6.18)$$

Допуская противное, обозначим

$$L_0 u - \lambda Su = F. \quad (6.19)$$

Очевидно $F \in \mathcal{H}$. Из (6.17) и (6.19) имеем: $(F, u) = 0$. Из (6.5) и (6.19) следует:

$$u = \lambda L_0^{-1} Su + L_0^{-1} F = \frac{\lambda}{2} (L^{-1} + UL^{-1}U) Su + L_0^{-1} F, \quad (6.20)$$

откуда

$$(u, Su) = \lambda (Su, L^{-1} Su) + (Su, L_0^{-1} F).$$

Из (6.15) и (6.18) имеем:

$$(\varphi_i, Su) = \frac{1}{2} (\varphi_i, Su) + \frac{1}{2} (U\varphi_i, Su) = (u_i, Su) = 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, k-1.$$

Отсюда и из (4.2) следует неравенство:

$$(Su, L^{-1} Su) \leq \frac{(u, Su)}{\lambda_k}.$$

тогда (6.21) дает:

$$(F, L_0^{-1} Su) = (L_0^{-1} F, Su) \geq \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right) (u, Su) \geq 0.$$

Последнее неравенство в сочетании с

$$0 = (F, u) = \lambda (F, L_0^{-1}Su) + (F, L_0^{-1}F)$$

[см. (6.20)] приводит к равенству $(F, L_0^{-1}F) = 0$, из которого следует, что $(v, L_0v) = 0$, где $v = L_0^{-1}F$. Последнее, в силу (6.6), дает $v = 0$, значит, $F = 0$, что невозможно. Теорема доказана.

Следствие.

$$\lambda_k = \sup_{F_i \in \mathfrak{F}} \inf_{\substack{u \in D_0 \\ (F_i, Su) = 0 \\ i=1,2,\dots,k-1}} \frac{(u, L_0u)}{(u, Su)}, \quad (6.21)$$

причем реализация $\sup \inf$ осуществляется при $F_i = u_i, i = 1, 2, \dots, k-1, u = u_k$ (максимально-минимальный принцип Куранта).

Докажем, что в (6.22) множество D_0 функций сравнения u можно заменить более широким множеством $D_1 \supset D_0$. К множеству D_1 отнесем функции u , удовлетворяющие условиям:

а) при почти всех $(s, Q) \in \Omega \times \pi_s$ функция $u(s, Q + \xi s)$ абсолютно непрерывна на π_s, Q и удовлетворяет граничным условиям

$$u(s, Q + \xi_{i+1}s) = u(s, Q + \tau_i s), \quad i = 1, 2, \dots, N-1;$$

б) функция u такова, что

$$\begin{aligned} [u]^2 = [u, u] = & \int_{\Omega \times (\Gamma_s + \Gamma_{-s})} |(s, n_P)| u^2(s, P) ds d\Gamma(P) + \\ & + \left\| \frac{(s, \text{grad } u)}{a} \right\|^2 + \|u\|^2 < \infty. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Для доказательства сформулированного утверждения воспользуемся теорией Фридрихса самосопряженных расширений положительно определенных симметричных операторов, изложенной, например, в работах ⁽⁸⁾, гл. I, и в ⁽¹⁰⁾, гл. VIII.

Из (6.23) следует, что оператор L_0 , заданный на линейном D_0 , плотном в \mathfrak{H} , — положительно определенный:

$$\|u\|^2 \leq (u, L_0u) = [u]^2, \quad u \in D_0.$$

На множестве D_0 определим новое скалярное произведение $[u, v]$, полагая

$$[u, v] = (u, L_0v), \quad v, u \in D_0.$$

Легко проверить, что в силу такого определения, множество D_0 превращается в новое гильбертово пространство, которое мы обозначим че-

рез D_2 . Норму в D_2 будем обозначать через $[u]$. Пространство D_2 может оказаться неполным — в этом случае мы обычным способом пополним его. По теореме Фридрихса, элементы полного пространства D_2 можно отождествить с некоторыми элементами из \mathfrak{H} , т. е. $D_2 \subset \mathfrak{H}$. Попутно отметим, что $D_2 = D_{\sqrt{L_0}}$ [см., например, ⁽⁸⁾, гл. I, стр. 25].

В работе ⁽³⁾, § 8, доказано, что $D_1 \subset D_2$. Таким образом,

$$D_0 \subset D_1 \subset D_2 \subset \mathfrak{H},$$

причем D_0 плотно в \mathfrak{H} в метрике $\| \cdot \|$ и D_0 плотно в D_2 также и в метрике $[\cdot]$. Следовательно, D_0 плотно в D_1 как в метрике $\| \cdot \|$, так и в метрике $[\cdot]$. Так как оператор S ограничен в \mathfrak{H} , то из (6.22) следует:

$$\lambda_k^- = \sup_{F_i \in \mathfrak{H}} \inf_{\substack{u \in D_1 \\ (F_i, Su) = 0 \\ i=1,2,\dots,k-1}} \frac{[u, u]}{[u, Su]}, \quad (6.24)$$

причем реализация $\sup \inf$ в (6.24) осуществляется при $F_i = u_i$, $i = 1, 2, \dots, k-1$, и $u = u_k$.

Как и в работе ⁽³⁾ (§ 8), легко устанавливается справедливость следующего вариационного принципа: решение u задачи (6.4) при $\lambda < \lambda_1$ сообщает функционалу

$$G(u) = [u, u] - \lambda(u, Su) - 2(u, F)$$

наименьшее значение в D_1 ; обратно, функция u из D_1 , реализующая минимум функционала $G(u)$, является решением задачи (6.4).

Пользуясь случаем, выражаю благодарность Н. Н. Боголюбову за плодотворные дискуссии при выполнении данной работы.

Математический институт
им. В. А. Стеклова Акад. наук СССР

Поступило
21. II. 1957

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Чандрасекар С., Перенос лучистой энергии, ИИЛ, 1953.
- 2 Судэк Г., Адлер Ф., Грейлинг Е., Кинетическая теория нейтронов. Ядерные реакторы. I. Физика ядерных реакторов, ИИЛ, 1956.
- 3 Владимиров В. С., Об одном интегро-дифференциальном уравнении, Известия Акад. наук СССР, серия матем., 21 (1957), 3—52.
- 4 F e n y ö I., Über eine Klasse von Integralgleichungen, Publicationes Mathematicae, Debrecen, 2 (1952), 248—251.
- 5 Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд-во ЛГУ, 1950.
- 6 Никольский С. М., Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных, Труды Матем. ин-та Акад. наук СССР, XXXVIII (1951), 224—278.
- 7 Вишик М. И. и Ладыженская О. А., Краевые задачи для уравнений в частных производных и некоторых классов операторных уравнений, Успехи матем. наук, XI, 6 (72) (1956), 41—97.

- ⁸ Михлин С. Г., Проблема минимума квадратичного функционала, Гостехиздат, 1952.
- ⁹ Канторович Л. В., Об интегральных операторах, Успехи матем. наук, XI, 2(68) (1956), 3—29.
- ¹⁰ Рисс Ф. и Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, ИИЛ, 1954.
- ¹¹ Reid W. T., Symmetrizable completely continuous linear transformations in Hilbert space, Duke Math. J., 18 (1951), 41—56.
- ¹² Крейн М. Г. и Рутман М. А., Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха, Успехи матем. наук, III, 1 (23) (1948), 3—95.
- ¹³ Kellogg O. D., On the existence and closure of sets of characteristic functions, Math. Ann., 86 (1922), 14—17.
- ¹⁴ Люстерник Л. А., Замечания к численному решению краевых задач уравнений Лапласа и вычислению собственных значений методом сеток, Труды Матем. ин-та Акад. наук СССР, XX (1947), 49—64.
-

С. Б. СТЕЧКИН

О ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДАХ, РАСХОДЯЩИХСЯ В КАЖДОЙ ТОЧКЕ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым)

В работе исследуется, с какой скоростью могут стремиться к нулю коэффициенты пары сопряженных тригонометрических рядов, расходящихся в каждой точке.

Введение

Как хорошо известно, Н. Н. Лузин ⁽³⁾, ⁽⁴⁾ [см. также ⁽⁵⁾, стр. 271 и ⁽⁶⁾, стр. 25] впервые построил степенной ряд

$$S_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

с коэффициентами, стремящимися к нулю, который расходится в каждой точке единичной окружности $|z| = 1$, и показал, что тригонометрический ряд

$$T_1(x) = \operatorname{Re} S_1(e^{ix})$$

расходится для почти всех x . Вскоре после этого Г. Штейнгауз ⁽⁸⁾ построил тригонометрический ряд

$$T(x) \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

с действительными и стремящимися к нулю коэффициентами a_n и b_n , расходящийся в каждой точке.

В § 1 настоящей работы устанавливается, что сопряженные тригонометрические ряды с коэффициентами, стремящимися к нулю,

$$T_1(x) = \operatorname{Re} S_1(e^{ix}) \text{ и } U_1(x) = \operatorname{Im} S_1(e^{ix}),$$

представляющие собою действительную и мнимую части степенного ряда Лузина $S_1(z)$ на окружности $z = e^{ix}$ ($0 \leq x < 2\pi$), оба расходятся в каждой точке и даже имеют в каждой точке неограниченные частичные суммы.

Пользуясь теми же методами, я рассматриваю в § 2 следующую задачу: с какой скоростью могут стремиться к нулю коэффициенты пары сопряженных тригонометрических рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nx - b_n \cos nx),$$

расходящихся в каждой точке? В частности, в § 2 впервые дается доказательство следующей теоремы А. Н. Колмогорова:

Для любой последовательности положительных чисел $\{\alpha_n\}$, удовлетворяющей условиям $\alpha_n \downarrow 0$ и $\sum \alpha_n^2 = \infty$, существует тригонометрический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

с коэффициентами $a_n, b_n = O(\alpha_n)$, расходящийся в каждой точке.

Основные результаты этой работы сообщались мною на заседании Московского математического общества 19 декабря 1950 г. ⁽⁹⁾ [см. также ⁽⁵⁾, стр. 496 и ⁽⁶⁾, стр. 394].

§ 1. О примере Н. Н. Лузина

1.1. Конструкция Н. Н. Лузина. Конструкция Н. Н. Лузина состоит в следующем. Он полагает

$$\Theta_p(z) = \sum_{\nu=0}^p z^{\nu}, \quad H_p(z) = \sum_{\mu=0}^p z^{(p+1)\mu} \Theta_p(e^{-i \frac{2\pi\mu}{p+1}} z) \quad (p = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\lambda_p = \sum_{\kappa=1}^p \kappa^2 \quad (p = 1, 2, \dots)$$

и определяет степенной ряд $S_1(z)$ посредством формулы

$$S_1(z) = H_0(z) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{V^p} z^{\lambda_p} H_p(z). \quad (1.1)$$

Как нетрудно проверить, этот ряд не содержит подобных членов и представляет собою степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

с коэффициентами, стремящимися к нулю. Заменяя $H_p(z)$ и $\Theta_p(z)$ их значениями, получаем, что

$$\begin{aligned} S_1(z) &= 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{V^p} z^{\lambda_p} \sum_{\mu=0}^p z^{(p+1)\mu} \sum_{\nu=0}^p e^{-i \frac{2\pi\mu\nu}{p+1}} z^{\nu} = \\ &= 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{V^p} \sum_{\mu=0}^p \sum_{\nu=0}^p e^{-i \frac{2\pi\mu\nu}{p+1}} z^{\lambda_p + (p+1)\mu + \nu}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

В силу этой формулы, действительная и мнимая части ряда $S_1(z)$ на окружности $z = e^{ix}$ ($0 \leq x < 2\pi$) представляются тригонометрическими рядами

$$\begin{aligned} T_1(x) &= \operatorname{Re} S_1(e^{ix}) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \\ &= 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{V_p} \sum_{\mu=0}^p \sum_{\nu=0}^p \cos \left\{ [\lambda_p + (p+1)\mu + \nu] x - \frac{2\pi\mu\nu}{p+1} \right\} \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} U_1(x) &= \operatorname{Im} S_1(e^{ix}) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nx - b_n \cos nx) = \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{V_p} \sum_{\mu=0}^p \sum_{\nu=0}^p \sin \left\{ [\lambda_p + (p+1)\mu + \nu] x - \frac{2\pi\mu\nu}{p+1} \right\}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Понятно, что мы имеем формальное соотношение

$$S_1(e^{ix}) = T_1(x) + i U_1(x)$$

и что

$$a_n, b_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Введем в рассмотрение тригонометрические полиномы

$$t_{N,p}(x, \gamma) = \sum_{k=0}^{p-1} \cos \{(N+k)x - \gamma k\} \quad (1.5)$$

$$u_{N,p}(x, \gamma) = \sum_{k=0}^{p-1} \sin \{(N+k)x - \gamma k\}. \quad (1.6)$$

В этих обозначениях формулы (1.3) и (1.4) принимают вид:

$$T_1(x) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{V_p} \sum_{\mu=0}^p t_{\lambda_p+(p+1)\mu, p+1} \left(x, \frac{2\pi\mu}{p+1} \right) \quad (1.7)$$

$$U_1(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{V_p} \sum_{\mu=0}^p u_{\lambda_p+(p+1)\mu, p+1} \left(x, \frac{2\pi\mu}{p+1} \right). \quad (1.8)$$

Ряды $T_1(x)$ и $U_1(x)$ мы будем в дальнейшем называть тригонометрическими рядами Лузина. Цель этого параграфа — показать, что ряды $T_1(x)$ и $U_1(x)$ имеют в каждой точке неограниченные частичные суммы и, следовательно, расходятся в каждой точке. Для этого нам понадобится одна лемма о тригонометрических полиномах, к изложению которой мы и переходим.

1.2. Лемма о тригонометрических полиномах. Пусть p — натуральное число, ψ — произвольное действительное число и $\rho_k \geq 0$ ($k = 0, 1, \dots, p-1$). Положим

$$Q_p(x, \psi) = \sum_{k=0}^{p-1} \rho_k \cos(kx + \psi) \quad (1.9)$$

и условимся называть отрезком этого полинома любой полином вида

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} \rho_k \cos(kx + \psi),$$

где $0 \leq k_1 \leq k_2 \leq p-1$.

ЛЕММА 1. Пусть $p \geq p_0 = 24$ и

$$\rho_k \geq \rho > 0 \quad (k = 0, 1, \dots, p-1). \quad (1.10)$$

Каково бы ни было число x , удовлетворяющее условиям

$$\frac{\pi}{p} \leq x \leq \frac{3\pi}{p}, \quad (1.11)$$

найдется отрезок полинома $Q_p(x, \psi)$, для которого

$$\left| \sum_{k=k_1}^{k_1} \rho_k \cos(kx + \psi) \right| \geq \frac{\varepsilon p}{48}. \quad (1.12)$$

Здесь, естественно, $k_1 = k_1(x, \psi)$ и $k_2 = k_2(x, \psi)$.

Доказательство. Положим $\varphi_k = kx + \psi$ и исследуем поведение последовательности $\{\varphi_k\}$ ($k = 0, 1, \dots, p-1$) для x , удовлетворяющих условиям (1.11). Имеем:

$$x = \frac{\vartheta}{p} \quad (\pi \leq \vartheta \leq 3\pi). \quad (1.13)$$

Потому при увеличении k от 0 до $p-1$ последовательность $\{\varphi_k\}$ монотонно возрастает от $\varphi_0 = \psi$ до $\varphi_p = \frac{p-1}{p}\vartheta + \psi$, и соседние точки φ_k входят друг от друга на расстоянии $\frac{\vartheta}{p}$.

Рассмотрим функцию $y = \cos \varphi$ для $\varphi \in I = [\varphi_0, \varphi_p]$. Так как, по условию леммы, $p \geq p_0 = 24$, а согласно (1.13) $\vartheta \geq \pi$, то для длины $|I|$ сегмента I имеем оценку:

$$|I| = \varphi_p - \varphi_0 = \left(1 - \frac{1}{p}\right)\vartheta \geq \left(1 - \frac{1}{p_0}\right)\vartheta \geq \frac{23}{24}\pi.$$

Отсюда нетрудно усмотреть, что, какова бы ни была «начальная фаза» $\varphi_0 = \psi$, сегмент I содержит целый сегмент I_+ длины $\frac{\pi}{4}$, на котором $\cos \varphi \geq \frac{1}{2}$, или же целый сегмент I_- длины $\frac{\pi}{4}$, на котором $\cos \varphi \leq -\frac{1}{2}$. Возможен также случай, что I содержит и I_+ и I_- .

Пусть, ради определенности, I содержит сегмент I_+ . Покажем, что всегда найдутся точки φ_k , принадлежащие сегменту I_+ , и оценим число таких точек. Так как $p \geq p_0 = 24$ и расстояние между соседними точками φ_k равно $\frac{\vartheta}{p} \leq \frac{3\pi}{p}$, то на сегмент I_+ длины $\frac{\pi}{4}$ точек φ_k попадет не менее чем

$$\left\lceil \frac{\pi/4}{\vartheta/p} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{\pi/4}{3\pi/4} \right\rceil = \left\lceil \frac{p}{12} \right\rceil \geq \frac{p}{12} - 1 \geq \frac{p}{24}. \quad (1.14)$$

Обозначим через k_1 наименьший, а через k_2 — наибольший номер k , для которого $\varphi_k \in I_+$. Тогда, в силу монотонности последовательности $\{\varphi_k\}$, $\varphi_k \in I_+$ для $k_1 \leq k \leq k_2$ и, согласно (1.14),

$$k_2 - k_1 + 1 \geq \frac{p}{24}. \quad (1.15)$$

Отметим также, что так как $I_+ \subset I$, то $0 \leq k_1 \leq k_2 \leq p-1$.

Рассмотрим сумму

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} \rho_k \cos(kx + \psi) = \sum_{k=k_1}^{k_2} \rho_k \cos \varphi_k.$$

Используя неравенство (1.10), оценку (1.15) и неравенство $\cos \varphi \geq \frac{1}{2}$ ($\varphi \in I_+$), получаем, что

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} \rho_k \cos(kx + \psi) \geq \rho(k_2 - k_1 + 1) \frac{1}{2} \geq \frac{\rho p}{48},$$

откуда непосредственно вытекает (1.12).

Если бы мы предположили, что I не содержит I_+ , но зато содержит сегмент I_- , то, аналогично предыдущему, нашли бы номера k'_1 и k'_2 , для которых

$$\sum_{k=k'_1}^{k'_2} \rho_k \cos(kx + \psi) \leq -\frac{\rho p}{48},$$

откуда снова вытекает (1.12), и лемма полностью доказана.

Грубо говоря, эта лемма устанавливает, что для любого x из сегмента $\left|x - \frac{2\pi}{p}\right| \leq \frac{\pi}{p}$ тригонометрический полином $Q_p(x, \psi)$ обладает достаточно большими отрезками.

Отметим, что доказательство леммы сохраняет силу и в том случае, когда ψ произвольным образом зависит от x и от p (но не зависит от k !!).

Заменяя в лемме 1 $p-1$ на p и полагая $\rho_k = 1$ ($k = 0, 1, \dots, p$), получаем такое

Следствие. Пусть $p \geq 24$. Каково бы ни было число x , удовлетворяющее условиям

$$\frac{\pi}{p+1} \leq x \leq \frac{3\pi}{p+1},$$

найдется отрезок полинома

$$D_p(x, \psi) = \sum_{k=0}^p \cos(kx + \psi),$$

для которого

$$\left| \sum_{k=k_1}^{k_2} \cos(kx + \psi) \right| \geq \frac{p+1}{48}.$$

1.3. Теорема 1. Теперь мы в состоянии доказать основную теорему этого параграфа.

ТЕОРЕМА 1. Тригонометрические ряды Лузина $T_1(x)$ и $U_1(x)$ имеют в каждой точке неограниченные частичные суммы.

Доказательство. Положим, как в следствии из леммы 1,

$$D_p(x, \psi) = \sum_{k=0}^p \cos(kx + \psi).$$

Тогда имеем:

$$\begin{aligned} t_{\lambda_p + (p+1)\mu, p+1}\left(x, \frac{2\pi\mu}{p+1}\right) &= \sum_{\nu=0}^p \cos\left\{[\lambda_p + (p+1)\mu + \nu]x - \frac{2\pi\mu\nu}{p+1}\right\} = \\ &= \sum_{\nu=0}^p \cos\left\{\nu\left(x - \frac{2\pi\mu}{p+1}\right) + [\lambda_p + (p+1)\mu]x\right\} = \\ &= D_p\left(x - \frac{2\pi\mu}{p+1}, [\lambda_p + (p+1)\mu]x\right) \end{aligned} \quad (1.16)$$

и, аналогично,

$$u_{\lambda_p + (p+1)\mu, p+1}\left(x, \frac{2\pi\mu}{p+1}\right) = D_p\left(x - \frac{2\pi\mu}{p+1}, [\lambda_p + (p+1)\mu]x - \frac{\pi}{2}\right). \quad (1.17)$$

Поэтому, в силу (1.7) и (1.8),

$$T_1(x) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{V_p} \sum_{\mu=0}^p D_p\left(x - \frac{2\pi\mu}{p+1}, [\lambda_p + (p+1)\mu]x\right)$$

и

$$U_1(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{V_p} \sum_{\mu=0}^p D_p\left(x - \frac{2\pi\mu}{p+1}, [\lambda_p + (p+1)\mu]x - \frac{\pi}{2}\right).$$

Таким образом, как ряд $T_1(x)$, так и ряд $U_1(x)$ является частным случаем ряда

$$L(x) = C + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{V_p} \sum_{\mu=0}^p D_p\left(x - \frac{2\pi\mu}{p+1}, \psi\right), \quad (1.18)$$

где ψ зависит от p, μ и x и удовлетворяет условию

$$\psi(x + 2\pi, p, \mu) \equiv \psi(x, p, \mu) \pmod{2\pi}.$$

Поэтому достаточно установить, что ряд $L(x)$ имеет в каждой точке неограниченные частичные суммы*.

Зафиксируем натуральное число $p \geq 24$ и рассмотрим отрезок

$$l_p(x) = \frac{1}{V_p} \sum_{\mu=0}^p D_p\left(x - \frac{2\pi\mu}{p+1}, \psi\right) \quad (1.19)$$

ряда $L(x)$. Покажем, что, каково бы ни было число $x \in [0, 2\pi]$, найдется отрезок полинома $l_p(x)$, по модулю не меньший, чем $\frac{V_p}{48}$. В силу периодичности $l_p(x)$, достаточно показать, что такой отрезок найдется для

* Заметим, что ряд $L(x)$, вообще говоря, не является обычным тригонометрическим рядом.

любого $x \in \left[\frac{\pi}{p+1}, 2\pi + \frac{\pi}{p+1} \right]$. Зафиксируем произвольно число x из этого сегмента и подберем такое целое μ ($0 \leq \mu \leq p$), чтобы

$$\left| x - \frac{2\pi(\mu+1)}{p+1} \right| \leq \frac{\pi}{p+1} \quad (1.20)$$

(если таких чисел μ имеется два, то возьмем какое-нибудь из них). Поскольку условие (1.20) эквивалентно неравенствам

$$\frac{\pi}{p+1} \leq x - \frac{2\pi\mu}{p+1} \leq \frac{3\pi}{p+1},$$

то, в силу следствия из леммы 1, найдется отрезок полинома $D_p\left(x - \frac{2\pi\mu}{p+1}, \psi\right)$, для которого

$$\left| \sum_{k=k_1}^{k_2} \cos \left\{ k \left(x - \frac{2\pi\mu}{p+1} \right) + \psi \right\} \right| \geq \frac{p}{48}.$$

Тогда при k_1 и k_2 , соответствующих $\psi = \psi(x, p, \mu)$, отрезок полинома $l_p(x)$

$$\frac{1}{V_p} \sum_{k=k_1}^{k_2} \cos \left\{ k \left(x - \frac{2\pi\mu}{p+1} \right) + \psi(x, p, \mu) \right\}$$

является искомым, так как для него

$$\left| \frac{1}{V_p} \sum_{k=k_1}^{k_2} \cos \left\{ k \left(x - \frac{2\pi\mu}{p+1} \right) + \psi(x, p, \mu) \right\} \right| \geq \frac{V_p}{48}. \quad (1.21)$$

Теперь остается только заметить, что, заставляя p пробегать все натуральные числа, начиная с $p_0 = 24$, мы получим для каждого $x \in [0, 2\pi]$ бесконечную последовательность непересекающихся отрезков ряда $L(x)$, удовлетворяющих неравенству (1.21). Теорема 1 доказана.

Отметим два следствия.

Следствие 1. Тригонометрические ряды Лузина (1.3) и (1.4) расходятся в каждой точке.

Следствие 2. Степенной ряд $S_1(z)$ расходится в каждой точке единичной окружности.

Это — теорема Лузина.

1.4. Замечания. Сделаем в связи с теоремой 1 несколько замечаний.

1) Повторяя дословно доказательство теоремы 1, находим, что тригонометрические ряды

$$T_2(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \sum_{\mu=0}^p \sum_{\nu=0}^p \cos \left\{ [\lambda_p + (p+1)\mu + \nu]x - \frac{2\pi\mu\nu}{p+1} \right\}$$

и

$$U_2(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \sum_{\mu=0}^p \sum_{\nu=0}^p \sin \left\{ [\lambda_p + (p+1)\mu + \nu]x - \frac{2\pi\mu\nu}{p+1} \right\}$$

расходятся в каждой точке, а степенной ряд

$$S_2(z) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} z^{\lambda p} H_p(z)$$

— в каждой точке окружности $|z| = 1$.

Эти ряды имеют несколько более простую структуру, чем ряды Лузина $S_1(z)$, $T_1(x)$ и $U_1(x)$, и их коэффициенты стремятся к нулю значительно быстрее. Однако теперь уже не утверждается, что частичные суммы этих рядов не ограничены в каждой точке.

2) При помощи леммы 1 нетрудно усмотреть, что тригонометрические ряды

$$T_3(x) = \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{V_p} \sum_{\mu=0}^p \sum_{\nu=0}^p \frac{\cos \left\{ [\lambda_p + (p+1)\mu + \nu]x - \frac{2\pi\mu\nu}{p+1} \right\}}{\ln [\lambda_p + (p+1)\mu + \nu]}$$

и

$$U_3(x) = \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{V_p} \sum_{\mu=0}^p \sum_{\nu=0}^p \frac{\sin \left\{ [\lambda_p + (p+1)\mu + \nu]x - \frac{2\pi\mu\nu}{p+1} \right\}}{\ln [\lambda_p + (p+1)\mu + \nu]}$$

расходятся в каждой точке. Отсюда, в силу одной теоремы Харди⁽¹⁰⁾ [см. также⁽¹⁾, § 3.71], вытекает любопытное следствие. Именно: *тригонометрические ряды Лузина $T_1(x)$ и $U_1(x)$ не являются рядами Фурье. Тем более, степенной ряд $S_1(z)$ не принадлежит классу H_1 .*

3) Ряды Лузина $T_1(x)$, $U_1(x)$ и $S_1(z)$ расходятся в том смысле, что не существует ни одной точки x (или $z = e^{ix}$), в которой частичные суммы одного из этих рядов стремились бы к конечному значению. Однако это не исключает возможности того, что для некоторых x частичные суммы ряда $T_1(x)$ или $U_1(x)$ стремятся к бесконечности определенного знака, а для некоторых $z = e^{ix}$ частичные суммы ряда $S_1(z)$ стремятся к бесконечности. Насколько нам известно, задача построения тригонометрического (или степенного) ряда с коэффициентами, стремящимися к нулю, который ни в одной точке x ($z = e^{ix}$) не сходил бы ни к конечному, ни к бесконечному значению, до сих пор не решена. Возможно, что такого рода ряды вовсе не существуют.

4) Чтобы получить тригонометрический ряд вида

$$\sum_{p=1}^{\infty} g(p) \sum_{\mu} \sum_{\nu=0}^p \cos \{ [k(p, \mu) + \nu]x - \psi(p, \mu)\nu \},$$

расходящийся в каждой точке, нет надобности производить для каждого p суммирование по μ от 0 до p . Достаточно взять столько слагаемых, чтобы каждая точка $x \in [0, 2\pi]$ оказалась покрытой бесконечным числом сегментов, на которых колебания отрезков полиномов

$$g(p) \sum_{\nu=0}^p \cos \{ [k(p, \mu) + \nu]x - \psi(p, \mu)\nu \}$$

были больше абсолютной положительной константы. Мы воспользуемся

этим соображением, чтобы получить в следующем параграфе более сильные результаты, чем теорема 1.

§ 2. Расходящиеся тригонометрические ряды с быстро убывающими коэффициентами

2.1. Постановка задачи. В этом параграфе рассматривается следующая задача: как быстро могут убывать коэффициенты пары сопряженных тригонометрических рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nx - b_n \cos nx),$$

расходящихся в каждой точке?

Насколько нам известно, эта задача до сих пор не рассматривалась, однако имеется ряд работ, посвященных аналогичной задаче для степенных рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

на окружности $|z| = 1$.

Как отмечает Р. О. Кузьмин ⁽²⁾, для ряда Лузина $S_1(z)$

$$c_n = O\left(n^{-\frac{1}{6}}\right);$$

нетрудно также подсчитать, что для построенного в § 1 ряда $S_2(z)$

$$c_n = O\left(n^{-\frac{1}{3}}\right).$$

В 1916 г. Харди и Литтлвуд ⁽¹¹⁾ [см. также ⁽¹⁾, § 5.33] построили степенной ряд с коэффициентами

$$c_n = O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right),$$

расходящийся в каждой точке окружности $|z| = 1$. Далее, Недер ⁽⁷⁾ доказал следующую общую теорему:

ТЕОРЕМА НЕДЕРА. *Какова бы ни была последовательность положительных чисел $\{\alpha_n\}$, удовлетворяющая условиям $\alpha_n \downarrow 0$ и $\sum \alpha_n^2 = \infty$, существует степенной ряд*

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

с коэффициентами $c_n = O(\alpha_n)$, расходящийся в каждой точке окружности $|z| = 1$.

Наконец, Р. О. Кузьмин ⁽²⁾ дал новый, весьма простой способ построения степенных рядов с быстро убывающими коэффициентами, расходящихся в каждой точке единичной окружности.

Что же касается построения всюду расходящихся тригонометрических рядов с быстро убывающими коэффициентами, то А. Н. Колмогоров сообщил мне в 1942 г., что им установлена теорема, аналогичная теореме Недера:

ТЕОРЕМА КОЛМОГОРОВА. *Какова бы ни была последовательность положительных чисел $\{\alpha_n\}$, удовлетворяющая условиям $\alpha_n \downarrow 0$ и $\sum \alpha_n^2 = \infty$, существует тригонометрический ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

с коэффициентами $a_n, b_n = O(\alpha_n)$, расходящийся в каждой точке.

Формулировка этой теоремы уже сообщалась ранее [см. (9)], но доказательство ее не было опубликовано. Ясно, что теорема Колмогорова содержит в себе в качестве следствия теорему Недера.

Здесь я обобщаю эту теорему Колмогорова и показываю, что, какова бы ни была последовательность положительных чисел $\{\alpha_n\}$, удовлетворяющая условиям $\alpha_n \downarrow 0$ и $\sum \alpha_n^2 = \infty$, существует пара сопряженных тригонометрических рядов с коэффициентами $a_n, b_n = O(\alpha_n)$, расходящихся в каждой точке.

Сравнение нашего доказательства этой теоремы с доказательством теоремы Недера показывает, что при переходе от степенных рядов к тригонометрическим возникает ряд дополнительных трудностей. В частности, нам понадобится одна лемма о числовых рядах, которая в случае Недера сводится к тривиальному замечанию.

2.2. Лемма о числовых рядах.

ЛЕММА 2. Пусть функция $\varphi(u)$ ($u > 0$) удовлетворяет условиям:

$\varphi 1) \quad \varphi(u) > 0, \varphi(u) \rightarrow 0 \quad (u \rightarrow +0);$

$\varphi 2) \quad \varphi(u)$ не убывает;

$\varphi 3) \quad$ для любого $a \geq 1 \quad \varphi(au) \leq c_1(a) \varphi(u) \quad (0 < u \leq 1);$

$\varphi 4) \quad$ ряд $\sum \varphi(k^{-1})$ сходится и

$$\sum_{k=n}^{\infty} \varphi(k^{-1}) \leq c_2 n \varphi(n^{-1}) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.1)$$

Далее, пусть $\alpha_n \downarrow 0$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(\alpha_n) = \infty. \quad (2.2)$$

Тогда существует последовательность натуральных чисел $\{p_n\}$, обладающая следующими свойствами:

$p 1) \quad p_n \leq p_{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots);$

$p 2) \quad \frac{1}{p_n} \leq \alpha_{N_n}, \text{ где } N_n = \sum_{k=1}^{\infty} p_k;$

$$p3) \sum_{n=1}^{\infty} p_n \varphi(p_n^{-1}) = \infty.$$

Для ориентировки: условие $p2)$ показывает, что p_n не слишком малы, а условие $p3)$ — что p_n не слишком велики. Таким образом, лемма утверждает, что можно одновременно удовлетворить обоим условиям.

Доказательство. Определим индуктивно возрастающую последовательность целых неотрицательных чисел $\{N_n\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Именно, положим $N_0 = 0$, и если числа N_0, N_1, \dots, N_{n-1} уже определены, то положим N_n равным наименьшему натуральному числу N , для которого

$$(N - N_{n-1}) \alpha_N > 1.$$

Такое число N_n существует для любого $n = 1, 2, \dots$. В самом деле, если бы для некоторого натурального n и всех $N > N_{n-1}$ выполнялось обратное неравенство

$$(N - N_{n-1}) \alpha_N \leq 1,$$

то при $N \rightarrow \infty$ было бы $\alpha_N = O(N^{-1})$, что, в силу условий $\varphi3)$ и $\varphi4)$, противоречит расходимости ряда $\sum \varphi(\alpha_n)$.

Итак,

$$(N - N_{n-1}) \alpha_N \leq 1 \quad (N_{n-1} < N < N_n) \quad (2.3)$$

и

$$(N_n - N_{n-1}) \alpha_{N_n} > 1 \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.4)$$

Положим

$$p_n = N_n - N_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.5)$$

и покажем, что эта последовательность удовлетворяет всем требованиям леммы. Так как $\{N_n\}$ — возрастающая последовательность целых неотрицательных чисел, то числа p_n — натуральные. Далее, в силу (2.4),

$$\frac{1}{p_n} < \alpha_{N_n} \text{ для } N_n = \sum_{k=1}^n p_k,$$

так что выполняется и условие $p2)$. Установим теперь монотонность последовательности $\{p_n\}$. Согласно (2.3), имеем

$$(N_n - 1 - N_{n-1}) \alpha_{N_{n+1}} \leq 1, \quad (2.6)$$

откуда, в силу (2.5) и монотонности последовательности $\{\alpha_N\}$,

$$(p_n - 1) \alpha_{N_{n+1}} \leq 1.$$

С другой стороны,

$$p_{n+1} \alpha_{N_{n+1}} > 1,$$

откуда $p_{n+1} > p_n - 1$ и

$$p_{n+1} \geq p_n.$$

Остается доказать расходимость ряда $\sum p_n \varphi(p_n^{-1})$. Заметим предварительно, что из (2.6) вытекает оценка:

$$(p_n - 1) \alpha_{N_n} \leq 1,$$

откуда

$$p_n \alpha_{N_n} \leq 1 + \alpha_{N_n} \leq 1 + \alpha_1 = c_3$$

и

$$\alpha_{N_n} \leq \frac{c_3}{p_n} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.7)$$

Оценим сверху сумму $\sum_{N=N_n}^{N_{n+1}-1} \varphi(\alpha_N)$. Имеем:

$$\sum_{N=N_n}^{N_{n+1}-1} \varphi(\alpha_N) = \sum_{N=N_n}^{N_n+p_n-1} \varphi(\alpha_N) + \sum_{N=N_n+p_n}^{N_{n+1}-1} \varphi(\alpha_N) = S_1 + S_2.$$

Для суммы S_1 , в силу монотонности $\{\alpha_n\}$, неравенства (2.7) и условий $\varphi 2)$ и $\varphi 3)$, имеем:

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{N=N_n}^{N_n+p_n-1} \varphi(\alpha_N) \leq \sum_{N=N_n}^{N_n+p_n-1} \varphi(\alpha_{N_n}) = p_n \varphi(\alpha_{N_n}) \leq \\ &\leq p_n \varphi\left(\frac{c_3}{p_n}\right) \leq c_4 p_n \varphi(p_n^{-1}). \end{aligned}$$

Для суммы S_2 , используя $\varphi 2)$, $\varphi 4)$ и (2.3), получаем:

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{N=N_n+p_n}^{N_{n+1}-1} \varphi(\alpha_N) \leq \sum_{N=N_n+p_n}^{N_{n+1}-1} \varphi\left(\frac{1}{N-N_n}\right) = \sum_{k=p_n}^{p_{n+1}-1} \varphi(k^{-1}) \leq \\ &\leq \sum_{k=p_n}^{\infty} \varphi(k^{-1}) \leq c_2 p_n \varphi(p_n^{-1}). \end{aligned}$$

Сопоставляя эти оценки, находим окончательно:

$$\sum_{N=N_n}^{N_{n+1}-1} \varphi(\alpha_N) \leq c_5 p_n \varphi(p_n^{-1}) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Так как ряд $\sum \varphi(\alpha_N)$ расходится, то отсюда вытекает расходимость ряда $\sum p_n \varphi(p_n^{-1})$, и лемма полностью доказана.

Ясно, что в этой лемме можно, в частности, положить $\varphi(u) = u^2$. Поэтому справедливо такое

Следствие. Пусть $\alpha_n \downarrow 0$ и $\sum \alpha_n^2 = \infty$. Тогда существует последовательность натуральных чисел $\{p_n\}$, обладающая следующими свойствами:

$$1) \quad p_n \leq p_{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots);$$

$$2) \quad \frac{1}{p_n} \leq \alpha_{N_n}, \text{ где } N_n = \sum_{k=1}^n p_k;$$

$$3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} p_n^{-1} = \infty.$$

2.3. Теорема 2. Докажем основную теорему этого параграфа.

ТЕОРЕМА 2. *Какова бы ни была последовательность положительных чисел $\{\alpha_n\}$, удовлетворяющая условиям $\alpha_n \downarrow 0$ и $\sum \alpha_n^2 = \infty$, найдется пара сопряженных тригонометрических рядов*

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

и

$$U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nx - b_n \cos nx)$$

с коэффициентами

$$a_n, b_n = O(\alpha_n), \quad (2.8)$$

расходящихся в каждой точке.

Доказательство. Зафиксируем последовательность $\{\alpha_n\}$ и применим к ней следствие из леммы 2. Получаем, что существует последовательность натуральных чисел $\{p_n\}$, удовлетворяющая условиям:

$$p_n \leq p_{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (2.9)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n^{-1} = \infty \quad (2.10)$$

и

$$p_n^{-1} \leq \alpha_{N_n} \text{ для } N_n = \sum_{k=1}^n p_k. \quad (2.11)$$

Так как $\alpha_N \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$), то, в силу (2.9) и (2.11),

$$p_n \uparrow \infty \quad (n \rightarrow \infty). \quad (2.12)$$

Кроме того, согласно определению последовательности $\{N_n\}$,

$$N_{n-1} + p_n - 1 = N_n - 1 < N_n. \quad (2.13)$$

Далее, положим

$$\gamma_n = 2\pi \sum_{k=1}^n p_k^{-1} - 3\pi p_n^{-1} \quad (2.14)$$

и построим ряды

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} t_{N_{n-1}, p_n}(x, \gamma_n)$$

и

$$U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} u_{N_{n-1}, p_n}(x, \gamma_n),$$

где $t_{N, p}(x, \gamma)$ и $u_{N, p}(x, \gamma)$ имеют те же значения, что и в § 1. Так как, в силу (2.13), старшие члены полиномов $t_{N_{n-1}, p_n}(x, \gamma_n)$ и $u_{N_{n-1}, p_n}(x, \gamma_n)$ для любого натурального n имеют порядок, меньший порядка младших членов полиномов $t_{N_n, p_{n+1}}(x, \gamma_{n+1})$ и $u_{N_n, p_{n+1}}(x, \gamma_{n+1})$, то построенные ряды являются обычными тригонометрическими рядами.

Покажем, что эти ряды удовлетворяют всем требованиям теоремы.

Прежде всего, так как полиномы $t_{N,p}(x, \gamma)$ и $u_{N,p}(x, \gamma)$ являются сопряженными тригонометрическими полиномами, то и ряды $T(x)$ и $U(x)$ — сопряженные тригонометрические ряды.

Далее, оценим коэффициенты рядов $T(x)$ и $U(x)$. Имеем:

$$|a_N|, |b_N| \leq \frac{1}{p_n} \text{ для } N_{n-1} \leq N < N_n.$$

Используя (2.11) и монотонность последовательности $\{\alpha_N\}$, получаем отсюда:

$$|a_N|, |b_N| \leq \frac{1}{p_n} \leq \alpha_{N_n} \leq \alpha_N \quad (N_{n-1} \leq N < N_n, \quad n=1, 2, \dots),$$

т. е. нужное соотношение (2.8).

Докажем, что ряд $T(x)$ расходится в каждой точке. Зафиксируем произвольно точку $x_0 \in [0, 2\pi)$. Так как, согласно (2.10), ряд $\sum p_n^{-1}$ расходится, то для любого целого неотрицательного l найдется такой номер n_l , что

$$2\pi \sum_{k=1}^{n_l-1} p_k^{-1} \leq x_0 + 2\pi l < 2\pi \sum_{k=1}^{n_l} p_k^{-1}.$$

Вычитая из каждой части этих неравенств

$$\gamma_{n_l} + 2\pi p_{n_l}^{-1} = 2\pi \sum_{k=1}^{n_l} p_k^{-1} - \pi p_{n_l}^{-1} = 2\pi \sum_{k=1}^{n_l-1} p_k^{-1} + \pi p_{n_l}^{-1},$$

получаем, что

$$-\pi p_{n_l}^{-1} \leq x_0 + 2\pi l - \gamma_{n_l} - 2\pi p_{n_l}^{-1} < \pi p_{n_l}^{-1},$$

откуда

$$|x_0 + 2\pi l - \gamma_{n_l} - 2\pi p_{n_l}^{-1}| \leq \pi p_{n_l}^{-1}. \quad (2.15)$$

Ясно, что $n_l \rightarrow \infty$ ($l \rightarrow \infty$). Обозначим через l' наименьший номер l , обладающий тем свойством, что $p_{n_l} \geq 24$, и рассмотрим полином

$$\begin{aligned} t_{N_{n_l-1}, p_{n_l}}(x, \gamma_{n_l}) &= \sum_{k=0}^{p_{n_l}-1} \cos \{(N_{n_l-1} + k)x - \gamma_{n_l}k\} = \\ &= D_{p_{n_l-1}}(x - \gamma_{n_l}, N_{n_l-1}x) \quad (l \geq l'). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Так как $x = x_0$ удовлетворяет условию (2.15), то, согласно следствию из леммы 1, найдется отрезок полинома (2.16), для которого

$$\left| \sum_{k=k_1}^{k_2} \cos \{(N_{n_l-1} + k)x_0 - \gamma_{n_l}k\} \right| \geq \frac{p_{n_l}}{48},$$

откуда

$$\left| \frac{1}{p_{n_l}} \sum_{k=k_1}^{k_2} \cos \{(N_{n_l-1} + k)x_0 - \gamma_{n_l}k\} \right| \geq \frac{1}{48}.$$

Но выражение внутри абсолютных скобок в этом неравенстве является отрезком ряда $T(x)$ для $x = x_0$. Мы имеем, следовательно, бесконечную последовательность отрезков этого ряда, на которых колебания не меньше $\frac{1}{48}$, откуда и вытекает расходимость ряда $T(x)$ для $x = x_0$.

Аналогично устанавливается расходимость ряда $U(x)$, и теорема полностью доказана.

Ясно, что эта теорема содержит в качестве следствий теоремы Колмогорова и Недера, сформулированные в п. 2.1.

В точности такими же рассуждениями можно доказать несколько более общую теорему:

ТЕОРЕМА 3. *Какова бы ни была последовательность положительных чисел $\{\alpha_n\}$, удовлетворяющая условиям $\alpha_n \downarrow 0$ и $\sum \alpha_n^2 = \infty$, существует степенной ряд*

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

с коэффициентами $c_n = O(\alpha_n)$ и такой, что для любого вещественного β тригонометрический ряд

$$T(x) = \operatorname{Re} \{e^{i\beta} S(e^{ix})\}$$

расходится в каждой точке.

2.4. Дополнительные замечания. Конструкция, использованная при доказательстве теоремы 2, может также служить для установления ряда родственных предложений. Мы укажем здесь некоторые из них. Поскольку доказательства этих предложений мало чем отличаются от доказательства теоремы 2, мы будем их только намечать, обращая внимание на те места, где имеются отличия.

Прежде всего, конструкцию теоремы 2 можно изменить так, чтобы частичные суммы рядов $T(x)$ и $U(x)$ были неограниченными в каждой точке. Для этого по заданной последовательности $\{\alpha_n\}$ находим последовательность $\{\alpha'_n\}$, обладающую теми же свойствами, что и $\{\alpha_n\}$, и кроме того, удовлетворяющую условию

$$\alpha'_n = o(\alpha_n).$$

Далее, по последовательности $\{\alpha'_n\}$ строим, как и раньше, $\{p'_n\}$, $\{N'_n\}$, $\{\gamma'_n\}$ и полагаем

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha'_{N'_n} t'_{N'_{n-1}, p'_n}(x, \gamma'_n),$$

$$U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha'_{N'_n} u'_{N'_{n-1}, p'_n}(x, \gamma'_n).$$

Тогда, очевидно,

$$a_n, b_n = O(\alpha_n).$$

Кроме того, рассуждая, как при доказательстве теоремы 2, получаем, что для каждого x_0 существует бесконечная последовательность отрез-

ков ряда $T(x)$, каждый из которых принадлежит некоторому полиному $\alpha'_{N'_l} t'_{N'_l-1, p'_{N'_l}}(x, \gamma'_{N'_l})$ и удовлетворяет условию:

$$\begin{aligned} |\alpha'_{N'_l} \sum_{k=k_1}^{k_2} \cos \{(N'_{l-1} + k)x_0 - \gamma'_{N'_l} k\}| &\geq \alpha'_{N'_l} \frac{p'_{N'_l}}{48} = \\ &= \frac{\alpha'_{N'_l}}{\alpha'_{N'_l}} \frac{1}{48} \alpha'_{N'_l} p'_{N'_l} \geq \frac{1}{48} \frac{\alpha'_{N'_l}}{\alpha'_{N'_l}} \rightarrow \infty \quad (l \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

так как $\alpha'_{N'_l} p'_{N'_l} \geq 1$ и $\frac{\alpha'_{N'_l}}{\alpha'_{N'_l}} \rightarrow \infty$. В силу этого, $T(x)$ имеет для $x = x_0$ неограниченные частичные суммы. Аналогичное рассуждение проходит и для $U(x)$.

Переходим ко второму видоизменению теоремы 2. Недер ⁽⁷⁾ рассмотрел следующую задачу: пусть дан степенной ряд

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| e^{i\varphi_n} z^n.$$

При каких ограничениях на модули чисел c_n можно так распорядиться их аргументами φ_n , чтобы получить степенной ряд, расходящийся в каждой точке единичной окружности $|z| = 1$? Недер показал, что это всегда возможно при выполнении условия

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{c_n^*\}^2 = \infty,$$

где

$$c_n^* = \min_{k=0,1,\dots,n} |c_k|.$$

Рассмотрим аналогичную задачу для пар сопряженных тригонометрических рядов. Именно, покажем, что, какова бы ни была последовательность положительных чисел $\{\rho_n\}$, для которой, полагая

$$\rho_n^* = \min_{k=0,1,\dots,n} \rho_k,$$

будем иметь

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{\rho_n^*\}^2 = \infty,$$

существует пара сопряженных тригонометрических рядов вида

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \cos(nx - \varphi_n), \quad U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \sin(nx - \varphi_n),$$

расходящихся в каждой точке:

Для этого возьмем последовательность $\{\alpha_n\}$, удовлетворяющую условиям $\alpha_n \downarrow 0$, $\sum \alpha_n^2 = \infty$, $\alpha_n \leq \rho_n$, построим для нее последовательности $\{p_n\}$, $\{N_n\}$ и $\{\gamma_n\}$ и положим

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=N_{n-1}}^{N_n-1} \rho_k \cos \{(N_{n-1} + k)x - \gamma_n k\}, \quad (2.16)$$

$$U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=N_{n-1}}^{N_n-1} \rho_k \sin \{(N_{n-1} + k)x - \gamma_n k\}. \quad (2.17)$$

Нуждается в проверке лишь расхожимость этих рядов, и она устанавливается точно так же, как в теореме 2, только вместо следствия из леммы 1 нужно воспользоваться самой леммой 1.

Аналогично тому, как это было сделано выше в связи с теоремой 2, можно также добиться того, чтобы частичные суммы рядов (2.16) и (2.17) были неограниченными в каждой точке.

Наконец, Недер доказал следующее предложение: какова бы ни была последовательность положительных чисел $\{\lambda_n\}$, $\lambda_n \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$, существует степенной ряд

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

расходящийся в каждой точке единичной окружности и такой, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|c_n|^2}{\lambda_n} < \infty.$$

Доказательство этого предложения Недер редуцирует к своей теореме сформулированной нами в п. 2.1. Такая же редукция проходит и в рассматриваемом нами случае пары сопряженных тригонометрических рядов, и мы получаем, что, какова бы ни была последовательность положительных чисел $\{\lambda_n\}$, $\lambda_n \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$, существует пара сопряженных тригонометрических рядов, расходящихся в каждой точке и таких, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \{|a_n^2| + |b_n|^2\} < \infty.$$

В заключение заметим, что все результаты п. 2.4 можно обобщить в духе теоремы 3; доказательства не меняются.

Математический институт
им. В. А. Стеклова Ак. наук СССР

Поступило
25.IV.1957

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ З и г м у н д А., Тригонометрические ряды, М.—Л., 1939.
- ² К у з ь м и н Р. О., О тригонометрических рядах, расходящихся повсюду, Труды Ленинградского индустриального института, раздел физ.-матем., 10, в. 3 (1936), 53—56.

- ³ Лузин Н. Н., Über eine Potenzreihe, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 32 (1911), 386—390.
 - ⁴ Лузин Н. Н., Об одном случае ряда Taylor'a, Матем. сборн., 28 (1912), 295—302.
 - ⁵ Лузин Н. Н., Интеграл и тригонометрический ряд, М.—Л., 1951.
 - ⁶ Лузин Н. Н., Собрание сочинений, т. 1, М., 1953.
 - ⁷ N e d e r L., Zur Theorie der trigonometrischen Reihen, Mathem. Ann., 84 (1921), 117—136.
 - ⁸ S t e i n h a u s H., Une série trigonométrique partout divergente, Comptes Rendus de la Soc. Scient. de Varsovie (1912), 219—229.
 - ⁹ С т е ч к и н С. Б., О сходимости и расходимости тригонометрических рядов, Успехи матем. наук, 6, в. 2 (42) (1951), 148—149.
 - ¹⁰ H a r d y G. H., On the summability of Fourier series, Proc. London Math. Soc., 12 (1913), 365—372.
 - ¹¹ H a r d y G. H. and L i t t l e w o o d J. E., Some Problems of Diophantine approximation: A remarkable trigonometrical series, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., 2 (1916), 583—586.
-

А. Г. ПОСТНИКОВ и И. И. ПЯТЕЦКИЙ

НОРМАЛЬНАЯ ПО МАРКОВУ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ЗНАКОВ И НОРМАЛЬНАЯ ЦЕПНАЯ ДРОБЬ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым)

Доценту Георгию Вячеславовичу Ложеницыну
этот труд посвящают авторы.

Настоящая работа служит продолжением работы авторов ⁽¹⁾, посвященной нормальной по Бернулли последовательности знаков. Здесь вводятся и изучаются с той же точки зрения понятие нормальной по Маркову последовательности знаков и понятие нормальной непрерывной дроби.

§ 1

Докажем нужную для приложений теорему.

ТЕОРЕМА 1. Пусть на пространстве динамической системы заданы две инвариантные нормированные меры μ и $\bar{\mu}$, причем существует константа $C > 0$ такая, что для любого измеримого по мерам μ и $\bar{\mu}$ множества M

$$\bar{\mu} M \leq C \mu M.$$

Предположим, что система не разложима по отношению к мере μ . Тогда меры $\bar{\mu}$ и μ совпадают, т. е. для любого открытого множества M

$$\bar{\mu} M = \mu M.$$

Доказательство. Рассмотрим какое-либо множество M и предположим, что $\varphi(x)$ — характеристическая функция M . По теореме Биркгофа (2-я часть), почти для всех $\alpha \in R$ по мере μ

$$\frac{\varphi(\alpha) + \varphi(T\alpha) + \dots + \varphi(T^k\alpha)}{k+1} \rightarrow \mu M.$$

Пусть M^* — множество тех α , для которых это не выполняется: $\mu M^* = 0$. Тогда

$$\bar{\mu} M^* \leq C \cdot 0 = 0, \quad \bar{\mu} M^* = 0$$

(множество M^* измеримо и по $\bar{\mu}$). Итак, почти для всех α по мере $\bar{\mu}$

$$\frac{\varphi(\alpha) + \varphi(T\alpha) + \dots + \varphi(T^k\alpha)}{k+1} \rightarrow \mu M.$$

Применяя вторично теорему Биркгофа, получаем, что почти для всех α по мере $\bar{\mu}$

$$\frac{\varphi(\alpha) + \varphi(T\alpha) + \dots + \varphi(T^k\alpha)}{k+1} \rightarrow \psi(\alpha),$$

причем

$$\int_R \psi(\alpha) d\bar{\mu} = \int_R \varphi(\alpha) d\bar{\mu},$$

т. е. в данном случае

$$\int_R \psi(\alpha) d\bar{\mu} = \bar{\mu} \mathcal{M}.$$

Но мы уже установили, что почти для всех α по мере $\bar{\mu}$ $\psi(\alpha) = \mu \mathcal{M}$; следовательно,

$$\bar{\mu} \mathcal{M} = \int_R \psi(\alpha) d\bar{\mu} = \int_R \mu \mathcal{M} d\bar{\mu} = \mu \mathcal{M} \int_R d\bar{\mu} = \mu \mathcal{M},$$

что и требовалось доказать.

§ 2

Будем, ради простоты, рассматривать цепь Маркова с двумя состояниями.

Рассмотрим некоторую систему, которая может находиться в двух состояниях E_0 и E_1 . Пусть p_{ij} , $i=0,1$, $j=0,1$, есть вероятность перехода из состояния E_i в состояние E_j . Мы предполагаем, что все p_{ij} больше нуля.

Очевидно

$$p_{00} + p_{01} = 1,$$

$$p_{10} + p_{11} = 1.$$

Пусть начальные вероятности p_0 и p_1 определяются формулами:

$$p_0 = \frac{p_{10}}{p_{01} + p_{10}},$$

$$p_1 = \frac{p_{01}}{p_{01} + p_{10}}.$$

В этом случае цепь называется стационарной и справедливо соотношение:

$$\text{при } n \rightarrow \infty \quad p_{ab}^{(n)} \rightarrow p_b,$$

где $p_{ab}^{(n)}$ — вероятность перехода за n шагов из состояния E_a в состояние E_b .

Результаты осуществления подобной схемы будем записывать в виде неограниченной последовательности чисел: 0, если система находилась в состоянии E_0 , и 1, если система находилась в состоянии E_1 . Полученную последовательность будем называть последовательностью исходов.

Пусть имеется последовательность знаков 0 и 1

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots).$$

Сопоставим ей вещественное число из отрезка $[0, 1)$, которое будем обозначать тоже через α :

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \dots$$

Известно, что такое сопоставление не является взаимно однозначным, однако в разбираемых вопросах это обстоятельство не является существенным (взаимная однозначность нарушается на счетном множестве).

Введем на отрезке $[0, 1)$ меру μ следующим образом: мера полуинтервала $\left[\frac{A}{2^n}, \frac{A+1}{2^n}\right)$, где $n \geq 0$ — целое, $A \geq 0$ — целое, $A = 2^{n-1}\alpha_1 + 2^{n-2}\alpha_2 + \dots + \alpha_n$, равна

$$P_{\alpha_1} P_{\alpha_1 \alpha_2} \dots P_{\alpha_{n-1} \alpha_n},$$

т. е. мера $\mu \left[\frac{A}{2^n}, \frac{A+1}{2^n}\right)$ равна вероятности осуществления за первые n шагов исходов, записанных в виде $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)$. Опираясь на введение меры μ для интервалов $\left[\frac{A}{2^n}, \frac{A+1}{2^n}\right)$, мы можем построить теорию измерения и теорию интеграла, аналогичную лебеговской.

Пусть $\Delta = (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_s)$ — какая-либо s -членная комбинация знаков 0 и 1; тогда выражение

$$P_{\varepsilon_1} P_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \dots P_{\varepsilon_{s-1} \varepsilon_s}$$

будем называть вероятностью этой комбинации и обозначать через $\mu\Delta$.

Рассмотрим некоторую последовательность знаков (или число α)

$$\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_P, \dots$$

и первые $P + s - 1$ знаков запишем в следующую строчку:

$$(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s) (\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{s+1}) \dots (\alpha_P \alpha_{P+1} \dots \alpha_{P+s-1}).$$

Назовем такую строчку гусеницей длиной P и ранга s числа α . Обозначим через $N_P(\alpha, \Delta)$, или просто $N_P(\Delta)$, число, указывающее, сколько раз встречается комбинация Δ в гусенице длиной P числа α (или последовательности знаков α).

Последовательность знаков α (или число α) назовем нормальной по Маркову, если для любого $s \geq 1$ и любой s -членной комбинации Δ

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \frac{N_P(\Delta)}{P}$$

существует и равен $\mu\Delta$. Очевидно, что $N_P(\Delta)$ равно количеству дробных долей $\{\alpha 2^x\}$, $x = 0, 1, \dots, P-1$, попавших на интервал вида

$$\Delta = \left[\frac{A}{2^s}, \frac{A+1}{2^s}\right), \quad A = 2^{s-1}\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_s.$$

Нормальность последовательности знаков на языке теории чисел означает, что для любого такого интервала количество дробных долей $\{\alpha 2^x\}$ с $0 \leq x \leq P-1$, попавших на Δ , удовлетворяет асимптотическому закону

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \frac{N_P(\Delta)}{P} = \mu\Delta,$$

а поскольку интервалами Δ можно приблизить любой интервал, то это означает, что соотношение

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \frac{N_P(\Delta)}{P} = \mu\Delta$$

верно для любого интервала. Таким образом, дробные доли $\{\alpha 2^x\}$ распределены по закону, соответствующему мере μ .

Введем на отрезке $[0, 1)$, который будем обозначать буквой R , преобразование

$$\alpha \rightarrow \{2\alpha\}, \quad T\alpha = \{2\alpha\}.$$

Это же будет преобразованием в пространстве последовательности знаков

$$T(\alpha_1, \alpha_2, \dots) = (\alpha_2, \alpha_3, \dots).$$

Такое преобразование не является взаимно однозначным. Через $T^k\alpha$ обозначим преобразование T , повторенное k раз. Справедливо очевидное равенство:

$$T^{k_1+k}\alpha = T^{k_1}(T^{k_2}\alpha).$$

Таким образом, мы имеем дело с динамической системой.

ЛЕММА 1. Мера μ есть инвариантная мера для преобразования T , т. е. мера полного прообраза измеримого множества равна мере образа.

Доказательство. Достаточно доказать это утверждение для интервалов вида $\left[\frac{A}{2^n}, \frac{A+1}{2^n}\right)$. Полный прообраз этого интервала состоит

из двух интервалов: $\left[\frac{A}{2^{n+1}}, \frac{A+1}{2^{n+1}}\right)$ и $\left[\frac{\frac{A}{2^n} + 1}{2}, \frac{2^n + A + 1}{2^{n+1}}\right)$. Если

$$A = 2^{n-1}\alpha_1 + \dots + \alpha_n,$$

то это также значит, что

$$A = 2^n \cdot 0 + 2^{n-1}\alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

и

$$2^n + A = 2^n + 2^{n-1}\alpha_1 + \dots + \alpha_n;$$

$$p_0 p_{0\alpha_1} p_{\alpha_1\alpha_2} \dots p_{\alpha_{n-1}} + p_1 p_{1\alpha_1} p_{\alpha_1\alpha_2} \dots p_{\alpha_{n-1}\alpha_n} =$$

$$= p_{\alpha_1\alpha_2} p_{\alpha_2\alpha_3} \dots p_{\alpha_{n-1}\alpha_n} \left(\frac{p_{10} p_{0\alpha_1}}{p_{01} + p_{10}} + \frac{p_{01} p_{1\alpha_1}}{p_{01} + p_{10}} \right) = p_{\alpha_1} p_{\alpha_1\alpha_2} \dots p_{\alpha_{n-1}\alpha_n},$$

ибо

$$p_{10} p_{0\alpha_1} + p_{01} p_{1\alpha_1} = p_{1-\alpha_1, \alpha_1}$$

(отдельно проверяется для $\alpha_1 = 0$ и для $\alpha_1 = 1$). Это доказывает лемму.

Мы будем обозначать через $E \begin{pmatrix} i_1 i_2 \dots i_s \\ \varepsilon_{i_1} \varepsilon_{i_2} \dots \varepsilon_{i_s} \end{pmatrix}$ множество тех α , у которых i -й двоичный знак есть ε_{i_1} , i_2 -й двоичный знак есть ε_{i_2} , ..., i_s -й двоичный знак есть ε_{i_s} ($i_1 < i_2 < \dots < i_s$). Через $\mu E \begin{pmatrix} i_1 i_2 \dots i_s \\ \varepsilon_{i_1} \varepsilon_{i_2} \dots \varepsilon_{i_s} \end{pmatrix}$ обозначим меру этого множества. Очевидно при $i_1 \geq 2$

$$T^{-1} E \begin{pmatrix} i_1 - 1 & i_2 - 1 & \dots & i_s - 1 \\ \varepsilon_{i_1} & \varepsilon_{i_2} & \dots & \varepsilon_{i_s} \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_s \\ \varepsilon_{i_1} & \varepsilon_{i_2} & \dots & \varepsilon_{i_s} \end{pmatrix}.$$

Поэтому при $0 \leq i \leq i_1 - 1$

$$\mu E \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_s \\ \varepsilon_{i_1} & \varepsilon_{i_2} & \dots & \varepsilon_{i_s} \end{pmatrix} = \mu E \begin{pmatrix} i_1 - 1 & i_2 - i & \dots & i_s - 1 \\ \varepsilon_{i_1} & \varepsilon_{i_2} & \dots & \varepsilon_{i_s} \end{pmatrix}.$$

ЛЕММА 2. Отрезок $[0,1)$ нельзя разложить на сумму двух инвариантных множеств $U_1 \cup U_2$ без общих точек, оба положительной меры.

Доказательство. Допустим, что нам удалось разложить отрезок $[0,1)$ на сумму двух инвариантных множеств положительной меры без общих точек. Обозначим $\eta = \mu U_1$, $0 < \eta < 1$ (строго!). Пусть $\chi(x)$ — характеристическая функция множества U_1 и $0 \leq A \leq 2^n - 1$ — целое число:

$$A = 2^{n-1} \delta_1 + \dots + \delta_n.$$

Поскольку $\frac{x+A}{2^n}$ есть один из прообразов точки x (если взять n раз преобразование T^{-1}), то

$$\chi\left(\frac{x+A}{2^n}\right) = \chi(x)$$

для любого $x \in [0,1)$. Подсчитаем меру μ части U_1 , лежащей на отрезке $\left[\frac{A}{2^n}, \frac{A+1}{2^n}\right)$. Она равна

$$\int_{\frac{A}{2^n}}^{\frac{A+1}{2^n}} \chi(x) d\mu.$$

Рассмотрим переменные y и $\frac{y+A}{2^n}$. Пусть y пробегает некоторый отрезок

$$\left[\frac{B}{2^s}, \frac{B+1}{2^s}\right], \quad B = 2^{s-1} \epsilon_1 + \dots + \epsilon_s;$$

тогда $\frac{y+A}{2^n}$ пробегает отрезок

$$\left[\frac{2^s A + B}{2^{s+n}}, \frac{2^s A + B + 1}{2^{s+n}}\right],$$

причем, поскольку

$$2^s A + B = 2^{s+n-1} \delta_1 + \dots + 2^s \delta_n + 2^{s-1} \epsilon_1 + \dots + \epsilon_s,$$

то мера этого отрезка равна

$$\begin{aligned} & p_{\delta_1} p_{\delta_2} \dots p_{\delta_{n-1}} p_{\delta_n} p_{\epsilon_1} p_{\epsilon_2} \dots p_{\epsilon_{s-1}} p_{\epsilon_s} = \\ & = \mu \left[\frac{A}{2^n}, \frac{A+1}{2^n} \right) \frac{p_{\delta_n \epsilon_1}}{p_{\epsilon_1}} \left[\frac{B}{2^s}, \frac{B+1}{2^s} \right], \end{aligned}$$

е.

$$\int_{\frac{A}{2^n}}^{\frac{A+1}{2^n}} \chi(x) d\mu = \mu \left[\frac{A}{2^n}, \frac{A+1}{2^n} \right) \int_0^1 \chi\left(\frac{y+A}{2^n}\right) \frac{p_{\delta_n \epsilon_1}}{p_{\epsilon_1}} d\mu,$$

где $p_{\delta_n \epsilon_1}$ и p_{ϵ_1} — некоторые функции y , ибо ϵ_1 есть функция y , а именно, его первый двоичный знак. Так как

$$\chi(y) = \chi\left(\frac{y+A}{2^n}\right),$$

то

$$\begin{aligned} \int_{\frac{A}{2^n}}^{\frac{A+1}{2^n}} \chi(x) d\mu &= \mu \left[\frac{A}{2^n}, \frac{A+1}{2^n} \right] \int_0^1 \chi(y) \frac{P_{\delta_n \varepsilon_1}}{P_{\varepsilon_1}} d\mu = \\ &= \mu \left[\frac{A}{2^n}, \frac{A+1}{2^n} \right] \left(\frac{P_{\delta_n 0}}{P_0} \int_0^{\frac{1}{2}} \chi(y) d\mu + \frac{P_{\delta_n 1}}{P_1} \int_{\frac{1}{2}}^1 \chi(y) d\mu \right) = \\ &= \mu \left[\frac{A}{2^n}, \frac{A+1}{2^n} \right] \left(\frac{P_{\delta_n 0}}{P_0} \eta_1 + \frac{P_{\delta_n 1}}{P_1} \eta_2 \right), \end{aligned}$$

где

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \chi(y) d\mu = \eta_1, \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 \chi(y) d\mu = \eta_2.$$

Далее,

$$\eta_1 \leq \int_0^{\frac{1}{2}} d\mu = p_0, \quad \eta_2 \leq \int_{\frac{1}{2}}^1 d\mu = p_1,$$

и поскольку

$$\eta_1 + \eta_2 = \eta < p_0 + p_1 = 1$$

(неравенство строгое), то по меньшей мере одно из неравенств $\eta_1 \leq p_0$, $\eta_2 \leq p_1$ строгое. Поэтому

$$\frac{P_{\delta_n 0}}{P_0} \eta_1 + \frac{P_{\delta_n 1}}{P_1} \eta_2 < \frac{P_{\delta_n 0}}{P_0} p_0 + \frac{P_{\delta_n 1}}{P_1} p_1 = 1 \text{ (строго!)},$$

т. е.

$$\int_{\frac{A}{2^n}}^{\frac{A+1}{2^n}} \chi(x) d\mu = \mu \left[\frac{A}{2^n}, \frac{A+1}{2^n} \right] \eta',$$

где η' (возможно оно зависит от A) строго меньше некоторого $\rho < 1$, не зависящего от n и A .

Итак,

$$\frac{\mu \left(U_1 \cap \left[\frac{A}{2^n}, \frac{A+1}{2^n} \right] \right)}{\mu \left[\frac{A}{2^n}, \frac{A+1}{2^n} \right]} < \rho < 1.$$

Зададим $\varepsilon > 0$ и $1 - \rho > \varepsilon$ (оба неравенства строгие). По аналогу теоремы Лебега, множество U_1 , как множество положительной меры μ , должно иметь точку плотности ϑ_0 , т. е. для $\varepsilon > 0$ можно найти такое σ_0 , что какой бы интервал Δ_δ с $\mu \Delta_\delta \leq \delta_0$ мы ни взяли около точки ϑ_0 ,

$$\frac{\mu(U_1 \cap \Delta_\delta)}{\mu \Delta_\delta} > 1 - \varepsilon.$$

возьмем n столь большим, чтобы для любого $(0 \leq A \leq 2^\varepsilon - 1)$ интервала

$$\mu \left[\frac{A}{2^n}, \frac{A+1}{2^n} \right] \leq \delta_0,$$

за Δ_δ возьмем интервал $\left[\frac{A}{2^n}, \frac{A+1}{2^n} \right]$, на котором лежит ϑ_0 . Мы имеем:

$$\mu(U_1 \cap \Delta_\delta) < \rho \cdot \mu \Delta_\delta.$$

с другой стороны,

$$\mu(U_1 \cap \Delta_\delta) > (1 - \varepsilon) \mu \Delta_\delta.$$

это дает: $\rho > 1 - \varepsilon$, что противоречит условию $1 - \rho > \varepsilon$. Значит, наше предположение было ошибочным, и лемма установлена.

ТЕОРЕМА 2. Мера μ множества нормальных по Маркову чисел α равна 1.

Доказательство. Применяя вторую часть эргодической теоремы Биркгофа, получаем, что, какова бы ни была абсолютно интегрируемая r мере на $[0,1]$ функция $\varphi(x)$, почти для всех α

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(\alpha) + \varphi(\{2\alpha\}) + \dots + \varphi(\{2^{n-1}\alpha\})}{n} = \int_0^1 \varphi(x) d\mu.$$

в частности, за $\varphi(x)$ характеристическую функцию интервала

$$\Delta = \left[\frac{A}{2^s}, \frac{A+1}{2^s} \right],$$

получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(\alpha, \Delta)}{n} = \mu \Delta.$$

Теорема 2 вытекает теперь из того, что интервалов Δ (с любыми A и r) счетное множество и что такими интервалами сколь угодно точно аппроксимируется любой интервал отрезка $[0,1]$.

Замечание. Эту теорему можно доказать и непосредственно, однако выкладки при проведении такого доказательства очень громоздки.

Докажем следующий критерий нормальности по Маркову последовательности знаков α .

ТЕОРЕМА 3. Пусть последовательность знаков такая, что, каково бы ни было $s \geq 1$ и какова бы ни была s -членная комбинация Δ , выполняется неравенство:

$$\overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} \frac{N_p(\alpha, \Delta)}{p} < C \mu \Delta,$$

где C — константа, не зависящая от s и Δ . Тогда α — нормальная по Маркову последовательность знаков.

Доказательство. Предположим, что α — не нормальное по Маркову число. Тогда имеются интервал δ , последовательность целых чисел $\{n_k\}$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что

$$\left| \frac{N_{n_k}(\alpha, \delta)}{n_k} - \mu \delta \right| \geq \varepsilon.$$

По теореме Хелли, из последовательности $\{n_k\}$ можно выбрать такую последовательность $\{n_{k_i}\}$, что для любого интервала Δ существует

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{N_{n_{k_i}}(\alpha, \Delta)}{n_{k_i}} = \bar{\mu} \Delta.$$

Поскольку

$$\frac{N_P(\alpha, \Delta)}{P} = \frac{N_P(\alpha, T^{-1}\Delta)}{P} + \frac{2\theta}{P}, \quad |\theta| \leq 1,$$

то

$$\bar{\mu} \Delta = \bar{\mu} T^{-1} \Delta,$$

т. е. $\bar{\mu} \Delta$ — инвариантная мера в динамической системе.

Далее, по условию,

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \frac{N_P(\alpha, \Delta)}{P} < C \mu \Delta,$$

т. е.

$$\bar{\mu} \Delta < C \mu \Delta.$$

Применяя теорему 1, получаем:

$$\bar{\mu} \Delta = \mu \Delta.$$

Но условие

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{N_{n_{k_i}}(\alpha, \Delta)}{n_{k_i}} = \mu \Delta$$

противоречит условию

$$\left| \frac{N_{n_{k_i}}(\alpha, \Delta)}{n_{k_i}} - \mu \Delta \right| \geq \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Замечание. Эту теорему можно было бы доказать непосредственно, подобно тому как в работе (1) доказана теорема 2 (т. е. используя аналог метода Виноградова оценок тригонометрических сумм). Однако при этом выкладки получаются очень громоздкими.

Используя критерий нормальности (теорема 3), мы дадим эффективное построение нормальной по Маркову последовательности знаков. Оно будет типа построения Чемпернуона [см. (2)].

Пусть имеются последовательность целых чисел $2 \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots$, для которой

$$\frac{\beta_r}{\beta_{r-1}} = 1 + O\left(\frac{1}{r}\right),$$

и четыре последовательности целых положительных чисел $\alpha_{00}^{(r)}$, $\alpha_{01}^{(r)}$, $\alpha_{10}^{(r)}$, $\alpha_{11}^{(r)}$, для которых выполнены соотношения:

$$\alpha_{00}^{(r)} + \alpha_{01}^{(r)} = \beta_r,$$

$$\alpha_{10}^{(r)} + \alpha_{11}^{(r)} = \beta_r$$

и при $r \rightarrow \infty$

$$\frac{\alpha_{10}^{(r)}}{\beta_r} \rightarrow p_{10}, \quad \frac{\alpha_{01}^{(r)}}{\beta_r} \rightarrow p_{01}.$$

Рассмотрим для каждого r вспомогательную цепь Маркова с двумя состояниями и соответствующим ей мероопределением на $[0,1]$ $\mu^{(r)}$, в которой начальные вероятности задаются величинами

$$\gamma_0^{(r)} = \frac{\alpha_{10}^{(r)}}{\alpha_{10}^{(r)} + \alpha_{01}^{(r)}}, \quad \gamma_1^{(r)} = \frac{\alpha_{01}^{(r)}}{\alpha_{10}^{(r)} + \alpha_{01}^{(r)}},$$

а переходные вероятности задаются в виде

$$\gamma_{ij} = \frac{\alpha_{ij}^{(r)}}{\beta_r}.$$

Это будут стационарные цепи и при любой комбинации знаков Δ

$$\mu^{(r)}\Delta = \mu\Delta + o(1) \text{ при } r \rightarrow \infty.$$

Обозначим через s_r последовательность всех r -значных чисел в системе счисления с основанием 2 (включая числа, начинающиеся с нуля и с нулей) и каждое число Δ будем повторять

$$(\alpha_{10}^{(r)} + \alpha_{01}^{(r)}) \beta_r^{r-1} \mu^{(r)} \Delta$$

раз. Написанные r -значные числа будем отделять друг от друга сверху запятыми.

Докажем, что последовательность знаков, символически записанная в виде

$$\alpha = s_1 s_2 s_3 \dots,$$

— нормальная по Маркову. Для этого, по теореме 3, достаточно показать, что существует постоянная C такая, что для любого $s \geq 1$ и любой s -членной комбинации $\Delta_s = (\delta_1 \delta_2 \dots \delta_s)$

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \frac{N_P(\Delta_s)}{P} < C \mu \Delta_s.$$

Введем обозначения:

x_r — количество знаков 0 и 1 в s_r .

S_r — последовательность $s_1 s_2 s_3 \dots s_r$.

X_r — количество знаков 0 и 1 в S_r ; $X_r = x_1 + x_2 + \dots + x_r$.

g_r — количество появлений Δ_s в s_r .

G_r — количество появлений Δ_s в S_r .

Подсчитаем x_r . Мы знаем, что каждое r -значное число содержит r знаков и повторяется $(\alpha_{10}^{(r)} + \alpha_{01}^{(r)}) \beta_r^{r-1} \mu^{(r)} \Delta_r$ раз. Значит,

$$x_r = \sum_{\Delta_r} r (\alpha_{10}^{(r)} + \alpha_{01}^{(r)}) \beta_r^{r-1} \mu^{(r)} \Delta_r = r (\alpha_{10}^{(r)} + \alpha_{01}^{(r)}) \beta_r^{r-1}.$$

Сумма распространена по всем комбинациям Δ_r и поэтому

$$\sum_{\Delta_r} \mu^{(r)} \Delta_r = 1.$$

Комбинация Δ_s может входить в s_r разделенной и не разделенной запятой. Если $r < s$, то Δ_s не может входить в s_r неразделенной. Если $r \geq s$ то Δ_s входит в s_r не разделенной ровно

$$(r - s + 1) \beta_r^{r-1} (\alpha_{10}^{(r)} + \alpha_{01}^{(r)}) \mu^{(r)} \Delta_s$$

раз. Действительно, существует ровно $r - s + 1$ способов, посредством которых Δ_s может занимать неразделенное положение в r -значном числе. Первый знак Δ_s может совпадать с первым, вторым, ..., $(r - s + 1)$ -знаком r -значного числа. Зафиксировав k -е положение, найдем, что существуют

$$\mu^{(r)} E \begin{pmatrix} k & k+1 & \dots & k+s \\ \delta_1 & \delta_2 & \dots & \delta_{s-1} \end{pmatrix} (\alpha_{10}^{(r)} + \alpha_{01}^{(r)}) \beta_r^{r-1} = (\alpha_{10}^{(r)} + \alpha_{01}^{(r)}) \beta_r^{r-1} \mu^{(r)} E \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & s \\ \delta_1 & \delta_2 & \dots & \delta_s \end{pmatrix}$$

(равенство написано на основании стационарности вспомогательной цепи Маркова) r -значных чисел, в которых Δ_s занимает это положение. Таким образом, Δ_s входит в s_r не разделенной точно

$$(r - s + 1) \beta_r^{r-1} (\alpha_{10}^{(r)} + \alpha_{01}^{(r)}) \mu^{(r)} \Delta_s$$

раз. Далее, s_r содержит

$$(\alpha_{10}^{(r)} + \alpha_{01}^{(r)}) \beta_r^{r-1}$$

запятых. Данная запятая не может делить более s различных Δ_s . Поэтому Δ_s входит разделенной в s_r не более

$$O(s(\alpha_{10}^{(r)} + \alpha_{01}^{(r)}) \beta_r^{r-1}) = O\left(\frac{x_r}{r}\right)$$

раз (s можно относить в константы, ибо растет r). Таким образом,

$$g_r = (r - s + 1) (\alpha_{10}^{(r)} + \alpha_{01}^{(r)}) \beta_r^{r-1} \mu^{(r)} \Delta_s + o(x_r) = x_2 \mu^{(r)} \Delta_s + o(x_r).$$

Так как

$$\mu^{(r)} \Delta_s = \mu \Delta_s + o(1),$$

то

$$g_r = x_r \mu \Delta_s + o(x_r).$$

Далее,

$$G_r = \sum_{k=1}^n g_r + O(r), \quad X_r = \sum_{k=1}^r x_r.$$

Мы получаем:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{G_r}{X_r} = \mu \Delta_s.$$

Пусть

$$X_{r-1} \leq P < X_r.$$

Очевидно, $N_P(\Delta_s) \leq G_r$ и

$$X_{r-1} \geq (r-1) (\alpha_{10}^{(r-1)} + \alpha_{01}^{(r-1)}) \beta_{r-1}^{r-2}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{P} \leq \frac{X_r}{X_{r-1}} \cdot \frac{1}{X_r} = \frac{X_{r-1} + r(\alpha_{10}^{(r)} + \alpha_{01}^{(r)}) \beta_r^{r-1}}{X_{r-1}} \cdot \frac{1}{X_r} \leq \\ \leq \left(1 + \frac{r}{r-1} \frac{\alpha_{10}^{(r)} + \alpha_{01}^{(r)}}{\alpha_{10}^{(r-1)} + \alpha_{01}^{(r-1)}} \frac{\beta_r^{r-1}}{\beta_{r-1}^{r-2}} \right) \frac{1}{X_r}.$$

Так как

$$\frac{\beta_r}{\beta_{r-1}} = 1 + O\left(\frac{1}{r}\right)$$

и

$$\frac{\alpha_{10}^{(r-1)}}{\beta_{r-1}} + \frac{\alpha_{01}^{(r-1)}}{\beta_{r-1}} \rightarrow p_{10} + p_{01} > 0 \text{ (строго!)},$$

то

$$\frac{1}{P} \leq C \frac{1}{X_r}$$

и

$$\overline{\lim}_{P \rightarrow \infty} \frac{N_P(\Delta_s)}{P} \leq C \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{G_r}{X_r} = C \mu \Delta_s.$$

Критерий выполнен и нормальность по Маркову последовательности α установлена.

§ 3

Пусть R — множество иррациональных чисел отрезка $[0,1]$ с обычной метрикой. Пусть $\alpha \in R$ — иррациональное число — имеет следующее разложение в цепную дробь:

$$\alpha = \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{c_2 + \dots}}.$$

Ради экономии места будем записывать это в виде:

$$\alpha = c_1 c_2 c_3 \dots$$

Мы будем употреблять также символическую запись

$$\alpha = s_1 s_2 s_3 \dots,$$

где s_1, s_2, s_3, \dots — группы натуральных чисел:

$$s_1 = c_{11} \dots c_{1n_1}, \quad s_2 = c_{21} \dots c_{2n_2}, \quad s_3 = c_{31} \dots c_{3n_3}.$$

Эта запись означает цепную дробь

$$\alpha = c_{11} \dots c_{1n_1} c_{21} \dots c_{2n_2} c_{31} \dots c_{3n_3} \dots$$

Рассмотрим некоторую цепную дробь

$$\alpha = c_1 c_2 \dots c_P \dots$$

и первые $P + \rho - 1$ знаков запишем в следующую строчку:

$$(c_1, c_2, \dots, c_P)(c_2, c_3, \dots, c_{P+1}) \dots (c_P, c_{P+1}, \dots, c_{P+\rho-1}).$$

Назовем такую строчку гусеницей длиной P и ранга ρ цепной дроби α . Определим в R преобразование T :

$$T(c_1 c_2 c_3 \dots) = c_2 c_3 \dots,$$

т. е.

$$T\alpha = \left\{ \frac{1}{\alpha} \right\}.$$

Очевидно, что

$$T^{k_1+k_2}\alpha = T^{k_1}\{T^{k_2}\alpha\},$$

т. е. мы имеем дело с динамической системой во множестве иррациональных чисел на $[0,1]$.

Будем обозначать через $E \begin{pmatrix} i_1 i_2 \dots i_s \\ \epsilon_{i_1} \epsilon_{i_2} \dots \epsilon_{i_s} \end{pmatrix}$ множество тех $[\alpha]$, у которых i -й двоичный знак есть ϵ_{i_1} , i_2 -й двоичный знак есть ϵ_{i_2} , ..., i_s -й двоичный знак есть ϵ_{i_s} .

Введем в R меру μ посредством формулы:

$$\mu\Delta = \frac{1}{\log 2} \int_{\Delta} \frac{dx}{1+x}.$$

В работе ⁽³⁾ доказывается, что мера μ есть инвариантная мера в этой динамической системе. Отсюда, в частности, следует, что при $0 \leq i \leq i_1 - 1$

$$\mu E \begin{pmatrix} i_1 i_2 \dots i_s \\ \epsilon_{i_1} \epsilon_{i_2} \dots \epsilon_{i_s} \end{pmatrix} = \mu E \begin{pmatrix} i_1 - i i_2 - i \dots i_s - i \\ \epsilon_{i_1} \dots \epsilon_{i_s} \end{pmatrix},$$

ибо полный прообраз $E \begin{pmatrix} i_1 - 1 \dots i_s - 1 \\ \dots \epsilon_{i_s} \end{pmatrix}$ есть $E \begin{pmatrix} i_1 \dots i_s \\ \epsilon_{i_1} \dots \epsilon_{i_s} \end{pmatrix}$.

Заметим, что мера μE мало отличается от лебеговской меры $\text{mes } E$ так как

$$\frac{1}{2 \log 2} \text{mes } E \leq \mu E \leq \frac{1}{\log 2} \text{mes } E.$$

Рассмотрим последовательность

$$\alpha, T\alpha, T^2\alpha, \dots, T^{p-1}\alpha$$

и некоторый интервал Δ на $[0,1]$. Обозначим число членов из последовательности $\alpha, T\alpha, T^2\alpha, \dots, T^{p-1}\alpha$, попавших на Δ , через $N_P(\alpha, \Delta)$ или просто $N_P(\Delta)$. Если интервал Δ имеет вид

$$\Delta \equiv E \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r \\ a_1 & a_2 & \dots & a_r \end{pmatrix},$$

то, очевидно, $N_P(\Delta)$ равно количеству появлений в гусенице длины P дроби α комбинации $(a_1 a_2 \dots a_r)$.

Цепная дробь α называется нормальной, если, какой бы интервал Δ на $[0,1]$ мы ни взяли, $\lim_{P \rightarrow \infty} \frac{N_P(\alpha, \Delta)}{P}$ существует и

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \frac{N_P(\alpha, \Delta)}{P} = \mu\Delta = \frac{1}{\log 2} \int_{\Delta} \frac{dx}{1+x}.$$

В работе ⁽³⁾ доказывается, что динамическая система не разложима относительно меры μ . Отсюда непосредственным применением второй части теоремы Биркгофа получается

ТЕОРЕМА. Почти все дроби α по мере μ (или по мере Лебега) нормальны.

Рассуждая совершенно аналогично тому, как это делалось в доказательстве теоремы 3, установим справедливость следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 4. Пусть цепная дробь α такая, что, каково бы ни было $s \geq 1$ и какова бы ни была s -членная комбинация $\Delta = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$, выполняется неравенство:

$$\overline{\lim}_{P \rightarrow \infty} \frac{N_P(\alpha, \Delta)}{P} < C \operatorname{mes} E \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & s \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_s \end{pmatrix},$$

где C — константа, не зависящая от s и Δ . Тогда α — нормальная цепная дробь.

Сконструируем нормальную цепную дробь. При этом мы используем только что установленный критерий. Предварительно введем обозначения:

l, r — натуральные числа, $l \rightarrow \infty$, $r \rightarrow \infty$, $\frac{r}{l} \rightarrow 0$.

$s_r^{(l)}$ — строчка, состоящая из всех r -местных групп $a_1 a_2 \dots a_r$, где $1 \leq a_1 \leq l, \dots, 1 \leq a_r \leq l$ (a_1, a_2, \dots, a_r — натуральные), причем $a_1 a_2 \dots a_r$ повторяется $\left[2^{2r+1} l^{2r} \operatorname{mes} E \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_r \end{pmatrix} \right]$ раз. Эти r -местные группы отделяются друг от друга запятыми. Порядок этих групп в строчке не имеет значения.

Покажем, что

$$2^{2r+1} l^{2r} \operatorname{mes} E \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_r \end{pmatrix} > 1,$$

т. е. комбинация $a_1 a_2 \dots a_r$, действительно встречается в $s_r^{(l)}$. В самом деле,

$$2^{2r+1} l^{2r} \operatorname{mes} E \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_r \end{pmatrix} = \frac{2^{2r+1} l^{2r}}{q_r(q_r + q_{r-1})} > 2^{2r+1} l^{2r} \frac{1}{2q_r^2} = \frac{(2l)^r}{q_r^2} \geq 1,$$

ибо по индукции легко доказывается, что

$$q_r \leq (2l)^r, \quad q_{r+1} \leq lq_r + q_{r-1} \leq 2lq_r \leq (2l)^{r+1}.$$

Пусть, далее, $y_r^{(l)}$ — количество групп в $s_r^{(l)}$. Очевидно

$$\begin{aligned} y_r^{(l)} &= \sum_{a_1=1}^l \dots \sum_{a_r=1}^l \left[2^{2r+1} l^{2r} \operatorname{mes} E \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_r \end{pmatrix} \right] = \\ &= 2^{2r+1} l^{2r} \sum_{a_1=1}^l \dots \sum_{a_r=1}^l \operatorname{mes} E \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_r \end{pmatrix} + O(l^r). \end{aligned}$$

Обозначим дополнение к множеству

$$\bigcup_{a_1=1}^l \dots \bigcup_{a_r=1}^l E \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_r \end{pmatrix}$$

через $U_r^{(l)}$. Ясно, что

$$\begin{aligned} U_r^{(l)} = & \bigcup_{j=l+1}^{\infty} E \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ j \end{smallmatrix} \right) \cup \left(\bigcup_{f_1=1}^l \bigcup_{j=l+1}^{\infty} E \left(\begin{smallmatrix} 1 \ 2 \\ f_1 \ j \end{smallmatrix} \right) \right) \cup \left(\bigcup_{f_1=1}^l \bigcup_{f_2=1}^l \bigcup_{j=l+1}^{\infty} E \left(\begin{smallmatrix} 1 \ 2 \ 3 \\ f_1 \ f_2 \ j \end{smallmatrix} \right) \right) \cup \dots \\ & \dots \cup \bigcup_{f_1=1}^l \dots \bigcup_{f_{r-1}=1}^l \bigcup_{j=l+1}^{\infty} E \left(\begin{smallmatrix} 1 \ 2 \dots r-1 \ r \\ f_1 \ f_2 \dots f_{r-1} \ j \end{smallmatrix} \right). \end{aligned}$$

Поскольку [см., например, (4), стр. 69]

$$\text{mes } E \left(\begin{smallmatrix} 1 \ 2 \dots p \ p+1 \\ f_1 f_2 \dots f_p \ j \end{smallmatrix} \right) \leq C \text{mes } E \left(\begin{smallmatrix} 1 \ 2 \dots p \\ f_1 f_2 \dots f_p \end{smallmatrix} \right) \cdot \frac{1}{j^2}$$

и, очевидно,

$$\sum_{l+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = O\left(\frac{1}{l}\right),$$

то

$$\begin{aligned} \text{mes } U_r^{(l)} = & O\left(\frac{1}{l}\left(1 + \sum_{f_1=1}^l \text{mes } E \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ f_1 \end{smallmatrix} \right) + \sum_{f_1=1}^l \sum_{f_2=1}^l \text{mes } E \left(\begin{smallmatrix} 1 \ 2 \\ f_1 \ f_2 \end{smallmatrix} \right) + \dots \right. \right. \\ & \left. \left. \dots + \sum_{f_1=1}^l \dots \sum_{f_{r-1}=1}^l \text{mes } E \left(\begin{smallmatrix} 1 \dots r \\ f_1 \dots f_{r-1} \end{smallmatrix} \right) \right)\right). \end{aligned}$$

Но

$$\sum_{f_1=1}^l \text{mes } E \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ f_1 \end{smallmatrix} \right) \leq 1, \quad \sum_{f_1=1}^l \sum_{f_2=1}^l \text{mes } E \left(\begin{smallmatrix} 1 \ 2 \\ f_1 \ f_2 \end{smallmatrix} \right) \leq 1, \dots, \quad \text{mes } U_r^{(l)} = O\left(\frac{r}{l}\right) = o(1),$$

ибо $\frac{r}{l} \rightarrow 0$. Очевидно

$$\sum_{a_1=1}^l \dots \sum_{a_r=1}^l \text{mes } E \left(\begin{smallmatrix} 1 \dots r \\ a_1 \dots a_r \end{smallmatrix} \right) + \text{mes } U_r^{(l)} = 1.$$

Поэтому

$$\sum_{a_1=1}^l \dots \sum_{a_r=1}^l \text{mes } E \left(\begin{smallmatrix} 1 \dots r \\ a_1 \dots a_r \end{smallmatrix} \right) = 1 + o(1).$$

Итак, мы получаем:

$$y_r^{(l)} = 2^{2r+1} l^{2r} + o(2^{2r} l^{2r}).$$

Пусть $x_r^{(l)}$ — количество чисел в $s_r^{(l)}$. Легко видеть, что $x_r^{(l)} = r y_r^{(l)}$, откуда следует:

$$x_r^{(l)} = r 2^{2r+1} l^{2r} + o(r 2^{2r} l^{2r}).$$

Далее, пусть

$$\Delta \equiv \Delta_p^\lambda = (\alpha_1 \dots \alpha_p),$$

где $1 \leq \alpha_j \leq \lambda$, $j = 1, 2, \dots, p$ (верхнее и нижнее неравенства могут не достигаться), λ и p фиксированы.

Обозначим через $q_r^{(l)}$ число, указывающее, сколько раз Δ встречается в $s_r^{(l)}$. Комбинация Δ может входить в $s_r^{(l)}$ разделенной и не разделенной запятой. Δ может входить не разделенной в какую-либо группу $r - \rho + 1$ способами: первый знак Δ может совпадать с первым, вторым, ..., $(r - \rho + 1)$ -м знаком группы. Поэтому искомое количество равно

$$\begin{aligned} & \sum_{a_{\rho+1}=1}^l \dots \sum_{a_r=1}^l \left[2^{2r+1} l^{2r} \text{mes } E \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & \rho & \rho+1 & \dots & r \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_\rho & a_{\rho+1} & \dots & a_r \end{smallmatrix} \right) \right] + \\ & + \sum_{a_1=1}^l \sum_{a_{\rho+2}=1}^l \dots \sum_{a_r=1}^l \left[2^{2r+1} l^{2r} \text{mes } E \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & \rho+1 & \rho+2 & \dots & r \\ a_1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_\rho & a_{\rho+2} & \dots & a_r \end{smallmatrix} \right) \right] + \dots \\ & \dots + \sum_{a_1=1}^l \dots \sum_{a_{r-\rho}=1}^l \left[2^{2r+1} l^{2r} \text{mes } E \left(\begin{smallmatrix} 1 & \dots & r-\rho & r-\rho+1 & \dots & r \\ a_1 & \dots & a_{r-\rho} & \alpha_1 & \dots & \alpha_\rho \end{smallmatrix} \right) \right] = \\ & = 2^{2r+1} l^{2r} \left(\sum_{a_{\rho+1}=1}^l \dots \sum_{a_r=1}^l \text{mes } E \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & \rho & \rho+1 & \dots & r \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_\rho & a_{\rho+1} & \dots & a_r \end{smallmatrix} \right) + \dots \right. \\ & \dots + \sum_{a_1=1}^l \dots \sum_{a_{r-\rho}=1}^l \text{mes } E \left(\begin{smallmatrix} 1 & \dots & r-\rho & r-\rho+1 & \dots & r \\ a_1 & \dots & a_{r-\rho} & \alpha_1 & \dots & \alpha_\rho \end{smallmatrix} \right) \Big) + O(r l^{r-\rho}) < \\ & < 2^{2r+1} l^{2r} \left(\sum_{a_{\rho+1}=1}^\infty \dots \sum_{a_r=1}^\infty \text{mes } E \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & \rho & \rho+1 & \dots & r \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_\rho & a_{\rho+1} & \dots & a_r \end{smallmatrix} \right) + \dots \right. \\ & \dots + \sum_{a_1=1}^\infty \dots \sum_{a_{r-\rho}=1}^\infty \text{mes } E \left(\begin{smallmatrix} 1 & \dots & r-\rho & r-\rho+1 & \dots & r \\ a_1 & \dots & a_{r-\rho} & \alpha_1 & \dots & \alpha_\rho \end{smallmatrix} \right) \Big) + O(r l^{r-\rho}) = \\ & = 2^{2r+1} l^{2r} \left(\text{mes } E \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & \rho \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_\rho \end{smallmatrix} \right) + \text{mes } E \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 & \dots & \rho+1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_\rho \end{smallmatrix} \right) + \dots \right. \\ & \dots + \text{mes } E \left(\begin{smallmatrix} r-\rho+1 & \dots & r \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_\rho \end{smallmatrix} \right) \Big) + O(r l^{r-\rho}) \leq \\ & \leq C 2^{2r+1} l^{2r} \left({}^\mu E \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & \rho \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_\rho \end{smallmatrix} \right) + \dots + {}^\mu E \left(\begin{smallmatrix} r-\rho+1 & \dots & r \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_\rho \end{smallmatrix} \right) \right) + O(r l^{r-\rho}). \end{aligned}$$

Поскольку

$$E \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & \rho \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_\rho \end{smallmatrix} \right)$$

есть полный прообраз при преобразовании T множества

$$E \left(\begin{smallmatrix} 2 & \dots & \rho+1 \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_\rho \end{smallmatrix} \right),$$

которое, в свою очередь, есть полный прообраз при преобразовании T множества

$$E \left(\begin{smallmatrix} 3 & \dots & \rho+2 \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_\rho \end{smallmatrix} \right),$$

то

$$\mu E \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \rho \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_\rho \end{pmatrix} = \mu E \begin{pmatrix} 2 & \dots & \rho + 1 \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_\rho \end{pmatrix} = \dots = \mu E \begin{pmatrix} r - \rho + 1 & \dots & r \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_\rho \end{pmatrix}.$$

Поэтому искомое количество будет

$$\begin{aligned} &\leq Cr 2^{2r+1} l^{2r} \mu E \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \rho \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_\rho \end{pmatrix} + O(r l^{r-\rho}) \leq \\ &\leq C' r 2^{2r+1} l^{2r} \text{mes } E \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \rho \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_\rho \end{pmatrix} + O(r l^{r-\rho}) \leq \\ &\leq C'' x_r^{(l)} \text{mes } E \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \rho \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_\rho \end{pmatrix} + o(x_r^{(l)}). \end{aligned}$$

Подсчитаем, сколько раз Δ может входить разделенной в $s_r^{(l)}$. В $s_r^{(l)}$ имеется $y_r^{(l)} = \frac{x_r^{(l)}}{r}$ запятых. Данная запятая не может делить более ρ различных групп. Поэтому мы имеем самое большее

$$\frac{x_r^{(l)}}{r} \rho = o(x_r^{(l)})$$

возможностей.

Итак,

$$g_r^{(l)} \leq C x_r^{(l)} \text{mes } E \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \rho \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_\rho \end{pmatrix} + o(x_r^{(l)}).$$

Пусть $l = 1, 2, \dots$. Положим $r = [\ln l] + 1$. Очевидно, $\frac{r}{l} \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$. Обозначим $s_r^{(l)}$ просто через $s^{(l)}$ и рассмотрим символически записанную цепную дробь:

$$\alpha = s^{(1)} s^{(2)} s^{(3)} \dots$$

Докажем, что это нормальная дробь.

Введем обозначения:

 $x^{(l)}$ — количество знаков в $s^{(l)}$. $g^{(l)}$ — количество появлений $\Delta \equiv \Delta_\rho^\lambda$ в $s^{(l)}$. $S^{(l)}$ — строчка $s^{(1)} s^{(2)} \dots s^{(l)}$. $X^{(l)}$ — количество знаков в $S^{(l)}$. Очевидно $X^{(l)} = x^{(1)} + x^{(2)} + \dots + x^{(l)}$. $G^{(l)}$ — количество появлений Δ в $S^{(l)}$:

$$G^{(l)} = \sum_{k=1}^l g^{(k)} + O(l).$$

Поскольку

$$g^{(l)} \leq Cx^{(l)} \operatorname{mes} E \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \rho \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_\rho \end{pmatrix} + o(x^{(r)}),$$

получаем:

$$G^{(l)} \leq CX^{(l)} \operatorname{mes} E \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \rho \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_\rho \end{pmatrix} + o(X^{(l)}),$$

т. е.

$$N_{X^{(l)}}(\Delta) \leq CX^{(l)} \operatorname{mes} E \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \rho \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_\rho \end{pmatrix} + o(X^{(l)}).$$

Пусть $X^{(l)} \leq P < X^{(l+1)}$. Имеем:

$$\frac{N_P(\Delta)}{P} \leq \frac{N_{X^{(l+1)}}(\Delta)}{X^{(l)}} \leq \frac{CX^{(l+1)} \operatorname{mes} E \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \rho \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_\rho \end{pmatrix} + o(X^{(l+1)})}{X^{(l)}}.$$

Так как

$$\frac{X^{(l+1)}}{X^{(l)}} = \frac{X^{(l)} + x^{(l+1)} + o(x^{(l+1)})}{X^{(l)}} \leq 1 + \frac{x^{(l+1)}}{x^{(l)}} + o\left(\frac{x^{(l+1)}}{x^{(l)}}\right)$$

и так как

$$\frac{x^{(l+1)}}{x^{(l)}} = O\left(\frac{\ln(l+1)}{\ln l} \frac{2^{2 \ln(l+1)}}{2^{2 \ln l}} \frac{e^{2 \ln^2(l+1)}}{e^{2 \ln^2 l}}\right) = O(1),$$

то

$$\frac{X^{(l+1)}}{X^{(l)}} \leq C.$$

Таким образом,

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \frac{N_P(\alpha, \Delta)}{P} \leq C \operatorname{mes} E \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \rho \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_\rho \end{pmatrix}.$$

Критерий проверен и тем самым нормальность дроби α установлена.

Поступило
17. XI. 1956

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Постников А. Г. и Пятецкий И. И., Нормальные по Бернулли последовательности знаков, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 21 (1957), 501—504.
- ² Champagnone D., On the decimal normal in the scale of ten, J. London Math. Soc. 8 (1933), 254—260.
- ³ Ryll-Nardzowski C., On the ergodic theorems. II, Studia Mathematica, XII, Fasc. 1 (1951), 74—79.
- ⁴ Хинчин А. Я., Цепные дроби, Москва, 1935.
-

И. И. ВОРОВИЧ

О НЕКОТОРЫХ ПРЯМЫХ МЕТОДАХ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

(Представлено академиком С. Л. Соболевым)

В работе рассматривается одно общее операторное нелинейное уравнение, описывающее процесс движения некоторых механических систем. В качестве приложений рассмотрены две задачи из нелинейной теории пологих оболочек.

§ 1

1. Основные функциональные пространства

В конечной k -мерной области Ω с достаточно гладкой границей Γ задана l -мерная вектор-функция $\bar{\omega}(P)$, $P \in \Omega$. Будем считать, что $\bar{\omega}(P)$ имеет в Ω суммируемые с квадратом составляющие u, v, w, \dots, θ . На множестве таких вектор-функций введем скалярное произведение

$$(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2)_{H_{1\Omega}} = \int_{\Omega} (u_1 \cdot u_2 + v_1 \cdot v_2 + \dots + \theta_1 \cdot \theta_2) d\Omega \quad (1.1)$$

и полученное при этом гильбертово пространство обозначим через $H_{1\Omega}$.

Через $C_{\bar{\Omega}}$ обозначим множество вектор-функций $\bar{\omega}$, имеющих в $\bar{\Omega}$ непрерывные составляющие u, v, \dots, θ .

Пусть $A_1 \bar{\omega}$ — линейный, в общем случае неограниченный оператор, заданный на некотором множестве $E_1 \in C_{\bar{\Omega}}$, всюду плотном в $H_{1\Omega}$, и удовлетворяющий следующим условиям:

1) $A_1 \bar{\omega}$ — симметричный положительно-определенный оператор.

2) Если $\bar{\omega} \in E_1$, то $A_1 \bar{\omega} \in C_{\bar{\Omega}}$.

Введем на E_1 скалярное произведение

$$(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2)_{H_{2\Omega}} = (A_1 \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2)_{H_{1\Omega}}. \quad (1.2)$$

Замыкание E_1 в норме (1.2) обозначим через $H_{2\Omega}$.

3) $A_1 \bar{\omega}$ обладает собственными векторами $\bar{\psi}_n$, образующими полную систему в $H_{2\Omega}$.

Под собственным вектором $\bar{\psi}_n$ [см. (1)] и собственным числом λ_n^2 в данном случае понимаются вектор-функция $\bar{\psi}_n \in H_{2\Omega}$ и число λ_n^2 , удовлетворяющие соотношениям:

$$(\bar{\psi}_n, \bar{\omega})_{H_{2\Omega}} = \lambda_n^2 (\bar{\psi}_n, \bar{\omega})_{H_{1\Omega}}, \quad \|\bar{\psi}_n\|_{H_{1\Omega}}^2 = 1$$

для любого вектора $\bar{\omega} \in H_{2\Omega}$.

Рассмотрим множество E_2 элементов $\bar{\omega}(P, t)$, зависящих от некоторого параметра t так, что выполнено следующее условие: при любом $0 \leq t \leq T$ $\bar{\omega} \in E_1$, $\bar{\omega}_t \in C_{\bar{\Omega}}$; $\bar{\omega}$ как элемент $H_{2\Omega}$ и $\bar{\omega}_t$ как элемент $H_{1\Omega}$ являются непрерывными функциями параметра t на $[0, T]$.

Введем на E_2 скалярное произведение

$$(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2)_{H_{3Q}} = \int_0^T [(\bar{\omega}_{1t}, \bar{\omega}_{2t})_{H_{1\Omega}} + (\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2)_{H_{2\Omega}}] dt. \quad (1.3)$$

Через H_{3Q} обозначим замыкание E_2 в норме (1.3). Очевидно, основные свойства пространства H_{3Q} , в частности характер вложения H_{3Q} в $H_{1\Omega}$, определяются оператором $A_1 \bar{\omega}$.

Мы предположим, что вложение пространства H_{3Q} в $H_{1\Omega}$ обладает следующим свойством:

4) если $\bar{\omega}_n \xrightarrow{cl} \bar{\omega}_0$ в H_{3Q} , то $\bar{\omega}_n \Rightarrow \bar{\omega}_0$ в $H_{1\Omega}$ равномерно относительно $0 \leq t \leq T$.

Из (1.3) видно, что если $\bar{\omega} \in H_{3Q}$, то почти при всех t $\bar{\omega} \in H_{2\Omega}$ и соответственно $H_{1\Omega}$.

В дальнейшем будет использован класс функций D^0 [см. (1)], являющийся замыканием в H_{3Q} множества D вектор-функций $\bar{\omega} \in E_2$ таких, что $\bar{\omega} \equiv 0$, если $T - \delta \leq t \leq T$, где δ — некоторое определенное для каждой функции число.

ЛЕММА 1.1. *Пространство H_{3Q} сепарабельно.*

Поскольку E_2 всюду плотно в H_{3Q} , то достаточно доказать существование счетного множества, принадлежащего H_{3Q} и плотного в E_2 .

Пусть $\bar{\omega} \in E_2$. В этом случае имеют место два разложения:

$$\bar{\omega} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \bar{\psi}_n, \quad c_n = c_n(t), \quad (1.4)$$

$$\bar{\omega}_t = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \bar{\psi}_n, \quad d_n = d_n(t), \quad (1.5)$$

причем ряд (1.4) сходится в $H_{2\Omega}$ и $H_{1\Omega}$, ряд (1.5) сходится в $H_{1\Omega}$, c_n и d_n непрерывны на $[0, T]$.

Легко видеть, что поскольку $\bar{\omega} \in E_2$, то ряды (1.4), (1.5) сходятся в соответствующих пространствах равномерно относительно $0 \leq t \leq T$. В самом деле, из (1.4), (1.5) имеем:

$$\|\bar{\omega}\|_{H_{2\Omega}}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2(t) \cdot \lambda_n^2,$$

$$\|\bar{\omega}\|_{H_{1\Omega}}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2(t).$$

При этом $c_n(t)$, $d_n(t)$, $\|\bar{\omega}_t\|_{H_{2\Omega}}^2$, $\|\bar{\omega}_t\|_{H_{1\Omega}}^2$ непрерывны на $[0, T]$, откуда и следует, что ряды (1.4) и (1.5) сходятся в соответствующих пространствах

равномерно относительно $0 \leq t \leq T$. Кроме того,

$$d_n = \frac{dc_n}{dt}. \quad (1.6)$$

Следовательно, при достаточно большом p имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} \left\| \bar{\omega} - \sum_{n=1}^p c_n \bar{\psi}_n \right\|_{H_2\Omega} &\leq \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}T}, \\ \left\| \bar{\omega}_t - \sum_{n=1}^p d_n \bar{\psi}_n \right\|_{H_1\Omega} &\leq \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}T}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

для любого $\varepsilon > 0$, $0 \leq t \leq T$.

Далее, на $[0, T]$ для каждого c_n возможно построить полином $P_n(t)$ с рациональными коэффициентами такой, что

$$|c_n - P_n| \leq \varepsilon_n, \quad \left| \frac{dc_n}{dt} - \frac{dP_n}{dt} \right| \leq \varepsilon_n, \quad 0 \leq t \leq T,$$

где ε_n подобраны так, чтобы выполнялись неравенства:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^p (c_n - P_n) \bar{\psi}_n \right\|_{H_2\Omega} &\leq \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}T}, \\ \left\| \sum_{n=1}^p \left(\frac{dc_n}{dt} - \frac{dP_n}{dt} \right) \bar{\psi}_n \right\|_{H_1\Omega} &\leq \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}T}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Из (1.7) и (1.8) следует, что

$$\begin{aligned} \left\| \bar{\omega} - \sum_{n=1}^p P_n \bar{\psi}_n \right\|_{H_2\Omega} &\leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}T}, \\ \left\| \frac{d\bar{\omega}}{dt} - \sum_{n=1}^p P_n \bar{\psi}_n \right\|_{H_1\Omega} &\leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}T}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Из (1.9) получаем:

$$\left\| \bar{\omega} - \sum_{n=1}^p P_n \bar{\psi}_n \right\|_{H_{3Q}} \leq \varepsilon.$$

Таким образом, счетная совокупность

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m P_k(t) \bar{\psi}_l,$$

где $P_k(t)$ — полиномы с рациональными коэффициентами, образует в E_2 плотное множество, что и исчерпывает доказательство леммы.

II. Основное уравнение. Введение обобщенного решения

Рассмотрим уравнение следующего вида:

$$\bar{\omega}_{tt} = -A_1 \bar{\omega} - A_2 \bar{\omega} - K \bar{\omega}_t + \bar{F}(P, t) \quad (1.10)$$

при начальных данных:

$$\bar{\omega}|_{t=0} = \bar{g}(P), \quad \bar{\omega}_t|_{t=0} = \bar{h}(P), \quad P \in \bar{\Omega}. \quad (1.11)$$

Уравнения более общего вида, но линейные рассмотрены в работах ⁽²⁾, ⁽³⁾. В уравнении (1.10) $A_2 \bar{\omega}$ есть некоторый нелинейный оператор, действующий из E_1 в $C_{\bar{\Omega}}$, K — линейный ограниченный оператор, действующий в $H_{1\Omega}$, $\bar{F}(P, t)$ — заданная вектор-функция.

Будем предполагать, что на E_1 имеет место соотношение:

$$A_1 \bar{\omega} + A_2 \bar{\omega} = \text{grad}_{H_{1\Omega}} \Phi, \quad (1.12)$$

где Φ — функционал, заданный в $H_{2\Omega}$.

Уравнение (1.10) можно рассматривать как уравнения Ньютона, описывающие движения некоторой механической системы. При этом $A_1 \bar{\omega}$ соответствует линейной части упругих сил, действующих на систему, $A_2 \bar{\omega}$ — нелинейной части упругих сил, $K \bar{\omega}_1$ — силам трения, $\bar{F}(P, t)$ — внешним силам.

Заметим, что движение механической системы может быть определено не уравнениями Ньютона, а посредством интегральных принципов механики, например, посредством принципа Остроградского — Гамильтона. Этот принцип при соответствующем его обобщении вполне заменяет уравнения Ньютона, однако дает возможность отнести уравнению (1.10) в качестве решения некоторую вектор-функцию $\bar{\omega}$ в гораздо более широком классе случаев, когда уравнение (1.10) может не иметь классического решения. Поэтому для введения обобщенного решения целесообразно использовать принцип Остроградского — Гамильтона. Определение обобщенного решения с помощью принципа Остроградского — Гамильтона для линейных гиперболических уравнений систематически использовалось в работе ⁽¹⁾.

Допустим, что для любых $\bar{\omega}_0, \bar{\omega}_1 \in H_{2\Omega}$ имеет место соотношение

$$\Phi(\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_1) - \Phi(\bar{\omega}_0) = \int_{\Omega} (A_3 \bar{\omega}_0 \cdot A_4 \bar{\omega}_1) d\Omega + \alpha(\bar{\omega}_0, \bar{\omega}_1), \quad (1.13)$$

причем

$$\lim_{\|\bar{\omega}_1\|_{H_{2\Omega}} \rightarrow 0} \frac{|\alpha|}{\|\bar{\omega}_1\|_{H_{2\Omega}}} = 0, \text{ если } \|\bar{\omega}_1\|_{H_{2\Omega}} \rightarrow 0. \quad (1.14)$$

В формуле (1.13) $A_3 \bar{\omega}_0$ есть некоторый нелинейный оператор, ставящий в соответствие каждой вектор-функции $\bar{\omega}_0 \in H_{2\Omega}$ ρ -мерную вектор-функцию с составляющими, суммируемыми с квадратом в Ω ; $A_4 \bar{\omega}_1$ есть ограниченный линейный оператор, ставящий в соответствие каждой функции $\bar{\omega}_1 \in H_{2\Omega}$ ρ -мерную вектор-функцию с составляющими, суммируемыми с квадратом в Ω ; $(A_3 \bar{\omega}_0 \cdot A_4 \bar{\omega}_1)$ обозначает скалярное произведение двух ρ -мерных векторов.

Определение. Обобщенным решением уравнения (1.10) при начальных условиях (1.11) будем называть вектор-функцию $\bar{\omega}_0 \in H_{3Q}$, удовлетворяющую интегральному соотношению

$$\begin{aligned} \int_0^T \left[-(\bar{\omega}_0, \bar{\omega}_1)_{H_{1\Omega}} + \int_{\Omega} (A_3 \bar{\omega}_0 \cdot A_4 \bar{\omega}_1) d\Omega + (K \bar{\omega}_0 - \bar{F}, \bar{\omega}_1)_{H_{1\Omega}} \right] dt - \\ - \int_{\Omega} \bar{\omega}_1(P, t) \bar{h}(P) dP \Big|_{t=0} = 0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

для любой вектор-функции $\bar{\omega}_1 \in D^0$ и первому из начальных условий (1.11) в следующем смысле:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|\bar{\omega}_0 - \bar{g}\|_{H_{1\Omega}} = 0. \quad (1.16)$$

При определенном выборе операторов A_3, A_4 обобщенное решение $\bar{\omega}_0$ можно трактовать как вектор-функцию, удовлетворяющую принципу Остроградского — Гамильтона, чем и определяется механическое значение этого решения.

Заметим, что введенное таким образом обобщенное решение, конечно, далеко не всегда будет иметь вторые производные по времени и не всегда будет принадлежать E_2 . Но необходимость существования старших производных у функций, дающих решение какой-либо механической задаче, не всегда определяется сущностью задачи.

В самом деле, если проанализировать вывод уравнения равновесия или движения в наиболее распространенных задачах сплошной среды, то оказывается, что старшие производные появляются обычно тогда, когда формулируются условия равновесия элемента среды с применением уравнений геометрической статики или же записываются уравнения движения элемента среды с применением уравнений Ньютона.

Если же условия равновесия среды записывать с помощью принципа возможных перемещений, а уравнения движения — с помощью принципа Остроградского — Гамильтона, то необходимость в существовании старших производных (по крайней мере, к моменту вывода) у соответствующих функций отпадает, хотя при этом несколько не теряется их механический смысл.

Заметим, что для частного случая колебаний струны механическое значение обобщенного решения выясняется в работе (4).

Однако, на наш взгляд, толкование обобщенных решений как вектор-функций, удовлетворяющих принципу Остроградского — Гамильтона, наиболее полно соответствует их механическому существу.

III. Построение обобщенного решения

Для нахождения обобщенного решения применим метод Бубнова — Галеркина, отыскивая приближенное решение в виде:

$$\bar{\omega}_m = \sum_{l=1}^m q_{ml} \bar{\chi}_l, \quad (1.17)$$

где $\bar{\chi}_l$ — некоторая полная система в $H_{2\Omega}$, которую, для удобства, будем считать ортонормированной в $H_{1\Omega}$; q_{ml} — функции времени, определяемые из системы дифференциальных уравнений

$$(\bar{\omega}_{mll} + A_1 \bar{\omega}_m + A_2 \bar{\omega}_m + K \bar{\omega}_m - \bar{F}, \bar{\chi}_l)_{H_{1\Omega}} = 0, \quad l = 1, \dots, m. \quad (1.18)$$

Начальные данные для системы (1.18) берутся обычно в следующем виде:

$$q_{ml}(0) = (\bar{g}, \bar{\chi}_l)_{H_{1\Omega}}, \quad (1.19)$$

$$\dot{q}_{ml}(0) = (\bar{h}, \bar{\chi}_l)_{H_{1\Omega}}. \quad (1.20)$$

ТЕОРЕМА I. Пусть $A_1 \bar{\omega}$ удовлетворяет условиям 1) — 4) п. I и пусть, кроме того, выполнены условия:

$$5) \text{ Если } \bar{\omega} \in H_{3Q}, \text{ то } 0 \leq \int_0^T (K \bar{\omega}_t \cdot \bar{\omega}_t)_{H_{1\Omega}} dt.$$

6) Φ — неотрицательный функционал в $H_{2\Omega}$ такой, что из $\Phi(\bar{\omega}) \leq r$ следует

$$\|\bar{\omega}\|_{H_{2\Omega}} \leq \varphi(r), \quad (1.21)$$

где $\varphi(r)$ — функция, ограниченная на каждом конечном отрезке изменения r .

7) Если $\bar{\omega}_0, \bar{\omega}_1 \in H_{3Q}$, то $\int_{\Omega} (A_3 \bar{\omega}_0 \cdot A_4 \bar{\omega}_1) d\Omega$ есть суммируемая функция на $(0, T)$, причем имеют место соотношения [см. (1.13)]:

$$\lim_{\|\bar{\omega}_1\|_{H_{3Q}} \rightarrow 0} \frac{\int_0^T |\alpha| dt}{\|\bar{\omega}_1\|_{H_{3Q}}} = 0, \quad (1.22)$$

если $\|\bar{\omega}_1\|_{H_{3Q}} \rightarrow 0$,

$$\lim_{\|\bar{\omega}_1\|_{H_{3Q}} \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\Omega} (A_3 \bar{\omega}_n \cdot A_4 \bar{\omega}_1) d\Omega dt = \int_0^T \int_{\Omega} (A_3 \bar{\omega}_0 \cdot A_4 \bar{\omega}_1) d\Omega dt, \quad (1.23)$$

если $\bar{\omega}_n \xrightarrow{\text{ср}} \bar{\omega}_0$ и $\bar{\omega}_1 \in H_{3Q}$.

В этом случае уравнение (1.10) имеет по меньшей мере одно обобщенное решение в смысле (1.15), (1.16) на отрезке $[0, T]$, каково бы ни было T , если только $\bar{g} \in H_{2\Omega}$, $\bar{h} \in H_{1\Omega}$ и $\int_0^T \|\bar{F}\|_{H_{1\Omega}}^2 dt < \infty$.

ТЕОРЕМА II. Пусть выполнены условия теоремы I и пусть $\bar{\chi}_1$ — некоторая полная в $H_{2\Omega}$ и ортонормированная в $H_{1\Omega}$ система. В этом случае система дифференциальных уравнений (1.18) при начальных данных (1.19), (1.20) имеет для каждого t по меньшей мере одно решение на всем отрезке $[0, T]$.

Множество приближенных решений $\bar{\omega}_n$ слабо компактно в H_{3Q} и содержит бесконечное подмножество $\bar{\omega}_m$, каждая предельная точка которого есть обобщенное решение уравнения (1.10) в смысле (1.15), (1.16).

ЛЕММА 2.1. Функционал $\Phi(\bar{\omega})$ сильно непрерывен в $H_{2\Omega}$.

Пусть $\bar{\omega}_0, \bar{\omega}_n \in H_{2\Omega}$ и $\bar{\omega}_n \rightarrow \bar{\omega}_0$ в $H_{2\Omega}$. Из (1.13) имеем:

$$\Phi(\bar{\omega}_n) - \Phi(\bar{\omega}_0) = \int_{\Omega} [A_3 \bar{\omega}_0 \cdot A_1 (\bar{\omega}_n - \bar{\omega}_0)] d\Omega + \alpha (\bar{\omega}_0, \bar{\omega}_n - \bar{\omega}_0), \quad (1.24)$$

причем в силу того, что $\bar{\omega}_n \rightarrow \bar{\omega}_0$ в $H_{2\Omega}$, $\alpha \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Рассмотрим

$$I = \int_{\Omega} [A_3 \bar{\omega}_0 \cdot A_4 (\bar{\omega}_n - \bar{\omega}_0)] d\Omega.$$

В силу ограниченности оператора A_4 , имеем:

$$\begin{aligned} |I| &\leq \int_{\Omega} |A_3 \bar{\omega}_0 \cdot A_4 (\bar{\omega}_n - \bar{\omega}_0)| d\Omega \leq \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |A_3 \bar{\omega}_0|^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{\Omega} |A_4 (\bar{\omega}_n - \bar{\omega}_0)|^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|A_3 \bar{\omega}_0\|_{H_{1\Omega}} \cdot \|A_4\| \cdot \|\bar{\omega}_n - \bar{\omega}_0\|_{H_{2\Omega}}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Из (1.25) следует, что в наших условиях $I \rightarrow 0$, если $n \rightarrow \infty$. Этим лемма 2.1 доказана.

ЛЕММА 3.1. Пусть выполнены все условия теоремы II. Если при этом система (1.18) при начальных данных (1.19), (1.20) имеет решение для каждого t , то справедливы неравенства:

$$\|\bar{\omega}_m\|_{H_{2\Omega}} \leq \rho_1, \quad \|\bar{\omega}_{mt}\|_{H_{1\Omega}} \leq \rho_2, \quad \|\bar{\omega}_n\|_{H_{3Q}} \leq \rho_3, \quad (1.26)$$

причем ρ_1, ρ_2, ρ_3 не зависят от $t = 1, 2, \dots, \infty$, $0 \leq t \leq T$.

Неравенства (1.26) имеют характер закона сохранения и доказываются, как все аналогичные предложения.

Легко видеть, что систему (1.18) можно записать следующим образом:

$$\ddot{q}_{mt} = - \frac{\partial \Phi}{\partial q_{mt}} - (K \bar{\omega}_{mt} \cdot \bar{\chi}_l)_{H_{1\Omega}} + (\bar{F} \cdot \bar{\chi}_l)_{H_{1\Omega}}. \quad (1.27)$$

Умножив каждое из уравнений (1.27) на \dot{q}_{mt} и сложив все уравнения, получим:

$$\frac{d}{dt} \sum_{l=1}^m \frac{\dot{q}_{ml}^2}{2} = - \sum_{l=1}^m \frac{\partial \Phi}{\partial q_{ml}} \cdot \dot{q}_{ml} - (K \bar{\omega}_{mt} \cdot \bar{\omega}_{mt})_{H_{1\Omega}} + (\bar{F} \cdot \bar{\omega}_{mt})_{H_{1\Omega}}. \quad (1.28)$$

Из (1.28), в силу условия 5), получаем:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \|\bar{\omega}_{mt}\|_{H_{1\Omega}}^2 + \Phi \right\} \leq (\bar{F} \cdot \bar{\omega}_m)_{H_{1\Omega}}, \quad (1.29)$$

откуда

$$\|\bar{\omega}_{mt}\|_{H_{1\Omega}}^2 + 2\Phi \leq \|\bar{\omega}_{mt}\|_{H_{1\Omega}}^2|_{t=0} + 2\Phi \left(\sum_{l=1}^m q_l \cdot \bar{\chi}_l \right) + 2 \int_0^t (\bar{F} \cdot \bar{\omega}_{mt})_{H_{1\Omega}} dt. \quad (1.30)$$

В силу условия 6) и сильной непрерывности Φ в $H_{2\Omega}$ (лемма 2.1), из (1.30) следует:

$$\|\bar{\omega}_{mt}\|_{H_{1\Omega}}^2 \leq \|\bar{h}\|_{H_{1\Omega}}^2 + 2M + \int_0^t \|\bar{F}\|_{H_{1\Omega}}^2 dt + \int_0^t \|\bar{\omega}_{mt}\|_{H_{1\Omega}}^2 dt. \quad (1.31)$$

Здесь через M обозначен максимум $\Phi \left(\sum_{l=1}^m q_l \bar{\chi}_l \right)$, если $t = 1, \dots, \infty$.

Из (1.31) получаем:

$$\|\bar{\omega}_{mt}\|_{H_{1\Omega}}^2 \leq L + \int_0^t \|\bar{\omega}_{mt}\|_{H_{1\Omega}}^2 dt, \quad (1.32)$$

где

$$L = \|h\|_{H_{1\Omega}}^2 + 2M + \int_0^T \|F\|_{H_{1\Omega}}^2 dt.$$

Из (1.32) следует:

$$\int_0^t \|\bar{\omega}_{mt}\|_{H_{1\Omega}}^2 dt \leq L(e^T - 1) = L_1 \quad (1.33)$$

и

$$\|\bar{\omega}_{mt}\|_{H_{1\Omega}}^2 \leq L + L_1 = \rho_2. \quad (1.34)$$

Таким образом, второе из неравенств (1.26) доказано.

Неравенство (1.30) дает:

$$\Phi \leq \frac{1}{2} \|\bar{h}\|_{H_{1\Omega}}^2 + M + \frac{1}{2} \int_0^t \|\bar{F}\|_{H_1}^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^t \|\bar{\omega}_{mt}\|_{H_{1\Omega}}^2 dt, \quad (1.35)$$

или

$$\Phi \leq \frac{L}{2} + \frac{L_1}{2}. \quad (1.36)$$

В силу условия 6) из соотношения (1.21) получаем:

$$\bar{\omega}_m \|_{H_{2\Omega}} \leq \rho_2, \quad (1.37)$$

что и доказывает первое из неравенств (1.26).

Третье неравенство (1.26) есть следствие первых двух.

ЛЕММА 4.1. При выполнении условий теоремы I правая часть системы (1.27) непрерывна по q_{ml} , q_{ml} для всех $-\infty < q_{ml} < +\infty$, $-\infty < \dot{q}_{ml} < +\infty$ и почти при всех $0 \leq t \leq T$.

В силу линейности $K\bar{\omega}_l$ достаточно, очевидно, рассмотреть только $\frac{\partial \Phi}{\partial q_{ml}}$.

Из (1.13) имеем:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q_{ml}} = \int_{\Omega} (A_3 \bar{\omega}_m \cdot A_4 \bar{\chi}_l) d\Omega, \quad (1.38)$$

и, следовательно, необходимо доказать непрерывность правой части (1.38).

Пусть имеется числовая последовательность $q_{ml}^{(\sigma)}$ такая, что

$$\lim q_{ml}^{(\sigma)}|_{\sigma \rightarrow \infty} = q_{ml}^{(0)}.$$

В этом случае, очевидно, $\bar{\omega}_m^{(\sigma)} \Rightarrow \bar{\omega}_m^{(0)}$ в $H_{2\Omega}$ и, поскольку $\bar{\omega}_m^{(8)}$ от времени не зависит, то и в $H_{3\Omega}$.

В силу (1.23),

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} (A_3 \bar{\omega}_m^{(\sigma)} \cdot A_4 \bar{\chi}_l) d\Omega dt = \int_0^T \int_{\Omega} (A_3 \bar{\omega}_m^{(0)} \cdot A_4 \bar{\chi}_l) d\Omega dt. \quad (1.39)$$

Из (1.39) вытекает:

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (A_3 \bar{\omega}_m^{(\sigma)} \cdot A_4 \bar{\chi}_l) d\Omega = \int_{\Omega} (A_3 \bar{\omega}_m^{(0)} \cdot A_4 \bar{\chi}_l) d\Omega, \quad (1.40)$$

что и доказывает лемму 4.1.

ЛЕММА 5.1. В условиях теоремы I решение системы (1.18) существует на $[0, T_1]$, где T_1 определяется соотношением

$$T_1 = \frac{a}{M[a, q_{ml}(0), \dot{q}_{ml}(0)] + \int_0^T \|\bar{F}\|_{H_{1\Omega}}^2 dt}. \quad (1.41)$$

В формуле (1.41) $M[a, q_{ml}(0), \dot{q}_{ml}(0)]$ определяется следующим образом: в пространстве q_{ml} , \dot{q}_{ml} рассматривается куб D_0 :

$$|q_{ml} - q_{ml}^{(0)}| \leq a, \quad |\dot{q}_{ml} - \dot{q}_{ml}(0)| \leq a;$$

$$M[a, q_{ml}(0), \dot{q}_{ml}(0)] = \max \left\{ a, \left| \frac{\partial \Phi}{\partial q_{ml}} + (K \bar{\omega}_{ml} \cdot \bar{\chi}_l)_{H_{1\Omega}} \right| \right\},$$

если $q_{ml}, \dot{q}_{ml} \in D_0$.

Лемма 5.1 может быть доказана непосредственным применением теоремы Шаудера. В самом деле, перейдем от системы (1.27) к эквивалентной системе интегральных уравнений:

$$q_{ml} = q_{ml}^{(0)} - \int_0^t \left[\frac{\partial \Phi}{\partial q_{ml}} + (K \bar{\omega}_{ml} \cdot \bar{\chi}_l)_{H_{1\Omega}} \right] dt + \int_0^t (\bar{F} \cdot \bar{\chi}_l) dt, \quad (1.42)$$

$$\dot{q}_{ml} = \dot{q}_{ml}(0) + \int_0^t \dot{q}_{ml} dt. \quad (1.43)$$

Рассмотрим пространство C систем непрерывных на $[0, T]$ функций $q_{ml}(t)$, $\dot{q}_{ml}(t)$ с нормой

$$\|q_{ml}, \dot{q}_{ml}\|_C = \max \{ |q_{ml}|, |\dot{q}_{ml}| \}, \quad l = 1, \dots, m, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1.44)$$

Легко видеть, что оператор правой части системы (1.42)—(1.43) действует из C в C и, в силу (1.41), преобразует куб D_0 в свою внутреннюю часть, будучи при этом вполне непрерывным. В силу теоремы Шаудера, система (1.42)—(1.43) будет иметь по меньшей мере одно решение, удовлетворяющее системе (1.27) почти всюду. Таким образом, лемма 5.1 доказана.

Покажем, что построенное решение может быть продолжено на весь отрезок $[0, T]$, чем и будет доказано одно из утверждений теоремы II. Это продолжение может быть сделано с помощью априорных оценок (1.26). В самом деле, в силу (1.26), решение системы (1.27), в случае

его существования, не может выйти из некоторого куба D с центром в начале координат и стороной $2b$, где b — некоторое число.

Положим

$$N(a) = \max M[a, q_{ml}(0), \dot{q}_{ml}(0)],$$

или $q_{ml}(0), \dot{q}_{ml}(0)$ пробегают куб D .

В силу леммы 5.1, решение может быть безусловно построено на T_1 , причем T_1 можно определить соотношением

$$T_1 = \frac{a}{N(a) + \int_0^T \|\bar{F}\|_{H_{1\Omega}}^2 dt}$$

Будем полагать, что $T_1 < T$, иначе вопрос о продолжении решений системы (1.27) на $[0, T]$ был бы решен.

Примем $q_{ml}(T_1), \dot{q}_{ml}(T_1)$ за новые начальные данные. В силу априорных оценок (1.26), $q_{ml}(T_1), \dot{q}_{ml}(T_1) \in D$. Поэтому

$$M[a, q_{ml}(T_1), \dot{q}_{ml}(T_1)] \leq N(a)$$

и решение снова может быть продолжено на отрезок

$$T_1 = \frac{a}{N(a) + \int_0^T \|\bar{F}\|_{H_{1\Omega}}^2 dt}.$$

Если $2T_1 \geq T$, то вопрос о продолжении решения системы (1.27) решен; в противном случае, повторяя снова все наши рассуждения, можно убедиться в возможности продолжения решения на $[0, 3T_1]$ и т. д. Таким образом, на каждом этапе продолжения решения оно либо оканчивается построенным на $[0, T]$, либо его возможно продолжить на конечный отрезок времени T_1 .

Очевидно, в результате конечного числа шагов решение окажется построенным на $[0, T]$.

Далее, в силу априорных оценок (1.26) и леммы 1.1, заключаем, что $\bar{\omega}_m$ слабо компактно в H_{3Q} .

Рассмотрим подмножество приближенных решений $\bar{\omega}_{m'}$, образованное следующим образом: $\bar{\omega}_{m'}$ содержит только одно из приближенных решений $\bar{\omega}_m$, получаемых на каждом этапе применения метода Бубнова — Галеркина. Очевидно, $\bar{\omega}_{m'}$ также слабо компактно в H_{3Q} .

Пусть $\bar{\omega}_0$ — слабый предел в H_{3Q} некоторой последовательности из $\bar{\omega}_{m'}$ (мы ее по-прежнему будем обозначать через $\bar{\omega}_{m'}$). Докажем, что $\bar{\omega}_0$ есть обобщенное решение нашей задачи.

ЛЕММА 6.1. Множество $\bar{\omega}_1^* = \sum_{j=1}^{\nu} \alpha_j(t) \bar{\chi}_j$, где $\nu = 1, \dots, \infty$, $\alpha_j = 0$, если $T - \delta_j \leq t \leq T$ и $\alpha_j, \dot{\alpha}_j$ непрерывны на $[0, T]$, всюду плотно в D^0 .

Поскольку D^0 есть замыкание D' , то, очевидно, достаточно доказать, что $\bar{\omega}_1^*$ образуют всюду плотное множество в D' . Пусть $\bar{\omega} \in D'$. В этом

случае имеют место разложения (1.4), (1.5), сходящиеся равномерно относительно $0 \leq t \leq T$ в соответствующих пространствах. Поэтому для любого наперед заданного ε возможно найти такое p , что будут иметь место соотношения:

$$\begin{aligned} \left\| \bar{\omega} - \sum_{n=1}^p c_n \bar{\psi}_n \right\|_{H_{2\Omega}}^2 &\leq \frac{\varepsilon}{8T}, \\ \left\| \bar{\omega}_t - \sum_{n=1}^p \dot{c}_n \bar{\psi}_n \right\|_{H_{1\Omega}} &\leq \frac{\varepsilon}{8T}, \end{aligned} \quad (1.45)$$

где $c_n \equiv 0$, если $T - \delta \leq t \leq T$.

Далее, поскольку $\bar{\chi}$ образуют в $H_{2\Omega}$ базис, имеют место следующие разложения в $H_{2\Omega}$:

$$\bar{\psi}_n = \sum_{l=1}^{\infty} k_{nl} \bar{\chi}_l,$$

причем возможно найти такое N , что одновременно будут иметь место неравенства:

$$\left\| \bar{\psi}_n - \sum_{l=1}^N k_{nl} \bar{\chi}_l \right\|_{H_{2\Omega}} \leq \frac{\varepsilon}{8T \cdot a}, \quad n = 1, \dots, p, \quad (1.45')$$

где $a = p^2 \left(\max \left[c_n^2, \left(\frac{dc_n}{dt} \right)^2 \right] \right)$, если $n = 1, \dots, p$, $0 \leq t \leq T$.

Из (1.45') получаем:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^p c_n \left(\bar{\psi}_n - \sum_{l=1}^N k_{nl} \bar{\chi}_l \right) \right\|_{H_{2\Omega}} &\leq \frac{\varepsilon}{8T}, \\ \left\| \sum_{n=1}^p \dot{c}_n \left(\bar{\psi}_n - \sum_{l=1}^N k_{nl} \bar{\chi}_l \right) \right\|_{H_{2\Omega}} &\leq \frac{\varepsilon}{8T} \end{aligned} \quad (1.46)$$

для $0 \leq t \leq T$.

Далее, из (1.46) вытекает:

$$\begin{aligned} \left\| \bar{\omega}_1 - \sum_{n=1}^p c_n \sum_{l=1}^N k_{nl} \bar{\chi}_l \right\|_{H_{2\Omega}}^2 &= \left\| \bar{\omega} - \sum_{n=1}^p c_n \bar{\psi}_n + \sum_{n=1}^p c_n \left(\bar{\psi}_n - \sum_{l=1}^N k_{nl} \bar{\chi}_l \right) \right\|_{H_{2\Omega}}^2 \leq \\ &\leq 2 \left\| \bar{\omega}_1 - \sum_{n=1}^p c_n \bar{\psi}_n \right\|_{H_{2\Omega}}^2 + 2 \left\| \sum_{n=1}^p c_n \left(\bar{\psi}_n - \sum_{l=1}^N k_{nl} \bar{\chi}_l \right) \right\|_{H_{2\Omega}}^2 \leq \\ &\leq 2 \frac{\varepsilon}{8T} + 2 \frac{\varepsilon}{8T} = \frac{\varepsilon}{2T}, \end{aligned} \quad (1.46')$$

$$\begin{aligned} \left\| \bar{\omega}_t - \sum_{n=1}^p \dot{c}_n \bar{\psi}_n \right\|_{H_{1\Omega}}^2 &= \left\| \bar{\omega}_t - \sum_{n=1}^p \dot{c}_n \bar{\psi}_n + \sum_{n=1}^p \dot{c}_n \left(\bar{\psi}_n - \sum_{l=1}^N k_{nl} \bar{\chi}_l \right) \right\|_{H_{1\Omega}}^2 \leq \\ &\leq 2 \left\| \bar{\omega}_t - \sum_{n=1}^p \dot{c}_n \bar{\psi}_n \right\|_{H_{1\Omega}}^2 + 2 \left\| \sum_{n=1}^p \dot{c}_n \left(\bar{\psi}_n - \sum_{l=1}^N k_{nl} \bar{\chi}_l \right) \right\|_{H_{1\Omega}}^2 \leq \\ &\leq 2 \frac{\varepsilon}{8T} + 2 \frac{\varepsilon}{8T} = \frac{\varepsilon}{2T}. \end{aligned}$$

Из соотношений (1.46') следует:

$$\left\| \bar{\omega} - \sum_{n=1}^p \sum_{l=1}^N c_n k_{nl} \bar{\chi}_l \right\|_{H_{3Q}}^2 \leq \varepsilon,$$

что и доказывает лемму 6.1.

Очевидно, для всех приближений $\bar{\omega}_{m'}$, у которых $m' \gg \nu$, имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \int_0^T \left[-(\bar{\omega}_{m't} \cdot \bar{\omega}_{1t}^*)_{H_{1\Omega}} + \int_{\Omega} (A_3 \bar{\omega}_{m'} \cdot A_4 \bar{\omega}_1^*) d\Omega + (K \bar{\omega}_{m't} - \bar{F}, \bar{\omega}_1^*)_{H_{1\Omega}} \right] dt + \\ + \int_{\Omega} \bar{\omega}_1^*(P, t) \bar{h}_m(P) d\Omega |_{t=0} = 0. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Здесь

$$\bar{h}_{m'} = \sum_{n=1}^{m'} h_n \bar{\chi}_n.$$

Пусть теперь $\bar{\omega}_{m'} \xrightarrow{\text{сл}} \bar{\omega}_0$ в H_{3Q} . В формуле (1.47) возможно перейти к пределу при $m' \rightarrow \infty$. В самом деле,

$$\int_0^T (\bar{\omega}_{m't} \cdot \bar{\omega}_{1t}^*)_{H_{1\Omega}} d\Omega$$

и

$$\int_0^T (K \bar{\omega}_{m't}, \bar{\omega}_1^*)_{H_{1\Omega}} dt$$

являются линейными функционалами в H_{3Q} . В выражении

$$\int_0^T \int_{\Omega} (A_3 \bar{\omega}_{m'} \cdot A_4 \bar{\omega}_1^*) d\Omega dt$$

возможно перейти к пределу при $m' \rightarrow \infty$ в силу условия (1.23). Очевидно, и в последнем интеграле формулы (1.47) [возможно перейти к пределу при $m' \rightarrow \infty$].

Таким образом, если $\bar{\omega}_{m'} \xrightarrow{\text{сл}} \bar{\omega}_0$ в H_{3Q} , то $\bar{\omega}_0$ удовлетворяет соотношению (1.15).

В силу леммы 6.1, (1.15) будет выполняться для любой $\bar{\omega}_1 \in D^0$. Проверим выполнение (1.16). Имеем:

$$\begin{aligned} \|\bar{\omega}_0 - \bar{g}\|_{H_{1\Omega}} &\leq \|\bar{\omega}_0 - \bar{\omega}_{m'}\|_{H_{1\Omega}} + \\ &+ \|\bar{\omega}_{m'} - \bar{g}_{m'}\|_{H_{1\Omega}} + \|\bar{g}_{m'} - \bar{g}\|_{H_{1\Omega}}. \end{aligned} \quad (1.48)$$

В силу того, что $\bar{\omega}_{m'} \xrightarrow{\text{сл}} \bar{\omega}_0$ и вследствие условия 5) теоремы 1, заклю-

чаем, что для всех достаточно больших m' и для $0 \leq t \leq T$ имеет место неравенство

$$\|\bar{\omega} - \bar{\omega}_{m'}\|_{H_{1\Omega}} \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad (1.49)$$

Далее, поскольку $\bar{g}_m \Rightarrow \bar{g}$ в $H_{1\Omega}$, при достаточно больших m' будет иметь место неравенство

$$\|\bar{g}_{m'} - \bar{g}\|_{H_{1\Omega}} \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad (1.50)$$

Кроме того, $\|\bar{\omega}_{m'} - \bar{g}_{m'}\|_{H_{1\Omega}}$ есть непрерывная вектор-функция времени, причем

$$\|\bar{\omega}_{m'}(P, 0) - \bar{g}_{m'}\|_{H_{1\Omega}} = 0,$$

и поэтому если t достаточно мало, то

$$\|\bar{\omega}_{m'}(P, t) - \bar{g}_{m'}\|_{H_{1\Omega}} \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad (1.51)$$

Из (1.48), (1.49), (1.50), (1.51) заключаем, что

$$\lim \|\bar{\omega} - \bar{g}\|_{H_{1\Omega}}|_{t \rightarrow 0} = 0. \quad (1.52)$$

Таким образом, теорема II доказана полностью, а вместе с ней и теорема I.

Отметим в заключение, что энергетические соображения в несколько другой схеме использовались в работе (5) для доказательства существования обобщенных решений в динамике вязкой жидкости.

§ 2

Рассмотрим на основе предыдущей теории задачу о нелинейных колебаниях пологой оболочки.

Предположим, что оболочка в плане занимает конечную область Ω с границей Γ класса $\Lambda_2(m, 0)^*$.

Уравнения данной задачи на основании результатов работы (5) можно взять в следующем виде:

$$\begin{aligned} \rho h w_{tt} + D \nabla^4 w = Z + \frac{\partial}{\partial x} (N_1 w_x) + \frac{\partial}{\partial y} (N_{12} w_x) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} (N_2 w_y) + \frac{\partial}{\partial x} (N_{12} w_y) - N_1 k_1 - N_2 k_2, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$N_1 = \frac{Eh}{1 - \mu^2} (\varepsilon_1 + \mu \varepsilon_2), \quad N_2 = \frac{Eh}{1 - \mu^2} (\varepsilon_2 + \mu \varepsilon_1), \quad N_{12} = \frac{Eh}{2(1 + \mu)} \varepsilon_{12}, \quad (2.2)$$

$$\varepsilon_1 = u_x + k_1 w + \frac{1}{2} w_x^2, \quad \varepsilon_2 = v_y + k_2 w + \frac{1}{2} w_y^2, \quad \varepsilon_{12} = u_y + v_x + w_x w_y, \quad (2.3)$$

* Определение классов $\Lambda_k(m, \lambda)$ см. в книге (14).

$$\begin{aligned} & \frac{2\rho(1+\mu)}{E} u_{tt} - \Delta u - \frac{1+\mu}{1-\mu} \theta_x = \\ & = \frac{2}{1-\mu} [(k_1 w)_x + w_{xx} w_x + \mu (k_1 w)_y + \mu w_x w_{xy}] + w_{xy} w_y + w_x w_{yy} + X, \quad (2.4) \\ & \frac{2\rho(1+\mu)}{E} v_{tt} - \Delta v - \frac{1+\mu}{1-\mu} \theta_y = \frac{2}{1-\mu} [(k_2 w)_y + w_y w_{yy} + \mu (k_2 w)_x + \mu w_y w_{xy}] + \\ & + w_{xy} w_y + w_y w_{xx} + Y \quad (\theta = u_x + v_y). \quad (2.5) \end{aligned}$$

Для примера рассмотрим заделанную на Γ оболочку, которой соответствуют граничные условия:

$$w|_{\Gamma} = \frac{\partial w}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (2.6)$$

$$u|_{\Gamma} = v|_{\Gamma} = 0. \quad (2.7)$$

В уравнениях (2.1)–(2.8) u, v — продольные перемещения точек срединной поверхности оболочки, w — поперечное перемещение точек срединной поверхности оболочки, D — изгибная жесткость оболочки, E, μ — упругие постоянные, h — высота оболочки, N_1, N_2, N_{12} — продольные усилия в оболочке, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}$ — характеристики деформации срединной поверхности оболочки, k_1, k_2 — кривизны оболочки, которые считаем непрерывно дифференцируемыми в $\bar{\Omega}$, X, Y, Z — составляющие внешних сил, действующих на оболочку.

Мы предполагаем в дальнейшем, что массовая плотность и линейные размеры измеряются в таких единицах, что имеют место соотношения:

$$\frac{2\rho}{E} (1 + \mu) = 1, \quad \rho h = 1,$$

где ρ — массовая плотность, h — высота оболочки.

Для случая пластины уравнения (2.1), (2.4), (2.5) приведены в работе (7)*.

В некоторых случаях находит себе применение упрощенный вариант нелинейной теории движения оболочки, основанный на пренебрежении в уравнениях (2.4), (2.5) инерционными членами с u_{tt}, v_{tt} . Не разбирая подробно вопрос о том, в каких случаях такое пренебрежение законно, заметим, что, как правило, частоты собственных продольных колебаний оболочки весьма высоки и значительно больше собственных частот поперечных колебаний. Поэтому такое упрощение задачи практически возможно, если основные частоты внешних сил значительно меньше первых собственных частот продольных колебаний оболочки. В настоящем параграфе мы рассмотрим именно этот упрощенный вариант теории нелинейных колебаний пологой оболочки, используя вместо уравнений (2.4),

* Заметим, что уравнение (2.1) в работе (7) записано не совсем точно. Поскольку учитывается инерция продольных движений оболочки, то, строго говоря, нельзя в правой части (2.1) отбрасывать члены с первыми производными по x, y от N_1, N_2, N_{12} .

(2.5) следующие уравнения:

$$\Delta u + \frac{1+\mu}{1-\mu} \theta_x = -\frac{2}{1-\mu} [(k_1 w)_x + w_x w_{xx} + \mu (k_2 w)_x + \mu w_y w_{xy}] - \\ - w_{xy} w_y - w_x w_{yy} - X = f_1, \quad (2.8)$$

$$\Delta v + \frac{1+\mu}{1-\mu} \theta_y = -\frac{2}{1-\mu} [(k_2 w)_y + w_y w_{yy} + \mu (k_1 w)_y + \mu w_x w_{xy}] - \\ - w_{xy} w_x - w_y w_{xx} - Y = f_2. \quad (2.9)$$

При этом уравнение (2.1) запишется следующим образом:

$$w_{tt} + D \nabla^4 w = Z + N_1 (w_{xx} - k_1) + N_2 (w_{yy} - k_2) + 2N_{12} w_{xy}. \quad (2.10)$$

Начальные условия возьмем лишь для w :

$$w|_{t=0} = g(P), \quad (2.11)$$

$$w_t|_{t=0} = h(P). \quad (2.11')$$

Теперь система (2.2), (2.3), (2.8), (2.9), (2.10) может быть сведена к одному интегро-дифференциальному уравнению относительно w . Для его получения рассмотрим дифференциальные уравнения (2.8), (2.9), предполагая, что $f_1, f_2 \in L_{p\Omega}$, $p > 1$ *.

Введем гильбертово пространство $H_{3\Omega}$ пар функций $\bar{\lambda}(u, v)$ таких, что u, v суммируемы с квадратом в Ω . Рассмотрим в $H_{3\Omega}$ множество E_3 пар функций $\bar{\lambda}(u, v)$, дважды в $\bar{\Omega}$ непрерывно дифференцируемых и равных нулю в некоторой определенной для каждой пары пограничной полосе. На E_3 введем скалярное произведение

$$(\bar{\lambda}_i, \bar{\lambda}_k)_{H_{4\Omega}} = \int_{\Omega} \left[\left(-\Delta u_i - \frac{1+\mu}{1-\mu} \theta_{ix} \right) u_k + \left(-\Delta v_i - \frac{1+\mu}{1-\mu} \theta_{iy} \right) v_k \right] d\Omega. \quad (2.12)$$

Замыкание E_3 в норме, даваемой (2.12), обозначим через $H_{4\Omega}$. Следует отметить, что $H_{4\Omega}$ содержит вектор-функции $\bar{\lambda}(u, v)$, у которых u, v имеют в Ω суммируемые с квадратом первые обобщенные производные.

Определение. Обобщенным решением системы (2.8) — (2.9) при граничных условиях (2.7) назовем пару функций $\bar{\lambda}_0(u_0, v_0) \in H_{4\Omega}$, удовлетворяющую интегральному соотношению

$$(\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda})_{H_{4\Omega}} + \int_{\Omega} (f_1 u + f_2 v) d\Omega = 0 \quad (2.13)$$

для любой пары функций $\bar{\lambda}(u, v) \in H_{4\Omega}$.

Отметим, что соотношение (2.13) имеет и определенный механический смысл. Именно, (2.13) фиксирует тот факт, что $\bar{\lambda}_0$ удовлетворяет уравнениям равновесия сплошной среды, если эти уравнения выражены при помощи принципа возможных перемещений Лагранжа.

* В дальнейшем под $L_{p\Omega}$ будем понимать пространство функций, суммируемых в Ω со степенью p . Под L_{pQ} будем понимать пространство функций, суммируемых в цилиндре $Q = \Omega \times (0, T)$ со степенью p .

ЛЕММА 1.2. Пусть $f_1, f_2 \in L_{p\Omega}$. В этом случае система (2.8)—(2.9) имеет обобщенное решение и притом только одно.

Единственность следует непосредственно из положительной определенности оператора плоской задачи теории упругости [см. (8)]. Доказательство существования обобщенного решения в данном случае лишь несколько видоизменяет обычный в этих случаях ход рассуждений, когда $f_1, f_2 \in L_{2\Omega}$.

Докажем, во-первых, ограниченность снизу на $H_{4\Omega}$ функционала

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \|\bar{\lambda}\|_{H_{4\Omega}}^2 - \int_{\Omega} (f_1 u + f_2 v) d\Omega. \quad (2.14)$$

Для этого заметим, что в силу неравенства Корна [см. (9)]

$$\int_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2) d\Omega \leq c_1 \cdot \|\bar{\lambda}\|_{H_{4\Omega}}^2.$$

Поэтому для всякой вектор-функции $\bar{\lambda} \in H_{4\Omega}$

$$\int_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2) d\Omega < \infty,$$

откуда, в силу теоремы вложения [см. (10)], $u, v \in L_{q\Omega}$ при любом $q \geq 1$.

Из (2.14) получим:

$$\Phi_1 \geq c_2 \int_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2) d\Omega - \|f_1\|_{L_{p\Omega}} \|u\|_{L_{q\Omega}} - \|f_2\|_{L_{p\Omega}} \|v\|_{L_{p\Omega}}, \quad (2.15)$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. При переходе от (2.14) к (2.15) применялось упомянутое неравенство Корна и неравенство Гёльдера.

В силу теоремы вложения [см. (10)],

$$\int_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2) d\Omega \geq c_3 (\|u\|_{L_{q\Omega}}^2 + \|v\|_{L_{q\Omega}}^2) \quad (2.16)$$

при любом $q \geq 1$.

Из (2.15) и (2.16) получаем:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &\geq c_2 \int_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2) d\Omega - \\ &- \frac{\|f_1\|_{L_{p\Omega}} + \|f_2\|_{L_{p\Omega}}}{\sqrt{c_3}} \left[\int_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

откуда непосредственно вытекает ограниченность снизу Φ_1 .

Пусть $\bar{\lambda}_m$, $m = 1, \dots, \infty$, — минимизирующая последовательность для Φ_1 .

В этом случае $\Phi_1 \leq \Phi_1(\lambda_1)$, а из (2.17) следует, что

$$\int_{\Omega} (u_{mx}^2 + u_{my}^2 + v_{mx}^2 + v_{my}^2) d\Omega < d. \quad (2.18)$$

Из (2.18) вытекает, что последовательности u_m , v_m слабо компактны в пространстве с нормой

$$\left[\int_{\Omega} (u_x^2 + v_x^2 + u_y^2 + v_y^2) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Пусть $u_{m'}$, $v_{m'}$ — слабо сходящиеся в этом пространстве последовательности.

Тогда в силу теоремы вложения [см. ⁽¹⁰⁾], $u_{m'}$, $v_{m'}$ сильно сходятся в любом $L_{q\Omega}$, $q \geq 1$.

Используя прием, данный в работе ⁽¹⁰⁾, докажем, что $u_{m'}$, $v_{m'}$ в действительности сильно сходятся в пространстве с нормой

$$\left[\int_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Пусть

$$d_0 = \lim \Phi_1(\bar{\lambda}_k) |_{k \rightarrow \infty}.$$

В этом случае, если k' и m' больше некоторого N , то

$$\Phi_1(\bar{\lambda}_{k'}) < d_0 + \frac{\varepsilon}{8}, \quad \Phi_1(\bar{\lambda}_{m'}) < d_0 + \frac{\varepsilon}{8}, \quad (2.19)$$

где ε — сколь угодно малое число и, кроме того,

$$\Phi_1\left(\frac{\bar{\lambda}_{k'} + \bar{\lambda}_{m'}}{2}\right) \geq d_0. \quad (2.20)$$

Из (2.14) следует:

$$\begin{aligned} \Phi_1\left(\frac{\bar{\lambda}_{k'} + \bar{\lambda}_{m'}}{2}\right) + \Phi_1\left(\frac{\bar{\lambda}_{k'} - \bar{\lambda}_{m'}}{2}\right) &= \frac{1}{4} \|\bar{\lambda}_{k'}\|_{H_{4\Omega}}^2 + \frac{1}{4} \|\bar{\lambda}_{m'}\|_{H_{4\Omega}}^2 + \\ &+ \int_{\Omega} (f_1 u_{k'} + f_2 v_{k'}) d\Omega, \end{aligned} \quad (2.21)$$

или

$$\begin{aligned} d_0 + \Phi_1\left(\frac{\bar{\lambda}_{k'} - \bar{\lambda}_{m'}}{2}\right) &\leq \frac{1}{4} \|\bar{\lambda}_{k'}\|_{H_{4\Omega}}^2 + \frac{1}{4} \|\bar{\lambda}_{m'}\|_{H_{4\Omega}}^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (f_1 u_{k'} + f_2 v_{k'}) d\Omega + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (f_1 u_{k'} + f_2 v_{k'}) d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (f_1 u_{m'} + f_2 v_{m'}) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (f_1 u_{m'} + f_2 v_{m'}) d\Omega \leq \\ &\leq \frac{d_0}{2} + \frac{d_0}{2} - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (f_1 u_{m'} + f_2 v_{m'}) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (f_1 u_{k'} + f_2 v_{k'}) d\Omega + \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Из (2.22) получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\| \frac{\bar{\lambda}_{k'} - \bar{\lambda}_{m'}}{2} \right\|_{H_{4\Omega}}^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} [f_1 (u_{k'} - u_{m'}) + f_2 (v_{k'} - v_{m'})] d\Omega &\leq \\ \leq \frac{\varepsilon}{8} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (f_1 u_{k'} + f_2 v_{k'}) d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (f_1 u_{m'} + f_2 v_{m'}) d\Omega. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Отсюда имеем:

$$\|\bar{\lambda}_{h'} - \bar{\lambda}_{m'}\|_{H_{4\Omega}}^2 \leq \varepsilon, \quad (2.24)$$

чем и доказана сильная сходимость $\bar{\lambda}_{m'}$ в $H_{4\Omega}$. Из (2.24), в силу неравенства Корна, заключаем, что $u_{m'}$, $v_{m'}$ сильно сходятся в пространстве с нормой

$$\left[\int_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда немедленно вытекает, что предельная пара функций $\bar{\lambda}_0(u_0, v_0)$ придает функционалу Φ_1 минимум и, следовательно, удовлетворено соотношение (2.13).

Заметим, что существование обобщенных решений в условиях леммы 1.2 можно непосредственно доказать при помощи функционального метода. Приведенное же здесь доказательство наряду с установлением существования решения обосновывает и метод Ритца для его отыскания.

Таким образом, лемма 1.2 доказана.

На основании леммы 1.2, систему (2.8)–(2.9) можно рассматривать как некоторый оператор \mathfrak{Q}_1 , ставящий в соответствие каждой паре функций $f_1, f_2 \in L_{p\Omega}$ пару функций $u_0, v_0 \in H_{4\Omega}$. Соотношения (2.2) дают возможность утверждать, что для каждой пары $f_1, f_2 \in L_{p\Omega}$ можно найти и обобщенные компоненты напряженного состояния N_1, N_2, N_{12} и соответствующие компоненты деформированного состояния.

Заметим, что из (2.13) вытекают следующие интегральные соотношения, которым удовлетворяют N_1, N_2, N_{12} :

$$\int_{\Omega} (N_1 u_x + N_{12} v_y) d\Omega = 0, \quad \int_{\Omega} (N_{12} v_x + N_2 v_y) d\Omega = 0$$

для любой вектор-функции $\bar{\lambda}(u, v) \in H_{4\Omega}$.

Подставив N_1, N_2, N_{12} , найденные из (2.8), (2.9), (2.2), в уравнение (2.10), мы получим некоторое операторное уравнение относительно w , которое и будет в дальнейшем исследоваться. Укажем некоторые свойства оператора \mathfrak{Q}_1 .

ЛЕММА 2.2. *Обобщенное решение уравнений (2.8), (2.9) удовлетворяет неравенству*

$$\|\bar{\lambda}_0\|_{H_{4\Omega}}^2 \leq c_5 (\|f_1\|_{L_{p\Omega}}^2 + \|f_2\|_{L_{p\Omega}}^2). \quad (2.25)$$

В самом деле, из (2.13) следует:

$$\begin{aligned} \|\bar{\lambda}_0\|_{H_{4\Omega}}^2 &= - \int_{\Omega} (f_1 u_0 + f_2 v_0) d\Omega \leq \|f_1\|_{L_{p\Omega}} \cdot \|u_0\|_{L_{q\Omega}} + \|f_2\|_{L_{p\Omega}} \cdot \|v_0\|_{L_{q\Omega}} \leq \\ &\leq \frac{\|f_1\|_{L_{p\Omega}}^2 + \|f_2\|_{L_{p\Omega}}^2}{2} + \frac{\varepsilon}{2} (\|u_0\|_{L_{q\Omega}}^2 + \|v_0\|_{L_{q\Omega}}^2), \end{aligned} \quad (2.26)$$

где $\epsilon > 0$. Используя теорему вложения [см. (см. ⁽¹⁰⁾)], неравенству (2.26) можно придать следующий вид:

$$\|\bar{\lambda}_0\|_{H_{4\Omega}}^2 \leq \frac{\|f_1\|_{L_{p\Omega}}^2 + \|f_2\|_{L_{p\Omega}}^2}{2\epsilon} + \frac{\epsilon}{2} c_6 \int_{\Omega} (u_{0x}^2 + u_{0y}^2 + v_{0x}^2 + v_{0y}^2) d\Omega. \quad (2.27)$$

Применяя неравенство Корна, получаем отсюда:

$$\|\bar{\lambda}_0\|_{H_{4\Omega}}^2 \leq \frac{\|f_1\|_{L_{p\Omega}}^2 + \|f_2\|_{L_{p\Omega}}^2}{2\epsilon} + \frac{\epsilon}{2} c_6 \cdot c_1 \cdot \|\bar{\lambda}_0\|_{H_{4\Omega}}^2. \quad (2.28)$$

Из (2.28) находим:

$$\|\bar{\lambda}_0\|_{H_{4\Omega}}^2 \leq \frac{\|f_1\|_{L_{p\Omega}}^2 + \|f_2\|_{L_{p\Omega}}^2}{2\epsilon \left(1 - \frac{\epsilon}{2} c_6 c_1\right)} = c_5 (\|f_1\|_{L_{p\Omega}}^2 + \|f_2\|_{L_{p\Omega}}^2). \quad (2.29)$$

В силу неравенства Корна, из (2.29) вытекают неравенства:

$$\left. \begin{aligned} \|u_{0x}\|_{L_{q\Omega}}^2 &\leq c_7 (\|f_1\|_{L_{p\Omega}}^2 + \|f_2\|_{L_{p\Omega}}^2), \\ \|v_{0x}\|_{L_{q\Omega}}^2 &\leq c_8 (\|f_1\|_{L_{p\Omega}}^2 + \|f_2\|_{L_{p\Omega}}^2), \\ \|u_{0y}\|_{L_{q\Omega}}^2 &\leq c_7 (\|f_1\|_{L_{p\Omega}}^2 + \|f_2\|_{L_{p\Omega}}^2), \\ \|v_{0y}\|_{L_{q\Omega}}^2 &\leq c_8 (\|f_1\|_{L_{p\Omega}}^2 + \|f_2\|_{L_{p\Omega}}^2). \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

В случае, если контур $\Gamma \in \Lambda_3(m, \lambda)$, $\lambda > 0$, можно получить другие оценки для λ_0 , из которых неравенства (2.30) будут следовать как частный случай. В самом деле, если ввести тензор Грина плоской задачи теории упругости при граничных условиях (2.7), то обобщенное решение системы (2.8)–(2.9) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} u(P) &= \int_{\Omega} G_{11}(P, Q) f_1(Q) dQ + \int_{\Omega} G_{12}(P, Q) f_2(Q) dQ, \\ v(P) &= \int_{\Omega} G_{21}(P, Q) f_1(Q) dQ + \int_{\Omega} G_{22}(P, Q) f_2(Q) dQ. \end{aligned}$$

При этом если $\Gamma \in \Lambda_3(m, \lambda)$, то справедливы оценки:

$$\left| \frac{\partial G_{ij}}{\partial x} \right| \leq \frac{A}{r_{PQ}}, \quad \frac{\partial G_{ij}}{\partial y} \leq \frac{A}{r_{PQ}}, \quad i=1, 2, \quad j=1, 2,$$

которые можно получить на основе методов теории функций комплексного переменного. Используя эти оценки и некоторые свойства интегралов типа потенциала [см. ⁽¹⁰⁾], можно получить следующие неравенства для u_x :

$$\|u_x\|_{L_q} \leq c \{ \|f_1\|_{L_p} + \|f_2\|_{L_p} \}, \quad q < \frac{2p}{2-p}.$$

Если $p > 2$, то функция u_x просто ограничена в $\bar{\Omega}$ и

$$|u_x| \leq c \{ \|f_1\|_{L_p} + \|f_2\|_{L_p} \}.$$

Аналогичные неравенства справедливы и для u_y, v_x, v_y .

Пусть теперь f_1, f_2 зависят от x, y и параметра t , причем f_1, f_2 ограничены * в $\bar{Q} = \bar{\Omega} \times [0, T]$. В этом случае, очевидно, u_x, u_y, v_x, v_y также ограничены в \bar{Q} .

Приведенные свойства оператора \mathfrak{L}_1 будут нам необходимы при доказательстве существования и единственности обобщенного решения нашей задачи.

Если использовать в данном случае результаты § 1, то следует положить

$$A_1 w = D \nabla^4 w, \quad (2.31)$$

$$A_2 w = N_1 (k_1 - w_{2x}) + N_2 (k_2 - w_{1y}) - 2N_{12} w_{xy}. \quad (2.32)$$

В силу того, что мы не учитываем здесь трение, $K \bar{\omega} = 0$.

Под $H_{1\Omega}$, в соответствии с п. 1 § 1, будем понимать множество функций $w(P)$ с суммируемым в Ω квадратом, причем

$$(w_1 \cdot w_2)_{H_{1\Omega}} = \int_{\Omega} w_1(P) w_2(P) dP.$$

E_1 есть множество функций, имеющих в Ω непрерывные четвертые производные, каждая из которых равна нулю в некоторой пограничной полосе.

Легко видеть, что на E_1 $A_1 \omega$ — симметричный и, в силу неравенства Фридрихса [см. (8)], положительно-определенный оператор, т. е. условие 1) § 1 выполнено. Очевидно также, что выполнено и условие 2) § 1.

$H_{2\Omega}$ будет замыканием E_1 в норме, порождаемой скалярным произведением

$$(w_1 \cdot w_2)_{H_{2\Omega}} = (A_1 w_1 \cdot w_2)_{H_{1\Omega}} = \int_{\Omega} D \nabla^4 w_1 \cdot w_2 d\Omega. \quad (2.33)$$

Известно, что $H_{2\Omega}$ в данном случае содержит функции w , имеющие все вторые обобщенные производные, суммируемые в Ω с квадратом.

Можно показать, что оператор $D \nabla^4 w$ имеет в Ω полную систему собственных векторов, которые будут ортогональными в $H_{1\Omega}$ и $H_{2\Omega}$, а также нормированными в $H_{1\Omega}$ [см. (8)]. Условие 3) § 1, таким образом, выполнено.

Рассмотрим множество E_2 функций $w(P, t)$ таких, что при каждом t из $[0, T]$ $w \in E_1, w_t \in C_{\bar{\Omega}}$ и, кроме того, w как элемент $H_{2\Omega}$, w_t как элемент $H_{1\Omega}$ непрерывны на $[0, T]$.

* В дальнейшем мы будем считать функцию f ограниченной в \bar{Q} , если существует константа A такая, что неравенство $|f| < A$ имеет место почти всюду в \bar{Q} .

Введем на E_2 скалярное произведение

$$(w_1, w_2) = \int_0^T \int_{\Omega} (w_{1t} \cdot w_{2t} + D\nabla^4 w_1 \cdot w_2) d\Omega dt. \quad (2.34)$$

Замыкание E_2 в норме (2.34) есть H_{3Q} . D^0 в данном случае, очевидно, есть замыкание в норме (2.34) множества функций $\dot{D} \in E_2$ и равных нулю для $T - \delta \leq t \leq T$, где δ — некоторое определенное для каждой функции из \dot{D} число.

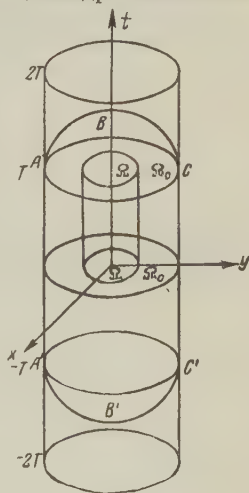
ЛЕММА 3.2. Пусть $w \in H_{3Q}$. В этом случае $w_x, w_y \in L_{4Q}$ и $\|w\|_{H_{1Q}}$ есть непрерывная функция времени, если Γ — граница класса $\Lambda_2(m, 0)$.

Докажем, во-первых, что если $w \in H_{3Q}$, то $w_x, w_y \in L_{4Q}$. Для этого построим круговой прямой цилиндр $\bar{\Omega}_0 \times [0, T]$, содержащий цилиндр $\bar{Q} = \bar{\Omega} \times [0, T]$. Очевидно, любое сечение Ω_0 этого цилиндра плоскостью $t = t_0 \in [0, T]$ будет содержать область Ω . Поскольку граница Ω Γ является контуром класса $\Lambda_2(m, 0)$, то, на основании результатов работы⁽¹¹⁾ или⁽¹²⁾, можно в каждой плоскости $t = t_0 \in [0, T]$ продолжить w на все сечение Ω_0 с сохранением дифференциальных свойств по x, y . При этом легко видеть, что продолжение возможно осуществить так, что продолженная функция будет в области $\Omega_0 \times [0, T]$ иметь суммируемые с квадратом $w_t, w_{xx}, w_{yy}, w_{xy}$. Продолжим w на область $\Omega_0 \times (T, 2T)$. Для этого положим

$$w(x, y, t) = w(x, y, 2T - t), \quad T \leq t \leq 2T.$$

Наконец, определим w для $\Omega_0 \times [-2T, 0]$, положив

$$w(x, y, -t) = w(x, y, t).$$



Легко видеть, что продолженная функция будет в области $\Omega_0 \times (-2T, 2T)$ иметь суммируемые с квадратом $w_t, w_{xx}, w_{yy}, w_{xy}$. Построим теперь область Q' так, как указано на рисунке. Поверхности вращения ABC и $A'B'C'$ имеют непрерывные кривизны и сопрягаются с поверхностью цилиндра $\Omega_0 \times [-T, T]$ так, чтобы вся поверхность (цилиндр $ABC + A'B'C'$) имела непрерывные кривизны. Область Q' , таким образом, ограничивается поверхностью цилиндра $\Omega_0 \times [-T, T]$ и поверхностями ABC и $A'B'C'$. Поскольку Q' имеет непрерывные кривизны в каждой точке, то на основании результатов работы⁽¹¹⁾ или⁽¹²⁾, функцию w можно продолжить за Q' с сохранением дифференциальных свойств так, что она будет равна нулю вне некоторой области $Q'' \supset Q'$. Теперь уже w определена во всем пространстве и принадлежит классу $H_2^{(2,2,1)}$ [см. (13)].

В силу теоремы 12 работы⁽¹³⁾ можно утверждать, что $w_x, w_y \in L_{4Q}$, $w \in L_{pQ}$, где p — любое положительное число.

Таким образом, если $w \in H_{3Q}$, то, безусловно, $w_t, w_x, w_y \in L_{2Q}$. На основании теоремы вложения [см. (10)], можно утверждать, что при любом t $w \in L_{4\Omega}$, а следовательно, и подалю $w \in L_{2\Omega}$.

ЛЕММА 4.2. Пусть $w_n \xrightarrow{c.l.} w_0$ в H_{3Q} . В этом случае $w_n \Rightarrow w_0$ в $H_{1\Omega}$, причем равномерно относительно $0 \leq t \leq T$.

Рассмотрим гильбертово пространство H_{4Q} функций, имеющих в Q суммируемые с квадратом первые производные w_x, w_y, w_t со скалярным произведением

$$(w_1, w_2)_{H_{4Q}} = \int_0^T \int_{\Omega} (w_{1t} \cdot w_{2t} + w_{1x} \cdot w_{2x} + w_{1y} \cdot w_{2y} + w_1 \cdot w_2) d\Omega dt. \quad (2.35)$$

По лемме 3.2, если $w \in H_{3Q}$, то $w_x \in L_{4Q}$, $w_y \in L_{4Q}$, поэтому $H_{3Q} \subset H_{4Q}$.

Далее, легко видеть, что любой линейный функционал в H_{4Q} есть также линейный функционал в H_{3Q} . Поэтому, если $w_n \xrightarrow{c.l.} w_0$ в H_{3Q} , то $w_n \xrightarrow{c.l.} w_0$ в H_{4Q} . Однако в силу полной непрерывности оператора вложения H_{4Q} в $H_{1\Omega}$ [см. (10)] заключаем, что $w_n \Rightarrow w_0$ в $H_{1\Omega}$, причем

$$\lim \|w_0 - w_n\|_{H_{1\Omega}}|_{n \rightarrow \infty} = 0$$

равномерно для $0 \leq t \leq T$. Этим доказано выполнение условия 4) п. 1 § 1.

Функционал Φ для нашего случая есть потенциальная энергия изгиба и растяжения оболочки:

$$\Phi = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \|w\|_{H_{2\Omega}}^2 + \frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \left[\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\mu\varepsilon_1\varepsilon_2 + \frac{1}{2}(1-\mu)\varepsilon_{12}^2 \right] \right\} d\Omega. \quad (2.36)$$

Φ можно считать зависящим от w и определенным на $H_{2\Omega}$. В самом деле, если $w \in H_{2\Omega}$, то, в силу теоремы вложения [см. (10)], $w_x, w_y \in L_{p\Omega}$, $p > 1$, и w непрерывна в Ω . Поэтому f_1 и f_2 суммируемы на Ω со степенью $2 - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число.

В силу леммы 1.2, система (2.8) — (2.9) определяет $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}$ через w и Φ , следовательно, определяется только через w . Далее, из (2.36) сразу можно заключить, что $\Phi \geq 0$ и из $\Phi \leq r$ вытекает

$$\|w\|_{H_{2\Omega}} \leq \sqrt{r \cdot 2}.$$

Эти обстоятельства имеют место вследствие того, что в квадратных скобках формулы (2.36) стоит положительно определенная относительно $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}$ квадратичная форма (потенциальная энергия растяжения срединной поверхности оболочки).

Перейдем к операторам $A_3 w_0, A_4 w_1$.

Рассмотрим две функции: $w_0, w_0 + w_1 \in H_{2\Omega}$ и вычислим $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}, N_1, N_2, N_{12}$ для $w_0 + w_1$.

Из (2.2) и (2.3) следует, что $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}, N_1, N_2, N_{12}$ являются нелинейными операторами второй степени над w_1 :

$$\varepsilon_1 \{w_0 + w_1\} = \varepsilon_{10} \{w_0\} + \varepsilon_{11} \{w_0, w_1\} + \varepsilon_{12} \{w_0, w_1\}, \quad (2.37)$$

где ε_{10} соответствует w_0 , ε_{11} — некоторый линейный оператор над w_1 , ε_{12} — однородный нелинейный оператор второй степени над w_1 . Аналогичное разложение произведем для $\varepsilon_2, \varepsilon_{12}, N_1, N_2, N_{12}$.

Из (2.36) имеем:

$$\begin{aligned} & \Phi(w_0 + w_1) - \Phi(w_1) = \\ & = \int_{\Omega} \{D\nabla^2 w_0 \nabla^2 w_1 + (N_{10}\varepsilon_{11} + N_{20}\varepsilon_{21} + N_{120}\varepsilon_{121})\} d\Omega + \alpha(w_0, w_1), \end{aligned} \quad (2.38)$$

где $\alpha = \|w_1\|_{H_{2\Omega}}^2 + \beta$ и

$$\begin{aligned} \beta = \int_{\Omega} \frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \cdot \left\{ \varepsilon_{11}^2 + 2\varepsilon_{10}\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}^2 + 2\varepsilon_{20}\varepsilon_{22} + 2\mu(\varepsilon_{11}\varepsilon_{21} + \varepsilon_{20}\varepsilon_{12} + \varepsilon_{10}\varepsilon_{22}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}(1-\mu)(\varepsilon_{121}^2 + 2\varepsilon_{120}\varepsilon_{122}) \right\} + \\ + [2\varepsilon_{11}\varepsilon_{12} + 2\varepsilon_{21}\varepsilon_{22} + 2\mu(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{12}\varepsilon_{21}) + (1-\mu)\varepsilon_{121}\varepsilon_{122}] + \\ + \left[\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{22}^2 + 2\mu\varepsilon_{12}\varepsilon_{22} + \frac{1}{2}(1-\mu)\varepsilon_{122}^2 \right] \} d\Omega. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Легко показать, что α удовлетворяет условию (1.14). Очевидно, следует рассмотреть только члены (2.39). Из (2.3) следует, что $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{121}$ могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= u_{1x} + k_1 w_1 + w_{0x} w_{1x}, & \varepsilon_{21} &= w_1 k_2 + v_{1x} + w_{0x} + w_{1y}, \\ \varepsilon_{121} &= u_{1y} + w_{0x} w_{1y} + v_{1x} + w_{0y} w_{1x}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

В равенствах (2.40) u_1, v_1 определяются как обобщенные решения системы

$$\Delta u_1 + \frac{1+\mu}{1-\mu} \theta_{1x} = f_{11}, \quad \Delta v_1 + \frac{1+\mu}{1-\mu} \theta_{1y} = f_{21}, \quad (2.41)$$

где f_{11}, f_{21} — некоторые линейные операторы над w_1 , определяемые соотношениями:

$$f_{11} \{w_1\} = \frac{\partial}{\partial \mu} f_1 \{w_0 + \mu w_1\} \Big|_{\mu=0}, \quad f_{21} = \frac{\partial}{\partial \mu} f_2 \{w_0 + \mu w_1\} \Big|_{\mu=0}. \quad (2.42)$$

В силу теоремы вложения [см. (10)], имеем:

$$\|w_1\|_{L_{2\Omega}} \leq c_9 \|w_1\|_{H_{2\Omega}}, \quad \|w_{1x}\|_{L_{2\Omega}} \leq c_9 \|w_1\|_{H_{2\Omega}}, \quad \|w_{1y}\|_{L_{2\Omega}} \leq c_9 \|w_1\|_{H_{2\Omega}}. \quad (2.43)$$

Рассмотрим более подробно u_1, v_1 . Из (2.30) заключаем, что для $u_{1x}, u_{1y}, v_{1x}, v_{1y}$ справедливы оценки типа

$$\|u_{1x}\|_{L_{2\Omega}} \leq c_8 (\|f_{11}\|_{L_{p\Omega}} + \|f_{21}\|_{L_{p\Omega}}), \quad (2.44)$$

если $f_{11}, f_{21} \in L_{p\Omega}$. Из (2.8), (2.9) видно, что f_{11} содержит слагаемые вида $k_1 w_1, w_{1x} w_{0xx}, w_{0x} w_{1xx}, \dots$. Каждое из этих слагаемых суммируемо в Ω

со степенью $2 - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число. В самом деле, из теоремы вложения [см. (1⁰)] следует, что если $w \in H_{2\Omega}$, то $w_{0x}, w_{0y} \in L_{p\Omega}$ при любом $p > 1$ и w просто непрерывна в Ω . Поэтому члены вида $k_1 w_1$ будут просто непрерывны в $\bar{\Omega}$, а члены вида $w_{0x} w_{1xx}$ суммируемы со степенью, сколь угодно близкой к двум.

Таким образом, оценки типа (2.44) будут справедливы, если $p = 2 - \varepsilon$.

Далее, легко видеть, что

$$\|f_{11}\|_{L_{p\Omega}} \leq c_{10} \|w_1\|_{H_{2\Omega}}, \quad \|f_{21}\|_{L_{p\Omega}} \leq c_{10} \|w_1\|_{H_{2\Omega}}.$$

Отсюда имеем:

$$\|u_{1x}\|_{L_{2\Omega}} \leq c_{11} \|w_1\|_{H_{2\Omega}}.$$

Из (2.40) получаем:

$$\|\varepsilon_{11}\|_{L_{2\Omega}}^2 \leq c_{12} \|w_1\|_{H_{2\Omega}}^2. \quad (2.45)$$

Аналогичные оценки могут быть получены и для $\varepsilon_{21}, \varepsilon_{121}$.

Рассмотрим теперь оценки для $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{121}$. Из (2.3) получаем:

$$\varepsilon_{12} = u_{2x} + \frac{1}{2} w_{1x}^2. \quad (2.46)$$

Рассмотрим более подробно u_{2x} , так как оценка $\frac{1}{2} w_{1x}^2$ через $\|w\|_{H_{2\Omega}}^2$ очевидна. u_2, v_2 определяются из системы

$$\Delta u_2 + \frac{1+\mu}{1-\mu} \cdot \theta_{2x} = f_{12}, \quad \Delta v_2 + \frac{1+\mu}{1-\mu} \theta_{2y} = f_{22}, \quad (2.47)$$

где

$$f_{12} = \frac{1}{2!} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} f_1 \{w_0 + \mu w_1\}, \quad f_{22} = \frac{1}{2!} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} f_2 \{w_0 + \mu w_1\}. \quad (2.48)$$

Легко видеть, что f_{12}, f_{22} содержат слагаемые вида $w_{1x}^2, w_{1x} \cdot w_{1y}, w_{1y}^2$ и поэтому

$$\|f_{12}\|_{L_{p\Omega}} \leq c_{13} \|w_1\|_{H_{2\Omega}}^2, \quad \|f_{22}\|_{L_{p\Omega}} \leq c_{13} \|w_1\|_{H_{2\Omega}}^2. \quad (2.49)$$

Из (2.30) получаем:

$$\|u_{2x}\|_{L_{2\Omega}} \leq c_{14} \|w_1\|_{H_{2\Omega}}^2. \quad (2.50)$$

Аналогичные оценки могут быть получены для u_{2y}, v_{2x}, v_{2y} .

Из (2.46) находим:

$$\|\varepsilon_{12}\|_{L_{2\Omega}} \leq c_{15} \|w_1\|_{H_{2\Omega}}^2. \quad (2.51)$$

Такие же оценки справедливы и для $\varepsilon_{22}, \varepsilon_{122}$.

Используя (2.45) и (2.51), легко убеждаемся в справедливости соотношения (1.14). После этого нетрудно убедиться, что если $\bar{\omega} \in E$, то

$$\text{grad}_{H_{1\Omega}} \Phi = A_1 \bar{\omega} + A_2 \omega.$$

Рассмотрим более подробно формулу (2.38). Имеем:

$$\begin{aligned} \Phi(w_0 + w_1) - \Phi(w_0) = & \int_{\Omega} \{ D \nabla^2 w_0 \cdot \nabla^2 w_1 + [N_{10}(u_{1x} + k_1 w_1 + w_{0x} w_{1x}) + \\ & + N_{20}(v_{1y} + k_2 w_1 + w_{0y} w_{1y}) + \\ & + N_{120}(u_{1y} + v_{1x} + w_{0x} w_{1y} + w_{0y} w_{1x})] \} d\Omega + \alpha(w_0, w_1). \end{aligned} \quad (2.52)$$

В силу того что u_0, v_0 есть обобщенное решение системы (2.8) — (2.9), имеют место соотношения:

$$\int_{\Omega} (N_{10} u_{1x} + N_{120} u_{1y}) d\Omega = 0, \quad \int_{\Omega} (N_{120} v_{1x} + N_{20} v_{2y}) d\Omega = 0,$$

и формула (2.52) может быть преобразована к следующему виду:

$$\begin{aligned} \Phi(w_0 + w_1) - \Phi(w_0) = & \int_{\Omega} \{ D \nabla^2 w_0 \cdot \nabla^2 w_1 + [N_{10}(k_1 w_1 + w_{0x} w_{1x}) + \\ & + N_{20}(k_2 w_1 + w_{0y} w_{1y}) + N_{120}(w_{0x} w_{1y} + w_{0y} w_{1x})] \} d\Omega + \alpha(w_0, w_1). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Введем оператор $A_3 w_0$, ставящий в соответствие каждой функции $w_0 \in H_{2\Omega}$ вектор-функцию с составляющими

$$\sqrt{D} \cdot \nabla^2 w_0, \quad N_{120} w_{0x} + N_{20} w_{0y}, \quad N_{10} k_1 + N_{20} k_2, \quad N_{10} w_{0x} + N_{120} w_{0y},$$

и оператор $A_4 w_1$, ставящий в соответствие каждой функции $w_1 \in H_{2\Omega}$ вектор-функцию с составляющими

$$\sqrt{D} \nabla^2 w_1, \quad w, \quad w_{1x}, \quad w_{1y}.$$

Покажем, что для введенных таким образом операторов справедливо соотношение (1.23).

ЛЕММА 5.2. Пусть $w_n \xrightarrow{\text{ср}} w_0$ в H_{3Q} . В этом случае

$$w_{nx} \rightarrow w_{0x}, \quad w_{ny} \rightarrow w_{0y} \text{ в } L_{4Q}.$$

Для доказательства леммы 5.2 заметим, что последовательность w_n находится в некоторой сфере пространства H_{3Q} .

Каждую из функций w_n можно, по лемме (3.2), распространить на все пространство x, y, t , причем так, что $w_n \equiv 0$ вне некоторой области Q'' , охватывающей Q . При этом, если использовать способ распространения, примененный при доказательстве леммы 3.2, для всех w_n окажется справедливым соотношение

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} [w_{nt}^2 + D (\nabla^2 w_n)^2] d\Omega dt < A.$$

В силу теоремы 14 работы (13), из каждой бесконечной части последовательности w_n возможно выделить по крайней мере одну последовательность w_n такую, что будут иметь место соотношения:

$$\lim_{-\infty} \iiint_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial w_n}{\partial x} - \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^4 dx dy dt = 0, \quad \lim_{-\infty} \iiint_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial w_n}{\partial y} - \frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^4 dx dy dt = 0,$$

где v_0 — некоторая функция, удовлетворяющая условию

$$\iint_{-\infty}^{\infty} [v_{0t}^2 + D(\nabla^2 v_0)^2] \cdot d\Omega dt < A.$$

Очевидно, будут иметь место соотношения:

$$\lim \iiint_Q \left(\frac{\partial w_{n'}}{\partial x} - \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^4 dx dy dt = 0, \quad (2.54)$$

$$\lim \iiint_Q \left(\frac{\partial w_{n'}}{\partial y} - \frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^4 dx dy dt = 0.$$

Докажем, что существует только один элемент $v_0 = w_0$, удовлетворяющий условиям (2.54) для любой последовательности $w_{n'} = w_n$. Для этого заметим, что из $w_n \xrightarrow{сн} w_0$ в H_{3Q} следует, что $w_n \Rightarrow w_0$ в L_{2Q} . Это обстоятельство фактически установлено нами при доказательстве леммы 4.2.

Предположим, что существуют две функции v_0, v_1 , удовлетворяющие условиям (2.54) для каких-либо последовательностей из $\{w_n\}$. В этом случае должно существовать бесконечное число элементов $w_k \in \{w_n\}$ таких, что

$$\|w_{kx} - v_{1x}\|_{L_{2Q}}^2 \leq \varepsilon, \quad \|w_{ky} - v_{1y}\|_{L_{2Q}}^2 \leq \varepsilon,$$

где ε — любое число. Но

$$\|w_k - v_1\|_{L_{2Q}}^2 \leq c(\|w_{kx} - v_{1x}\|_{L_{2Q}}^2 + \|w_{ky} - v_{1y}\|_{L_{2Q}}^2) \leq 2c \cdot \varepsilon,$$

откуда следует, что $\{w_n\}$ будет содержать бесконечное число элементов w_k , удаленных в норме L_{2Q} на конечное расстояние от $v_0 = w_0$. Последнее невозможно, так как $w_n \Rightarrow w_0$ в L_{2Q} .

Таким образом, лемма 5.2 доказана.

ЛЕММА 6.2. Пусть $w \in H_{3Q}$, $X, Y \in L_{2Q}$. В этом случае составляющие обобщенного решения системы (2.8) — (2.9) удовлетворяют условиям: $u_x, u_y, v_x, v_y \in L_{2Q}$. Если при этом $w_n \xrightarrow{сн} w_0$ в H_{3Q} , то $u_{nx} \Rightarrow u_{0x}$, $v_{nx} \Rightarrow v_{0x}$, $u_{ny} \Rightarrow u_{0y}$, $v_{ny} \Rightarrow v_{0y}$ в L_{2Q} .

Во-первых, заметим, что f_1 и f_2 в уравнениях (2.8), (2.9) могут быть представлены в следующем виде:

$$f_1 = \frac{\partial F_{11}}{\partial x} + \frac{\partial F_{12}}{\partial y} + X, \quad f_2 = \frac{\partial F_{21}}{\partial x} + \frac{\partial F_{22}}{\partial y} + Y, \quad (2.55)$$

где

$$\left. \begin{aligned} F_{11} &= -\frac{2}{1-\mu} \left(k_1 w + \frac{1}{2} w_x^2 + \mu k_2 w + \frac{1}{2} \mu w_y^2 \right), \\ F_{12} &= -w_x w_y, \quad F_{21} = -w_x w_y, \\ F_{22} &= -\frac{2}{1-\mu} \left(k_2 w + \frac{1}{2} w_y^2 + \mu k_1 w + \frac{1}{2} \mu w_x^2 \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.56)$$

Основное уравнение (2.13), если $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_0$, принимает вид:

$$\|\bar{\lambda}\|_{H_{4\Omega}}^2 = - \int_{\Omega} (F_{11}u_x + F_{12}u_y) d\Omega - \int_{\Omega} (F_{21}v_x + F_{22}v_y) d\Omega + \int_{\Omega} (Xu + Yv) d\Omega. \quad (2.57)$$

Из (2.57) получаем:

$$\|\bar{\lambda}\|_{H_{4\Omega}}^2 \leq \varepsilon^2 \int_{\Omega} (F_{11}^2 + 2F_{12}^2 + F_{22}^2) d\Omega + \varepsilon^2 \int_{\Omega} (X^2 + Y^2) d\Omega + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2 + u^2 + v^2) d\Omega. \quad (2.58)$$

Применив к (2.58) неравенство Корна, находим:

$$\|\bar{\lambda}\|_{H_{4\Omega}}^2 \leq c_{16}\varepsilon^2 \int_{\Omega} (F_{11}^2 + 2F_{12}^2 + F_{22}^2) d\Omega + c_{16}\varepsilon^2 \int_{\Omega} (X^2 + Y^2) d\Omega. \quad (2.59)$$

Из (2.59), учитывая (2.55), получаем:

$$\|\bar{\lambda}\|_{H_{4\Omega}}^2 \leq c_{17} \int_{\Omega} (w^2 + w_x^4 + w_y^4) d\Omega + c_{16} \int_{\Omega} (X^2 + Y^2) d\Omega. \quad (2.60)$$

В силу леммы 3.2, $w \in L_{2Q}$, $w_x, w_y \in L_{4Q}$. Кроме того, по предположению, $X, Y \in L_{2Q}$. Поэтому из (2.60) вытекает:

$$\int_0^T \|\bar{\lambda}\|_{H_{4\Omega}}^2 dt \leq c_{17} \int_0^T \int_{\Omega} (w^2 + w_x^4 + w_y^4) d\Omega dt + c_{18} (\|X\|_{L_{2Q}}^2 + \|Y\|_{L_{2Q}}^2). \quad (2.61)$$

Неравенство (2.61) исчерпывает первое утверждение леммы 6.2.

Перейдем к доказательству второго утверждения леммы 6.2. Пусть $w_n \xrightarrow{сн} w_0$ в H_{3Q} . Рассмотрим $\Delta_n(\Delta u_n, \Delta v_n)$, где $\Delta u_n = u_0 - u_n$, $\Delta v_n = v_0 - v_n$. Очевидно, $\Delta u_n, \Delta v_n$ будут обобщенными решениями такой системы:

$$\Delta u_n + \frac{1+\mu}{1-\mu} \Delta \theta_{nx} = f_1\{w_0\} - f_1\{w_n\}, \quad (2.62)$$

$$\Delta v_n + \frac{1+\mu}{1-\mu} \Delta \theta_{ny} = f_2\{w_0\} - f_2\{w_n\}.$$

Неравенство (2.29) примет в данном случае вид:

$$\|\Delta \bar{\lambda}_n\|_{H_{4\Omega}}^2 = c_{16}\varepsilon^2 \int_{\Omega} \{[F_{11}\{w_0\} - F_{11}\{w_n\}]^2 + 2[F_{12}\{w_0\} - F_{12}\{w_n\}]^2 + [F_{22}\{w_0\} - F_{22}\{w_n\}]^2\} d\Omega. \quad (2.63)$$

Из (2.63), используя неравенство Корна, получим:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [(\Delta u_{nx})^2 + (\Delta u_{ny})^2 + (\Delta v_{nx})^2 + (\Delta v_{ny})^2] d\Omega \leq \\ & \leq c_{19} \int_{\Omega} \{[F_{11}\{w_0\} - F_{11}\{w_n\}]^2 + 2[F_{12}\{w_0\} - F_{12}\{w_n\}]^2 + \\ & + [F_{22}\{w_0\} - F_{22}\{w_n\}]^2\} d\Omega. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Отсюда следует:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} [(\Delta u_{nx})^2 + (\Delta u_{ny})^2 + (\Delta v_{nx})^2 + (\Delta v_{ny})^2] d\Omega dt \leqslant \\ & \leqslant c_{20} \int_0^T \int_{\Omega} \{ [F_{11}\{w_0\} - F_{11}\{w_n\}]^2 + 2[F_{12}\{w_0\} - F_{12}\{w_n\}]^2 + \\ & \quad + [F_{22}\{w_0\} - F_{22}\{w_n\}]^2 \} d\Omega dt. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Далее, поскольку $w_n \xrightarrow{с\lambda} w_0$ в H_{3Q} , $w_{nx} \Rightarrow w_{0x}$, $w_{ny} \Rightarrow w_{0y}$ в L_{4Q} . При этом из (2.56) следует, что при $n \rightarrow \infty$ правая часть (2.65) имеет своим пределом ноль.

Таким образом, лемма 6.2 доказана полностью.

Перейдем к доказательству соотношения (1.23). Пусть $w_n \xrightarrow{с\lambda} w_0$ в H_{3Q} . Рассмотрим

$$\begin{aligned} I_n = & \int_0^T \int_{\Omega} (A_3 w_n - A_3 w_0, A_4 w_1) d\Omega dt = \int_0^T \int_{\Omega} D(\nabla^2 w_n - \nabla^2 w_0) \nabla^2 w_1 d\Omega dt + \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} w_1 [(N_{1n} - N_{10}) k_1 + (N_{2n} - N_{20}) k_2] d\Omega dt + \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} (N_{1n} w_{nx} + N_{12n} w_{ny} - N_{10} w_{0x} - N_{120} w_{0y}) d\Omega dt + \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} (N_{2n} w_{nx} + N_{12n} w_{ny} - N_{20} w_{0x} - N_{120} w_{0y}) d\Omega dt. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Легко видеть, что первый член формулы (2.66) при $n \rightarrow \infty$ имеет пределом ноль, так как этот член есть линейный функционал в H_{3Q} . Далее, в силу леммы 6.2, $u_{nx} \Rightarrow u_{0x}$, $u_{ny} \Rightarrow u_{0y}$, $v_{nx} \Rightarrow v_{0x}$, $v_{ny} \Rightarrow v_{0y}$ в L_{2Q} и поэтому $N_{1n} \Rightarrow N_{10}$, $N_{2n} \Rightarrow N_{20}$, $N_{12n} \Rightarrow N_{120}$ в L_{2Q} . На основании этого легко заметить, что и остальные члены формулы (2.66) также имеют своим пределом ноль.

Таким образом, операторы $A_3 w_0$, $A_4 w_1$ удовлетворяют всем условиям § 1.

Введем для нашей задачи обобщенное решение. Именно обобщенным решением уравнений (2.2), (2.3), (2.8), (2.9), (2.10) при начальных данных (2.11), (2.11') и граничных условиях (2.6), (2.7) назовем функцию $w_0 \in H_{3Q}$, удовлетворяющую интегральному соотношению

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} [-w_{0t} w_{1t} + D \nabla^2 w_0 \nabla^2 w_1 + (N_{10} k_1 + N_{20} k_2) w_1 + (N_{10} w_{0x} + N_{120} w_{0y}) w_{1x} + \\ & \quad + (N_{120} w_{0x} + N_{20} w_{0y}) w_{1y} - Zw] d\Omega dt - \int_{\Omega} h w d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (2.66')$$

для любой $w_1 \in D^0$ и начальному условию (2.11) в следующем смысле:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} (w - g)^2 d\Omega = 0. \quad (2.67)$$

На основании результатов § 1 в условиях данной задачи можно сделать заключение о существовании хотя бы одного обобщенного решения в смысле (2.66') и (2.67), а также установить возможность приближенного решения нашей задачи с помощью метода Бубнова — Галеркина.

В данной работе мы оставляем в стороне весьма существенный вопрос о единственности обобщенного решения и его дифференциальных свойствах, довольствуясь тем, что введенное обобщенное решение (даже если оно не единственно) имеет непосредственный механический смысл. Вместе с этим простым анализом легко убедиться, что широкие классы функций из H_{3Q} содержат не более одного решения, если $\Gamma \in \Lambda_3(m, \lambda)$. Именно, пусть B есть подмножество функций $w \in H_{3Q}$, имеющих в Q ограниченные производные w_{xx} , w_{xy} , w_{yy} . Докажем, что B содержит не более одного решения нашей задачи. Для этого предварительно установим следующий факт. Положим, что для некоторой функции $w_0 \in H_{3Q}$ имеют место соотношения:

$$\int_0^T \int_{\Omega} (-w_0 w_{11} + D \nabla^2 w_0 \cdot \nabla^2 w_1 - F w_1) d\Omega dt = 0, \quad (2.68)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} w_0^2 d\Omega = 0, \quad (2.69)$$

где w_1 — произвольная функция из D^0 , а $F \in L_{2Q}$. В этом случае

$$\int_{\Omega} [D (\nabla^2 w_0)^2 + w_0^2] d\Omega \leq c_{21} \|F\|_{L_{2Q}}^2, \quad (2.70)$$

причем c_{21} не зависит от F, t . Неравенство (2.70) носит характер закона сохранения и может быть доказано следующим образом.

Пусть

$$w_0 = \sum_{k=1}^{\infty} q_{0k} \psi_k,$$

где ψ_k — система собственных векторов оператора $D \nabla^4 w$ при граничных условиях (2.6) [см. условие 3) § 1]. Полагая $w_1 = \varphi(t) \psi_k$, где φ — произвольная функция времени, имеющая на $(0, T)$ суммируемую с квадратом производную и исчезающая в некоторой окрестности T , получим:

$$\int_0^T (-\dot{q}_{0k} \dot{\varphi} + \lambda_{0k}^2 q_{0k} \cdot \varphi - f_k \varphi) dt = 0. \quad (2.71)$$

Здесь λ_{0k}^2 — соответствующее собственное значение оператора $D \nabla^4 w$ при граничных условиях (2.6),

$$f_k = \int_{\Omega} F \psi_k d\Omega.$$

В силу произвольности φ и соотношения (2.69), из (2.71) получим:

$$q_{0k} = \frac{1}{\lambda_k} \int_0^t f_k(s) \sin \lambda_k(t-s) ds, \quad (2.72)$$

что для w_0 дает:

$$w_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k}{\lambda_k} \cdot \int_0^t f_k(s) \sin \lambda_k(t-s) ds, \quad (2.73)$$

откуда непосредственно вытекает неравенство (2.70).

Предположим, что множество B содержит два обобщенных решения нашей задачи: w_0 и w_0^* . Рассмотрим $\tilde{w} = w_0 - w_0^*$. Очевидно, \tilde{w} удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [-\tilde{w}_t \cdot w_{1t} + D \nabla^2 \tilde{w} \cdot \nabla^2 w_1 + (N_{10} w_{0x} + N_{120} w_{1y} - N_{10}^* w_{0x}^* - N_{120}^* w_{1y}^*) w_{1x} + \\ + (N_{120} w_{0x} + N_{20} w_{0y} - N_{120}^* w_{0x}^* - N_{20}^* w_{0y}^*) w_{1y} + k_1 w_1 (N_{10} - N_{10}^*) + \\ + k_2 w_1 (N_{20} - N_{20}^*)] d\Omega = 0, \end{aligned} \quad (2.74)$$

$$\lim \int_{\Omega} \tilde{w}^2 d\Omega|_{t \rightarrow 0} = 0. \quad (2.75)$$

Пусть $\tilde{u} = u_0 - u_0^*$, $\tilde{v} = v_0 - v_0^*$. Очевидно, \tilde{u}, \tilde{v} будут обобщенными решениями системы

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{u} + \frac{1+\mu}{1-\mu} \tilde{\theta}_x &= f_1 - f_1^*, \\ \Delta \tilde{v} + \frac{1+\mu}{1-\mu} \tilde{\theta}_y &= f_2 - f_2^*. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Легко видеть, что в данных условиях f_1 и f_2 ограничены в \bar{Q} . В самом деле, если w_{xx}, w_{yy}, w_{xy} ограничены в \bar{Q} , то w_x, w_y, w также ограничены в \bar{Q} , что и доказывает ограниченность f_1 и f_2 . В силу леммы 2.2, u_x, u_y, v_x, v_y также ограничены.

Соотношения (2.2), (2.3) дают возможность заключить, что в \bar{Q} будут ограничены $N_1, N_2, N_{12}, N_1^*, N_2^*, N_{12}^*$. Таким образом, из (2.76) и (2.70) заключаем:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [D (\nabla^2 \tilde{w})^2 + \tilde{w}_t^2] d\Omega \leq c_{23} \int_0^T \int_{\Omega} [N_{10} w_{0xx} - N_{10}^* w_{0xx}^* + N_{20} w_{0yy} - N_{20}^* w_{0yy}^* + \\ + 2N_{120} w_{0xy} - 2N_{120}^* w_{0xy}^* + k_1 (N_{10} - N_{10}^*) + k_2 (N_{20} - N_{20}^*)]^2 d\Omega dt \leq \\ \leq c_{23} \int_0^T \int_{\Omega} [(w_{0xx} - w_{0xx}^*)^2 + (w_{0yy} - w_{0yy}^*)^2 + 2(w_{0xy} - w_{0xy}^*)^2 + \\ + (N_{10} - N_{10}^*)^2 + (N_{20} - N_{20}^*)^2] d\Omega dt. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Далее, используя (2.2), (2.3), (2.30), можно получить оценку:

$$\int_0^T \int_{\Omega} (N_{10} - N_{10}^*)^2 d\Omega dt \leq c_{24} \int_0^T \int_{\Omega} (\tilde{w}_{xx}^2 + \tilde{w}_{yy}^2 + 2\tilde{w}_{xy}^2) d\Omega dt \quad (2.78)$$

и аналогичные оценки для $N_{20} - N_{20}^*$, $N_{120} - N_{120}^*$.

Из (2.77), (2.78) следует:

$$\int_{\Omega} [D(\nabla^2 \tilde{w})^2 + \tilde{w}_i^2] d\Omega \leq c_{25} [\|\tilde{w}_{xx}\|_{L_{2Q}}^2 + \|\tilde{w}_{yy}\|_{L_{2Q}}^2 + 2\|\tilde{w}_{xy}\|_{L_{2Q}}^2] D. \quad (2.79)$$

Из (2.79) получаем *:

$$\|\tilde{w}_{xx}\|_{L_{2Q}}^2 + \|\tilde{w}_{yy}\|_{L_{2Q}}^2 + 2\|\tilde{w}_{xy}\|_{L_{2Q}}^2 \leq c_{25} T [\|\tilde{w}_{xx}\|_{L_{2Q}}^2 + \|\tilde{w}_{yy}\|_{L_{2Q}}^2 + 2\|\tilde{w}_{xy}\|_{L_{2Q}}^2]. \quad (2.80)$$

При достаточно малом T соотношение (2.80) возможно только в случае, если \tilde{w} почти всюду в Q есть ноль. Очевидно, этим доказана единственность обобщенного решения в B , каково бы ни было T .

Сформулируем полученные в настоящем параграфе результаты.

ТЕОРЕМА III. Пусть полая оболочка занимает в плане конечную область Ω , ограниченную контуром Γ класса $\Lambda_2(t, \lambda)$. Пусть, далее,

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 g)^2 d\Omega < \infty, \quad \int_{\Omega} h^2 d\Omega < \infty, \quad \int_0^T \|F\|_{H_{1\Omega}}^2 dt < \infty.$$

В этом случае уравнения движения оболочки при больших прогибах (2.2), (2.3), (2.8), (2.9), (2.10) при начальных условиях (2.11), (2.11') и граничных условиях (2.6), (2.7) имеют по меньшей мере одно обобщенное решение в смысле (2.66), (2.67).

Если $\Gamma \in \Lambda_3(t, \lambda)$, то множество $B \subset H_{3Q}$ таких функций w , что w_{xx} , w_{yy} , w_{xy} ограничены в \bar{Q} , содержит не более одного обобщенного решения нашей задачи.

ТЕОРЕМА IV. В условиях теоремы III для приближенного построения решения применим метод Бубнова — Галеркина в следующей форме. Приближенное решение w_m ищем в виде:

$$w_m = \sum_{n=1}^m q_{mn} \psi_n,$$

где ψ_m — некоторая полная в $H_{2\Omega}$ система, ортонормированная в $H_{1\Omega}$. Из уравнений (2.8), (2.9) при граничных условиях (2.7) выражаем u_m, v_m через q_{mn} . После этого уравнение (2.10) удовлетворяем по Бубнову — Галеркину. При этом оказываются справедливыми следующие факты:

а) при любом m основные дифференциальные уравнения метода для определения q_{mn} разрешимы на всем отрезке $[0, T]$;

* При этом учтено, что если $w \in H_{3Q}$, то

$$\int_0^T \int_{\Omega} (\nabla^2 w)^2 d\Omega dt = \int_0^T \int_{\Omega} (w_{xx}^2 + 2w_{xy}^2 + w_{yy}^2) d\Omega dt.$$

б) совокупность приближенных решений w_m слабо компактна в H_{3Q} ;
 в) каждый слабый предел w_m в H_{3Q} есть обобщенное решение нашей задачи в смысле (2.66), (2.67).

Замечание 1. Условие непрерывной дифференцируемости в $\bar{\Omega}$ k_1 и k_2 не является необходимым. Все сформулированные в теоремах III, IV факты остаются в силе, если $k_1, k_2 \in w_2^{(1)}$.

Замечание 2. Теоремы III, IV могут быть доказаны и в ряде других случаев закрепления оболочки.

Оболочка может быть, например, заделана так, что поперечные перемещения и углы поворота на контуре будут равны нулю, но продольные перемещения на контуре могут быть ничем не стеснены. Наконец, оболочка может быть шарнирно оперта и на контуре могут обращаться в ноль либо продольные перемещения, либо продольные усилия.

§ 3

Рассмотрим вопрос о существовании обобщенных решений для уравнений нелинейных колебаний пологой оболочки с учетом инерции продольных движений.

Пусть выполнены граничные условия (2.6), (2.7).

В качестве начальных условий примем следующие:

$$u|_{t=0} = g_1(P), \quad v|_{t=0} = g_2(P), \quad w|_{t=0} = g_3(P), \quad (3.1)$$

$$u_t|_{t=0} = h_1(P), \quad v_t|_{t=0} = h_2(P), \quad w_t|_{t=0} = h_3(P). \quad (3.2)$$

Основной системой уравнений будет система (2.1)–(2.5). Здесь мы уже не будем сводить нашу систему к одному уравнению, а будем исследовать уравнения (2.1), (2.4), (2.5) непосредственно.

Под $H_{1\Omega}$ будем понимать в соответствии с п. 1 § 1 множество вектор-функций $\bar{\omega}$ с составляющими u, v, w , которые суммируемы с квадратом в Ω .

E_1 есть подмножество из $H_{1\Omega}$ вектор-функций $\bar{\omega}$, равных нулю в пограничной полосе Ω , у которых u, v имеют в Ω непрерывные вторые производные по x, y ; w имеет непрерывные в Ω четвертые производные по x, y .

Оператор $A_1 \bar{\omega}$ переводит каждую функцию $\bar{\omega} \in E_1$ в вектор-функцию с составляющими

$$-\Delta u - \frac{1+\mu}{1-\mu} \theta_x, \quad -\Delta v - \frac{1+\mu}{1-\mu} \theta_y, \quad D\nabla^4 w. \quad (3.3)$$

Введем на E_1 скалярное произведение

$$\begin{aligned} & (\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2)_{H_{2\Omega}} = \\ & = \int_{\Omega} \left[\left(-\Delta u_1 - \frac{1+\mu}{1-\mu} \theta_{1x} \right) u_2 + \left(-\Delta v_1 - \frac{1+\mu}{1-\mu} \theta_{1y} \right) v_2 + D\nabla^4 w_1 \cdot w_2 \right] d\Omega. \end{aligned} \quad (3.4)$$

$H_{2\Omega}$ есть в нашем случае замыкание E_1 в норме (3.4). $H_{2\Omega}$ содержит вектор-функции, у которых составляющие u, v имеют в Ω обобщенные первые производные, суммируемые с квадратом, а w имеет в Ω обобщенные производные второго порядка, также суммируемые с квадратом.

Рассмотрим множество вектор-функций $\bar{\omega}(u, v, w)$, зависящих от параметра t так, что при каждом t из $[0, T]$ $\bar{\omega} \in E_1$, $\bar{\omega}_t \in C_{\bar{\Omega}}$ и, кроме того, $\bar{\omega}$ как элемент $H_{2\Omega}$, $\bar{\omega}_t$ как элемент $H_{1\Omega}$ непрерывны на $[0, T]$. Это множество есть E_2 . Введем на E_2 скалярное произведение

$$(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2)_{H_{3Q}} = \int_0^T [(\bar{\omega}_{1t}, \bar{\omega}_{2t})_{H_{1\Omega}} + (\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2)_{H_{2\Omega}}] dt. \quad (3.5)$$

Замыкание E_2 в норме (3.5) есть H_{3Q} . H_{3Q} содержит вектор-функции $\bar{\omega}(u, v, w)$, у которых $u_x, u_y, v_x, v_y, w_{xx}, w_{xy}, w_{yy}, u_t, v_t, w_t \in L_{2Q}$.

D^0 есть в данном случае замыкание в норме (3.5) множества D^* вектор-функций $\bar{\omega} \in E_2$ и равных нулю для $T - \delta \leq t \leq T$, где δ — некоторое число, определенное для каждой вектор-функции из D^* .

Оператор $A_2 \bar{\omega}$ для нашей системы имеет составляющие:

$$\begin{aligned} & -\frac{2}{1-\mu} [(k_1 w)_x + w_x w_{xx} + \mu (k_2 w)_x + \mu w_y w_{xy}] + w_{xy} w_y + w_x w_{yy}, \\ & -\frac{2}{1-\mu} [(k_2 w)_y + w_y w_{yy} + \mu (k_1 w)_y + \mu w_x w_{xy}] + w_{xy} w_x + w_y w_{xx}, \\ & -\frac{\partial}{\partial x} (N_1 w_x) - \frac{\partial}{\partial y} (N_{12} w_x) - \frac{\partial}{\partial y} (N_2 w_y) - \frac{\partial}{\partial x} (N_{12} w_y) - N_1 k_1 - N_2 k_2. \end{aligned}$$

Проверим выполнение всех условий теорем I и II § 1.

Выполнение условия 1) следует из результатов работы (8).

Условие 2) выполняется очевидным образом.

Условие 3) также выполняется, что легко проверить с помощью вариационных методов в силу симметричности и положительной определенности $A_1 \bar{\omega}$ [см. (8)].

Проверим выполнение условий 4) и 5).

Рассмотрим функционал

$$\begin{aligned} I(\bar{\omega}_0, \bar{\omega}_1) = & \int_0^T \int_{\Omega} (u_{0t} u_{1t} + v_{0t} v_{1t} + w_{0t} w_{1t} + u_{0x} u_{1x} + \\ & + v_{0x} v_{1x} + w_{0x} w_{1x} + u_{0y} u_{1y} + v_{0y} v_{1y} + w_{0y} w_{1y}) d\Omega dt. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Этот функционал является линейным относительно $\bar{\omega}_1$ и H_{3Q} , если закрепить $\bar{\omega}_0$.

Заметим, что для всех $\bar{\omega} \in H_{3Q}$ имеет место неравенство

$$\int_0^T \int_{\Omega} (u_t^2 + v_t^2 + w_t^2 + u_x^2 + v_x^2 + w_x^2 + u_y^2 + v_y^2 + w_y^2) d\Omega dt \leq c_{26} \|\bar{\omega}\|_{H_{3Q}}^2. \quad (3.7)$$

В самом деле, если $\bar{\omega} \in E_2$, то неравенство (3.7) есть прямое следствие

неравенства Корна и теоремы вложения [см. (10)]. Далее, если $\bar{\omega}$ есть произвольная вектор-функция из H_{3Q} , то существует последовательность $\bar{\omega}_n \in E_2$ такая, что для всех $\bar{\omega}_n$ имеет место неравенство (3.7) при одной и той же постоянной c_{26} , и $\bar{\omega}_n \rightarrow \bar{\omega}$ в H_{3Q} . Но если $\bar{\omega}_n \Rightarrow \bar{\omega}$ в H_{3Q} , то, очевидно, и

$$\lim \int_0^T \int_{\Omega} (u_{nt}^2 + v_{nt}^2 + w_{nt}^2 + u_{nx}^2 + v_{nx}^2 + w_{nx}^2 + u_{ny}^2 + v_{ny}^2 + w_{ny}^2) d\Omega dt |_{n \rightarrow \infty} = \int_0^T \int_{\Omega} (u_t^2 + v_t^2 + w_t^2 + u_x^2 + v_x^2 + w_x^2 + u_y^2 + v_y^2 + w_y^2) d\Omega dt. \quad (3.8)$$

А в этом случае неравенство (3.7) не может не выполняться и для предельной функции $\bar{\omega}$. После установления этого факта из (3.6) легко получить, что

$$|I| \leq c_{27} \|\bar{\omega}_0\|_{H_{3Q}} \cdot \|\bar{\omega}_1\|_{H_{3Q}}, \quad (3.9)$$

чем и доказана линейность функционала I .

Таким образом, если $\bar{\omega}_n \xrightarrow{\text{сл}} \bar{\omega}_0$ в H_{3Q} , то $\bar{\omega}_n \xrightarrow{\text{сл}} \bar{\omega}_0$ в пространстве B_1 с нормой

$$(\|\bar{\omega}_x\|_{L_{2Q}}^2 + \|\bar{\omega}_y\|_{L_{2Q}}^2 + \|\bar{\omega}_z\|_{L_{2Q}}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Однако, в силу теоремы вложения, $\bar{\omega}_n$ при этом будет сильно сходиться в $H_{1\Omega}$, причем равномерно относительно $0 \leq t \leq T$. Следовательно, условие 4) выполнено.

Функционал Φ в данном случае дается формулой (2.36), однако здесь уже $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}$ следует считать выраженными непосредственно через u, v, w по формулам (2.3). Проверим для Φ выполнение условия 6). Неотрицательность Φ нами уже проверялась. Пусть теперь

$$\Phi < r. \quad (3.10)$$

Тогда из (3.10) будет следовать:

$$\|w\|_{H_{2\Omega}}^2 \leq 2r, \quad (3.11)$$

$$\int_{\Omega} \varepsilon_1^2 d\Omega \leq \frac{2r(1-\mu^2)}{Eh}, \quad \int_{\Omega} \varepsilon_2^2 d\Omega \leq \frac{2r(1-\mu^2)}{Eh}, \quad \int_{\Omega} \varepsilon_{12}^2 d\Omega \leq \frac{2r(1-\mu^2)}{Eh}. \quad (3.12)$$

Рассмотрим более подробно первое из неравенств (3.12). Мы имеем:

$$\int_{\Omega} \left(u_x + k_1 w + \frac{1}{2} w_x^2 \right)^2 d\Omega \leq \frac{2r(1-\mu^2)}{Eh}. \quad (3.13)$$

Поскольку, в силу (3.11), справедливы неравенства

$$\int_{\Omega} w^2 d\Omega \leq c_{28} r, \quad \int_{\Omega} w_x^2 d\Omega \leq c_{29} r^2, \quad (3.14)$$

то из (3.13) вытекает:

$$\int_{\Omega} u_x^2 d\Omega \leq c_{30} \cdot r. \quad (3.15)$$

Совершенно аналогично доказываются неравенства:

$$\int_{\Omega} v_y^2 d\Omega \leq c_{31} r, \quad \int_{\Omega} (u_y + v_x)^2 d\Omega \leq c_{32} \cdot r. \quad (3.16)$$

Неравенства (3.15), (3.16), (3.11) приводят к оценке

$$\|\bar{\lambda}\|_{H_{3\Omega}} \leq c_{33} \cdot r,$$

что и доказывает выполнение условия 6).

Покажем, что для Φ выполнено условие (1.14). Пусть $\bar{\omega}_0, \bar{\omega}_1 \in H_{2\Omega}$. Рассмотрим $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}$, соответствующие $\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_1$. Мы имеем:

$$\varepsilon_1 \{\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_1\} = \varepsilon_{10} + \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12}, \quad (3.17)$$

где ε_{10} соответствует $\bar{\omega}_0$, ε_1 — некоторый линейный оператор над $\bar{\omega}_1$, ε_{12} — некоторый полилинейный оператор второй степени над $\bar{\omega}_1$. Аналогичное разбиение имеем и для ε_1 и ε_{12} .

Далее,

$$\Phi(\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_1) - \Phi(\bar{\omega}_0) = \int_{\Omega} \{D\nabla^2 w_0 \cdot \nabla^2 w_1 + N_{10}\varepsilon_{11} + N_{20}\varepsilon_{21} + N_{120}\varepsilon_{121}\} d\Omega + \alpha(\bar{\omega}_0, \bar{\omega}_1), \quad (3.18)$$

где $\alpha = \|\bar{\omega}_0\|_{H_{2\Omega}}^2 + \beta$, а β определяется формулой (2.39). Чтобы убедиться в справедливости (1.14), достаточно, как и в предыдущем случае, оценить β . Для этого определим в соответствии с (3.17) ε_{11} и ε_{12} :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= u_{1x} + k_1 w_1 + w_{0x} w_{1x}, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} w_{1x}^2. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Из (3.19) видно, что если $\bar{\omega}_0, \bar{\omega}_1 \in H_{2\Omega}$, то

$$\|\varepsilon_{11}\|_{L_{2\Omega}}^2 \leq c_{34} \|\bar{\omega}_1\|_{H_{2\Omega}}^2, \quad \|\varepsilon_{12}\| \leq c_{35} \cdot \|\bar{\omega}_1\|_{H_{2\Omega}}^2. \quad (3.20)$$

Аналогичные оценки оказываются справедливыми для $\varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{121}, \varepsilon_{122}$. Используя (3.20), легко установить справедливость соотношения (1.14).

Рассмотрим более подробно линейный относительно $\bar{\omega}_1$ член формулы (3.18). Он может быть представлен в следующем виде:

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_{\Omega} \{D\nabla^2 w_0 \cdot \nabla^2 w_1 + [N_{10}(u_{1x} + k_1 w_1 + w_{0x} w_{1x}) + \\ &+ N_{20}(v_{1y} + k_2 w_1 + w_{0y} w_{1y}) + N_{120}(u_{1y} + v_{1x} + w_{0x} w_{1y} + w_{0y} w_{1x})]\} d\Omega. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Введем на $H_{2\Omega}$ нелинейный оператор $A_3 \bar{\omega}_0$, ставящий в соответствие каждой вектор-функции $\bar{\omega}$ шестимерный вектор с составляющими $N_{10}, N_{20}, N_{120}, N_{10}k_1 + N_{20}k_2, N_{10}w_{0x} + N_{120}w_{0y}, N_{120}w_{0x} + N_{20}w_{0y}$, и линейный оператор $A_4 \bar{\omega}_1$, ставящий в соответствие $\bar{\omega}_1$ шестимерный вектор с составляющими

$$u_{1x}, \quad v_{1y}, \quad u_{1y} + v_{1x}, \quad w_1, \quad w_{1x}, \quad w_{1y}.$$

При помощи операторов A_3 и A_4 можно определить обобщенное решение нашей задачи как вектор-функцию $\bar{\omega} \in H_{3Q}$, удовлетворяющую интегральному соотношению:

$$\int_0^T \left\{ -(\bar{\omega}_0, \bar{\omega}_1)_{H_{1\Omega}} + (\bar{\omega}_0, \bar{\omega}_1)_{H_{2\Omega}} + \int_{\Omega} \left[\left(k_1 w_0 + \frac{1}{2} w_{0x}^2 \right) u_{1x} + \left(k_2 w_0 + \frac{1}{2} w_{0y}^2 \right) v_{1y} + \right. \right. \\ \left. + w_{0x} \cdot w_{0y} (u_{1y} + v_{1x}) + (N_{10} k_1 + N_{20} k_2) w_1 + (N_{10} w_{0x} + N_{120} w_{0y}) w_{1x} + \right. \\ \left. + (N_{120} w_{0x} + N_{20} w_{0y}) w_{1y} \right] d\Omega - (\bar{F}, \bar{\omega})_{H_{1\Omega}} \Big\} dt - \int_{\Omega} \bar{h} \bar{\omega} d\Omega |_{t=0} = 0 \quad (3.22)$$

для любой вектор-функции $\bar{\omega}_1 \in D^0$ и начальному условию (3.1) следующим образом:

$$\lim \| \bar{g} - \bar{\omega} \|_{H_{1\Omega}} |_{t \rightarrow 0} = 0. \quad (3.23)$$

Проверим, что для $A_3 \bar{\omega}_0$ выполнено условие (1.23). Пусть $\bar{\omega}_n \xrightarrow{\text{с.л.}} \bar{\omega}_0$ в H_{3Q} . Имеем:

$$I_0 - I_n = \int_0^T \int_{\Omega} \{ D (\nabla^2 w_0 - \nabla^2 w_n) \nabla^2 w_1 + [(N_{10} - N_{1n}) \varepsilon_{11} + \\ + (N_{20} - N_{2n}) \varepsilon_{21} + (N_{120} - N_{12n}) \varepsilon_{121}] \} d\Omega dt = G_1 + G_2, \quad (3.24)$$

где

$$G_1 = \int_0^T \int_{\Omega} [D (\nabla^2 w_0 - \nabla^2 w_n) \nabla^2 w_1 + (u_{0x} + k_1 w_0 - u_{nx} - k_1 w_n) \varepsilon_{11} + \\ + (v_{0y} - v_{ny} + k_2 w_0 - k_2 w_n) \varepsilon_{21} + (u_{0y} + v_{0x} - u_{ny} - v_{nx}) \varepsilon_{121}] d\Omega dt, \quad (3.25)$$

$$G_2 = \int_0^T \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} (w_{0x}^2 - w_{nx}^2) \varepsilon_{11} + \frac{1}{2} (w_{0y}^2 - w_{ny}^2) + (w_{0x} w_{0y} - w_{nx} w_{ny}) \varepsilon_{121} \right] d\Omega dt. \quad (3.26)$$

Из (3.25) и (3.26) легко усмотреть, что при $n \rightarrow \infty$ G_1 и $G_2 \rightarrow 0$. В самом деле, G_1 есть линейный в H_{3Q} функционал относительно $\bar{\omega}_0 - \bar{\omega}_n$. Далее, в силу того, что $\bar{\omega}_n \xrightarrow{\text{с.л.}} \bar{\omega}_0$ в H_{3Q} , $w_{nx} \Rightarrow w_{0x}$, $w_{ny} \Rightarrow w_{0y}$ в L_{4Q} , а $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{121} \in L_{2Q}$. Точно так же легко проверяется выполнение условия (1.22).

Таким образом, все условия теоремы I § 1 выполнены, вследствие чего можно утверждать существование обобщенного решения нашей задачи и возможность его нахождения с помощью метода Бубнова — Галеркина.

Если ввести множество B вектор-функций $\bar{\omega} \in H_{3Q}$ таких, что $u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, v_{xx}, v_{xy}, v_{yy}, w_{xx}, w_{xy}, w_{yy}$ ограничены в \bar{Q} , то легко доказать, что B не может содержать более одного обобщенного решения нашей задачи.

Заметим, что как в § 2, так и в настоящем параграфе мы не формулируем дополнительных условий, которые нужно было бы наложить на $\Gamma, \bar{F}, \bar{g}, \bar{h}$, чтобы каждое обобщенное решение нашей задачи принадлежало B . Этот вопрос есть частный случай более общего вопроса о степени гладкости решения нашей задачи, в зависимости от гладкости

контура, начальных данных, правой части и их согласования. Поэтому он должен быть разрешен отдельно.

Результаты настоящего параграфа можно сформулировать в виде двух теорем.

ТЕОРЕМА V. Пусть полая оболочка занимает в плане конечную область Ω , ограниченную контуром Γ класса $\Lambda_2(m, \lambda)$. Пусть, далее,

$$\|\bar{g}\|_{H_{2\Omega}} < \infty, \quad \|\bar{h}\|_{H_{1\Omega}} < \infty, \quad \int_0^T \|\bar{F}\|_{H_{1\Omega}}^2 dt < \infty.$$

В этом случае уравнения движения оболочки (2.1)–(2.5) при граничных условиях (2.6), (2.7) и начальных условиях (3.1), (3.2) имеют по меньшей мере одно обобщенное решение в смысле (3.22), (3.23). При этом множество B вектор-функций $\bar{\omega} \in H_{3Q}$, у которых $u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, v_{xx}, v_{xy}, v_{yy}, w_{xx}, w_{xy}, w_{yy}$ ограничены в \bar{Q} , содержит не более одного обобщенного решения нашей задачи.

ТЕОРЕМА VI. В условиях теоремы V для приближенного построения обобщенного решения применим метод Бубнова — Галеркина в следующей форме. Приближенное решение ищется в виде

$$\bar{\omega}_m = \sum_{n=1}^m q_{mn} \bar{\psi}_n,$$

где $\bar{\psi}_n$ — некоторая полная в $H_{2\Omega}$ система, ортонормированная в $H_{1\Omega}$, а для q_{mn} получается система уравнений, если удовлетворить уравнения (2.1), (2.4), (2.5) по Бубнову — Галеркину в соответствии с (1.20). При этом оказываются справедливыми следующие факты:

а) При любом t основные дифференциальные уравнения метода для определения q_{mn} разрешимы на всем отрезке $[0, T]$.

б) Совокупность приближенных решений $\bar{\omega}_m$ слабо компактна в H_{3Q} .

в) Каждый слабый предел $\bar{\omega}_m$ в H_{3Q} есть обобщенное решение нашей задачи в смысле (3.22), (3.23).

Замечание 1. В условиях данного параграфа справедливы замечания 1 и 2 § 2.

Автор искренне благодарит О. А. Ладыженскую, С. М. Никольского, С. Г. Крейна, ознакомившихся с рукописью работы и сделавших ряд важных замечаний.

Поступило

8. III. 1956

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Ладыженская О. А., Смешанная задача гиперболического уравнения, ГИТТЛ, Москва, 1953.
- 2 Вишик М. И., Смешанные краевые задачи для систем дифференциальных уравнений, содержащих вторую производную по времени, и приближенный метод их решения, Доклады Ак. наук СССР, 100, № 3 (1955), 409—412.
- 3 Ладыженская О. А., О решении нестационарных операторных уравнений различных типов, Доклады Ак. наук СССР, 102, № 2 (1955), 207—210.
- 4 В а ж е в с к и й Т., Связь между приемом математической постановки физических задач и понятием обобщенного решения дифференциальных уравнений

- с частными производными второго порядка, Бюллетень Польской Ак. наук, Отд. III, 1, 3, 4 (1953), 75—78.
- ⁵ Н о р f Е., Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen, Math. Nachr., 4 (1950), 213—231.
- ⁶ В л а с о в В. З., Общая теория оболочек, М. —Л., 1949.
- ⁷ Б о л о т и н В. В., Некоторые нелинейные задачи динамической устойчивости пластинок, Известия Ак. наук СССР, ОТН, 10 (1954), 47—59.
- ⁸ М и х л и н С. Г., Прямые методы в математической физике, ГИТТЛ, М. —Л., 1950.
- ⁹ М и х л и н С. Г., Проблема минимума квадратичного функционала, ГИТТЛ, М. —Л., 1952.
- ¹⁰ С о б о л е в С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд. Ленингр. гос. университета им. А. А. Жданова, 1950.
- ¹¹ Н и к о л ь с к и й С. М., К вопросу о решении полигармонического уравнения вариационным методом, Доклады Ак. наук СССР, 88, № 3 (1953), 409—413.
- ¹² Б а б и ч В. М., К вопросу о распространении функций, Успехи математических наук, т. VIII, вып. 2 (54) (1953), 111—114.
- ¹³ Н и к о л ь с к и й С. М., Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных, Труды Математ. ин-та им. В. А. Стеклова Ак. наук СССР, XXXVIII (1951), 244—278.
- ¹⁴ Г ю н т е р Н. М., Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики, Москва, ГИТТЛ, 1953.
-

А. В. ШТРАУС

ОБ ОБОБЩЕННЫХ РЕЗОЛЬВЕНТАХ И СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ЧЕТНОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым)

В работе рассматривается симметрический обыкновенный дифференциальный оператор L четного порядка с минимальной областью определения. Концы промежутка в общем случае сингулярны. Устанавливаются формулы всех обобщенных резольвент и всех спектральных функций оператора L .

В большинстве работ, посвященных спектральным функциям симметрических (в общем случае несамосопряженных) обыкновенных дифференциальных операторов четного порядка, рассматриваются лишь ортогональные спектральные функции. Как известно, каждая такая спектральная функция соответствует некоторому самосопряженному расширению данного симметрического оператора и приводит к разложению по собственным функциям краевой задачи, определяемой этим расширением.

Настоящая работа имеет своей основной целью построение формулы всех спектральных функций (ортогональных и неортогональных) обыкновенного симметрического дифференциального оператора L любого четного порядка с минимальной областью определения.

Для решения поставленной задачи мы строим сначала формулу всех обобщенных резольвент R_λ оператора L . При этом мы основываемся на формуле обобщенных резольвент произвольного симметрического оператора в том виде, в каком она была установлена в работе (8). Любая обобщенная резольвента R_λ оказывается интегральным оператором.

При построении ядра обобщенной резольвенты R_λ существенную роль играет матричная функция $M(\lambda)$, называемая нами характеристической матрицей обобщенной резольвенты. После того как установлены некоторые свойства матрицы $M(\lambda)$, применение к обобщенной резольвенте формулы обращения Стильтьеса позволяет довольно легко получить формулу всех спектральных функций оператора L^* .

Используемый в работе метод нахождения всех спектральных функций оператора L заслуживает внимания и тогда, когда ограничиваются

* Для частного случая, когда L есть дифференциальный оператор 2-го порядка с индексом дефекта (1.1) на промежутке $[0, +\infty)$, эти вопросы были нами решены в работе (9). Еще ранее, в своей работе (4) М. Г. Крейн отметил, что его методы позволяют указать правило определения всех спектральных функций дифференциального оператора любого четного порядка на промежутке $[0, +\infty)$. Один частный результат для оператора 2-го порядка был в дальнейшем опубликован [см. (5)].

рассмотрением лишь ортогональных спектральных функций. Этот метод представляется тем более естественным, что даже в тех случаях, когда существование разложения по собственным функциям установлено каким-либо иным способом, к резольвенте приходится обычно обращаться при фактическом нахождении спектральной функции распределения [см., например, (6) § 21].

§ 1. Самосопряженное дифференциальное выражение и дифференциальные операторы

1. Пусть $l[y]$ — обыкновенное самосопряженное дифференциальное выражение четного порядка $2n$ с вещественными коэффициентами, заданными в конечном или бесконечном промежутке (a, b) . Как известно, $l[y]$ можно представить в виде:

$$l[y] = p_n y - \frac{d}{dx} \left\{ p_{n-1} \frac{dy}{dx} - \frac{d}{dx} \left[p_{n-2} \frac{d^2 y}{dx^2} - \dots - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{d}{dx} \left(p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} - \frac{d}{dx} \left(p_0 \frac{d^n y}{dx^n} \right) \right) \right] \right\}.$$

Как обычно, будем предполагать, что функции

$$p_0^{-1}(x), p_1(x), \dots, p_n(x) \quad (1.1)$$

измеримы в промежутке (a, b) и суммируемы в каждом замкнутом конечном промежутке $[a_1, b_1] \subset (a, b)$.

Если a конечно и функции (1.1) суммируемы в промежутке $[a, b_1] \subset \subset [a, b]$, то конец a называется регулярным. Аналогично определяется регулярность конца b . Условимся регулярные концы включать в промежутки (a, b) , не заменяя при этом в обозначениях круглых скобок квадратными.

Выражение $l[y]$ называется регулярным, если оба конца рассматриваемого промежутка (a, b) регулярны. В противном случае оно называется сингулярным. В настоящей работе выражение $l[y]$ не предполагается регулярным, за исключением тех случаев, когда регулярность особо оговаривается.

Так называемые квазипроизводные, соответствующие выражению $l[y]$, определяются, как известно, формулами:

$$y^{[k]} = \frac{d^k y}{dx^k} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1),$$

$$y^{[n]} = p_0 \frac{d^n y}{dx^n},$$

$$y^{[n+k]} = p_k \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} - \frac{d}{dx} (y^{[n+k-1]}) \quad (k = 1, 2, \dots, n);$$

кроме того, полагают

$$y^{[0]} = y.$$

Таким образом,

$$l[y] = y^{[2n]}.$$

Выражение $l[y]$ имеет естественный смысл для всякой функции $y(x)$, которая абсолютно непрерывна вместе со своими квазипроизводными до $(2n-1)$ -го порядка включительно в каждом конечном промежутке $[a_1, b_1] \subset (a, b)$.

Для любой пары таких функций $y(x)$, $z(x)$ справедливо так называемое тождество Лагранжа:

$$l[y] \bar{z} - y l[\bar{z}] = \frac{d}{dx} [y, z],$$

где

$$[y, z] = \sum_{k=1}^n (y^{[k-1]} \bar{z}^{[2n-k]} - y^{[2n-k]} \bar{z}^{[k-1]}).$$

Каждой функции $y(x)$, для которой $l[y]$ имеет смысл, поставим в соответствие векторную функцию

$$\hat{y}(x) = (y^{[0]}(x), y^{[1]}(x), \dots, y^{[2n-1]}(x)),$$

которую будем рассматривать как одностолбцевую матричную функцию

Введем в рассмотрение ортогональную кососимметрическую порядка $2n$ матрицу

$$J = \begin{vmatrix} & & & & -1 \\ & & & & -1 \\ & & & \ddots & \\ & & -1 & & \\ & & \ddots & & \\ & 1 & & & \\ & \ddots & & & \\ 1 & & & & \end{vmatrix},$$

все неотмеченные элементы которой суть нули.

Условимся во всем дальнейшем операцию транспонирования матрицы обозначать штрихом', а операцию перехода к сопряженной матрице — звездочкой*.

Мы имеем:

$$J' = J^* = J^{-1} = -J.$$

Тождество Лагранжа можно теперь переписать в виде

$$l[y] \bar{z} - y l[\bar{z}] = \frac{d}{dx} (\hat{z}^* J \hat{y}). \quad (1.2)$$

Пусть y_1, y_2, \dots, y_r — какая-либо система функций, для которых выражение $l[y]$ имеет смысл. Матрицей квазипроизводных, соответствующей

щей этой системе, будем называть матрицу

$$Y = \left\| \begin{array}{cccc} y_1^{[0]} & y_2^{[0]} & \dots & y_p^{[0]} \\ y_1^{[1]} & y_2^{[1]} & \dots & y_p^{[1]} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{[2n-1]} & y_2^{[2n-1]} & \dots & y_p^{[2n-1]} \end{array} \right\| = \|\hat{y}_1 \hat{y}_2 \dots \hat{y}_p\|.$$

Пусть z_1, z_2, \dots, z_p — еще одна произвольная система функций, для которых $l[z]$ имеет смысл, а Z — соответствующая матрица квазипроизводных.

Из (1.2) легко вытекает матричное тождество:

$$\|l[y_k] \bar{z}_j\|_1^p = \|y_k l[\bar{z}_j]\|_1^p = \frac{d}{dx} (Z^* J Y)^*. \quad (1.3)$$

2. Рассмотрим дифференциальные операторы, порождаемые в гильбертовом пространстве $L^2(a, b)$ дифференциальным выражением $l[y]$.

Пусть D — линейное многообразие тех функций $y(x)$ из $L^2(a, b)$, для которых $l[y]$ имеет смысл и также принадлежит $L^2(a, b)$.

Так называемый дифференциальный оператор L с минимальной областью определения, порожденный дифференциальным выражением $l[y]$, определяется формулой

$$Ly = l[y]$$

на линейном многообразии D_L тех функций $y(x) \in D$, которые удовлетворяют условию

$$(l[y], z) = (y, l[z]),$$

какова бы ни была функция $z(x) \in D$.

Принимая во внимание тождество Лагранжа (1.2),^{*} можно область определения D_L оператора L охарактеризовать как многообразие тех функций $y(x) \in D$, которые для любой функции $z(x) \in D$ удовлетворяют условию:

$$\hat{z}^*(x) J \hat{y}(x) \Big|_a^b = 0.$$

Как известно, линейное многообразие D_L плотно в $L^2(a, b)$, а оператор L является замкнутым и симметрическим.

Оператор L^* , сопряженный с L , имеет своей областью определения многообразие D , причем для любой функции $y \in D$

$$L^* y = l[y].$$

^{*} j обозначает номер строки, а k — номер столбца. Отметим, что обе формулы (1.2), (1.3) лишь несущественно отличаются от соответствующих записей тождества Лагранжа в работе С. А. Орлова (7).

3. При любом не вещественном λ обозначим через \mathfrak{N}_λ соответствующее дефектное подпространство оператора L , т. е. линейное многообразие всех решений уравнения

$$L^* y - \bar{\lambda} y = 0.$$

Как известно, размерность m подпространства \mathfrak{N}_λ одинакова для всех не вещественных λ ; ее называют дефектным числом оператора L . При этом $0 \leq m \leq 2n$.

Зафиксируем какое-либо не вещественное число λ_0 . Пусть F — линейный оператор, отображающий \mathfrak{N}_{λ_0} в $\mathfrak{N}_{\lambda_0}^*$. Квасисамосопряженным расширением оператора L , определяемым [оператором F , называется оператор L_F , являющийся частью оператора L^* и имеющий своей областью определения линейное многообразие D_{L_F} элементов g вида

$$g = f + F\psi - \psi,$$

где

$$f \in D_L, \quad \psi \in \mathfrak{N}_{\lambda_0}^*.$$

Рассмотрим сопряженный с F оператор F^* , отображающий $\mathfrak{N}_{\lambda_0}^*$ в \mathfrak{N}_{λ_0} , и соответствующее квазисамосопряженное расширение L_{F^*} оператора L . Нетрудно видеть, что операторы L_F и L_{F^*} являются взаимно сопряженными.

Охарактеризуем область определения оператора L_F при помощи крайних условий.

Пусть

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x) \quad (1.4)$$

— какой-либо ортонормированный базис дефектного подпространства $\mathfrak{N}_{\lambda_0}^*$, а

$$\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_m(x) \quad (1.5)$$

— ортонормированный базис в \mathfrak{N}_{λ_0} .

Пусть в этих базисах оператору F соответствует матрица

$$\Omega = \|\omega_{jk}\|_1^m,$$

так что

$$F\psi_k = \sum_{j=1}^m \omega_{jk} \varphi_j \quad (k = 1, 2, \dots, m).$$

Введем в рассмотрение систему функций

$$w_k = w_k(x) \quad (k = 1, 2, \dots, m),$$

полагая

$$w_k = F^*\varphi_k - \varphi_k \quad (k = 1, 2, \dots, m),$$

* По поводу общего определения квазисамосопряженного расширения симметрического оператора см., например, (1), стр. 393—397, а также (2), стр. 77—80.

т. е.

$$w_k'(x) = \sum_{j=1}^m \bar{\omega}_{kj} \psi_j(x) - \varphi_k(x) \quad (k = 1, 2, \dots, m). \quad (1.6)$$

Область определения D_{L_F} оператора L_F состоит из всех функций $y(x) \in D$, удовлетворяющих условиям

$$(l[y], w_k) - (y, l[w_k]) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m).$$

В силу тождества Лагранжа (1.2), эту систему условий можно переписать в виде

$$\hat{w}_k^*(x) J \hat{y}(x) \Big|_a^b = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m). \quad (1.7)$$

Пусть $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ и $W(x)$ — матрицы квазипроизводных, составленные из систем функций (1.4), (1.5) и (1.6) соответственно.

Систему условий (1.7) можно теперь записать в виде

$$W^*(x) J \hat{y}(x) \Big|_a^b = 0; \quad (1.8)$$

при этом, согласно (1.6),

$$W^*(x) = \Omega \Psi^*(x) - \Phi^*(x).$$

Итак, D_{L_F} есть совокупность всех функций $y(x)$ из D , которые удовлетворяют краевому условию (1.8).

Отметим в заключение, что если оператор F по норме не превосходит единицы, то при любом не вещественном λ из той же комплексной полуплоскости (верхней или нижней), что и λ_0 , для оператора $L_F - \lambda E$ существует ограниченный обратный, определенный на всем пространстве $L^2(a, b)$ [см. (8), стр. 79, лемма 9].

§ 2. Фундаментальные системы решений уравнения $l[y] - \lambda y = 0$

1. Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение

$$l[y] - \lambda y = 0, \quad (2.1)$$

где λ — произвольное комплексное число.

Пусть $u_1(x; \lambda)$, $u_2(x; \lambda)$, ..., $u_{2n}(x; \lambda)$ — какая-либо фундаментальная система решений уравнения (2.1), а $U(x; \lambda)$ — соответствующая ей матрица квазипроизводных. При любом x ($x \in (a, b)$) матрица $U(x; \lambda)$ имеет обратную.

Тождество (1.3) позволяет заключить, что матрица $U'(x; \lambda) J U(x; \lambda)$ не зависит от x , так что для любых значений x_1, x_2 из промежутка (a, b)

$$U'(x_1; \lambda) J U(x_1; \lambda) = U'(x_2; \lambda) J U(x_2; \lambda). \quad (2.2)$$

Зафиксируем какое-либо значение x_0 в промежутке (a, b) . Пусть

$$y_1(x; \lambda), y_2(x; \lambda), \dots, y_{2n}(x; \lambda)$$

— фундаментальная система решений уравнения (2.1) с матрицей квази-производных $Y(x; \lambda)$, обращающейся при $x = x_0$ в единичную матрицу:

$$Y(x_0; \lambda) = E_{2n}.$$

Такую фундаментальную систему будем называть нормированной в точке x_0 .

Согласно формуле (2.2),

$$Y'(x; \lambda) J Y(x; \lambda) = J$$

при любом x ($x \in (a, b)$). Умножая обе части этого равенства на матрицу $Y(x; \lambda) J$ слева и на $-Y^{-1}(x; \lambda) J$ справа, получим:

$$Y(x; \lambda) J Y'(x; \lambda) = J. \quad (2.3)$$

2. Пусть по-прежнему

$$u_1(x; \lambda), u_2(x; \lambda), \dots, u_{2n}(x; \lambda) \quad (2.4)$$

— какая-либо фундаментальная система решений уравнения (2.1). Как известно, при решении неоднородного уравнения

$$l[y] - \lambda y = f$$

методом вариации произвольных постоянных вводится система функций

$$v_1(x; \lambda), v_2(x; \lambda), \dots, v_{2n}(x; \lambda), \quad (2.5)$$

которая однозначно определяется системой $2n$ уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n} u_k^{[j]}(x; \lambda) v_k(x; \lambda) &= 0 \quad (j = 0, 1, \dots, 2n-2), \\ \sum_{k=1}^{2n} u_k^{[2n-1]}(x; \lambda) v_k(x; \lambda) &= -1. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Эту систему уравнений можно переписать в виде одного матричного уравнения:

$$U(x; \lambda) \begin{pmatrix} v_1(x; \lambda) \\ v_2(x; \lambda) \\ \vdots \\ v_{2n}(x; \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Умножая обе части последнего равенства на матрицу $U'(x; \lambda) J$ слева и принимая во внимание формулу (2.2), получим:

$$U'(x_0; \lambda) J U(x_0; \lambda) \begin{pmatrix} v_1(x; \lambda) \\ v_2(x; \lambda) \\ \vdots \\ v_{2n}(x; \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(x; \lambda) \\ u_2(x; \lambda) \\ \vdots \\ u_{2n}(x; \lambda) \end{pmatrix},$$

откуда

$$\begin{vmatrix} v_1(x; \lambda) \\ v_2(x; \lambda) \\ \vdots \\ v_{2n}(x; \lambda) \end{vmatrix} = [U'(x_0; \lambda) J U(x_0; \lambda)]^{-1} \begin{vmatrix} u_1(x; \lambda) \\ u_2(x; \lambda) \\ \vdots \\ u_{2n}(x; \lambda) \end{vmatrix}; \quad (2.7)$$

x_0 обозначает здесь произвольную фиксированную точку промежутка (a, b) .

Равенство (2.7) показывает, что функции (2.5) также образуют фундаментальную систему решений уравнения (2.1)*; она называется сопряженной по отношению к системе (2.4).

§ 3. Формула обобщенных резольвент оператора L

Согласно формуле обобщенных резольвент симметрического оператора в том виде, в каком она установлена в работе (8), совокупность всех обобщенных резольвент R_λ оператора L задается равенством

$$R_\lambda = (L_{F(\lambda)} - \lambda E)^{-1} \quad (\text{Im } \lambda \cdot \text{Im } \lambda_0 > 0), \quad (3.1)$$

где $F(\lambda)$ — произвольная регулярная в полуплоскости операторная функция из \mathfrak{M}_λ в $\mathfrak{M}_{\bar{\lambda}}$, не превосходящая единицы по норме.

Для значений $\bar{\lambda}$ из другой полуплоскости ($\text{Im } \bar{\lambda} \cdot \text{Im } \lambda_0 < 0$) $R_{\bar{\lambda}}$ можно определить, используя равенство

$$R_{\bar{\lambda}} = R_\lambda^*,$$

откуда, согласно (3.1),

$$R_{\bar{\lambda}} = (L_{F^*(\lambda)} - \bar{\lambda} E)^{-1}. \quad (3.2)$$

Отметим, что различным операторным функциям $F(\lambda)$ соответствуют различные обобщенные резольвенты R_λ .

Основываясь на формуле (3.1), покажем, что всякая обобщенная резольвента R_λ при любом невещественном λ является интегральным оператором, и одновременно получим конкретную формулу для ядра этого оператора.

Пусть $f(x)$ — произвольная функция из $L^2(a, b)$, обращающаяся в нуль вне какого-либо конечного промежутка $[a_1, b_1] \subset (a, b)$. Как видно из формулы (3.1), при любом невещественном λ $R_\lambda f$ является решением уравнения

$$l[y] - \lambda y = f; \quad (3.3)$$

Ограничимся пока рассмотрением невещественных значений λ , принадлежащих той полуплоскости, которая содержит точку λ_0 , $\text{Im } \lambda \cdot \text{Im } \lambda_0 > 0$.

* В работе И. М. Глазмана [см. (2), стр. 111] этот факт установлен иным путем.

Для построения решения уравнения (3.3) обратимся сначала к соответствующему однородному уравнению

$$l[y] - \lambda y = 0. \quad (3.4)$$

Пусть s_0 — какая-либо внутренняя точка промежутка (a, b) , а m^- и m^+ — максимальное число линейно независимых решений уравнения (3.4), принадлежащих соответственно пространствам $L^2(a, s_0)$ и $L^2(s_0, b)$. Как известно, имеют место неравенства

$$n \leq m^-, m^+ \leq 2n,$$

а дефектное число m оператора L можно определить по формуле [см., например, (6), стр. 164]:

$$m = m^- + m^+ - 2n.$$

Положим $q = m^- - m$, $r = m^+ - m$.

Выберем фундаментальную систему решений уравнения (3.4):

$$u_1(x; \lambda), u_2(x; \lambda), \dots, u_{2n}(x; \lambda) \quad (3.5)$$

так, чтобы q первых функций принадлежало пространству $L^2(a, s_0)$, m следующих — пространству $L^2(a, b)$ и r последних — пространству $L^2(s_0, b)$ [см., например, (6) стр. 179].

Применяя несколько видоизмененный метод вариации произвольных постоянных и учитывая, что функция $f(x)$ вне промежутка $[a_1, b_1]$ обращается в нуль, представим общее решение неоднородного уравнения (3.3) в виде

$$y(f; x; \lambda) = \sum_{k=1}^{2n} c_k u_k(x; \lambda) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2n} u_k(x; \lambda) \left[\int_a^x f(s) v_k(s; \lambda) ds - \int_x^b f(s) v_k(s; \lambda) ds \right], \quad (3.6)$$

где

$$v_1(x; \lambda), v_2(x; \lambda), \dots, v_{2n}(x; \lambda) \quad (3.7)$$

— фундаментальная система решений уравнения (3.4), сопряженная по отношению к системе (3.5), а c_1, c_2, \dots, c_{2n} — произвольные постоянные.

Значения произвольных постоянных c_1, c_2, \dots, c_{2n} в формуле (3.6) предстоит выбрать так, чтобы имело место равенство

$$y(f; x; \lambda) = R_\lambda f.$$

Позаботимся прежде всего о том, чтобы определенная формулой (3.6) функция $y(f; x; \lambda)$ принадлежала пространству $L^2(a, b)$ *. Принимая во внимание выбор фундаментальной системы (3.5), легко заключить, что $y(f; x; \lambda) \in L^2(a, b)$ тогда и только тогда, когда

$$c_k = \begin{cases} -\frac{1}{2} \int_a^b f(s) v_k(s; \lambda) ds & \text{при } k = 1, 2, \dots, q, \\ \frac{1}{2} \int_a^b f(s) v_k(s; \lambda) ds & \text{при } k = m^- + 1, m^- + 2, \dots, 2n. \end{cases} \quad (3.8)$$

* $y(f; x; \lambda)$ рассматривается здесь как функция от x .

Важно заметить, что при таком выборе $q + r$ постоянных c_k

$$y(f; x; \lambda) \in D,$$

так как

$$l[y] = \lambda y + f \in L^2(a, b).$$

Остается подобрать значения m постоянных $c_{q+1}, c_{q+2}, \dots, c_{m-}$ таким образом, чтобы функция $y(f; x; \lambda)$ принадлежала области определения $D_{L_{F(\lambda)}}$ оператора $L_{F(\lambda)}$, ибо, согласно (3.1), $R_\lambda f \in D_{L_{F(\lambda)}}$.

Пусть $\Omega(\lambda)$ — матричная функция, соответствующая операторной функции $F(\lambda)$ в базисах (1.4), (1.5). Тогда, согласно п. 3 § 1, многообразию $D_{L_{F(\lambda)}}$ состоит из всех функций $y(x) \in D$, которые удовлетворяют краевому условию:

$$[\Omega(\lambda) \Psi^*(x) - \Phi^*(x)] \hat{J} y(x) \Big|_a^b = 0. \quad (3.9)$$

Прежде чем воспользоваться условием (3.9) для определения постоянных $c_{q+1}, c_{q+2}, \dots, c_{m-}$, введем некоторые обозначения.

Через $u(x; \lambda)$ и $v(x; \lambda)$ обозначим одно столбцевые матрицы, составленные соответственно из функций (3.5) и (3.7).

Пусть c обозначает одно столбцевую матрицу, элементами которой служат постоянные c_1, c_2, \dots, c_{2n} .

Тогда формулу (3.6) можно переписать в виде:

$$y(f; x; \lambda) = u'(x; \lambda) c + \frac{1}{2} u'(x; \lambda) \left[\int_a^x f(s) v(s; \lambda) ds - \int_x^b f(s) v(s; \lambda) ds \right]^*. \quad (3.10)$$

Введем в рассмотрение одно столбцевую матрицу

$$\xi(f; \lambda) = \int_a^b f(s) v(s; \lambda) ds. \quad (3.11)$$

Разобьем матрицу c на одно столбцевые матрицы $c^{(-1)}, c^{(0)}$ и $c^{(1)}$, составленные соответственно из q первых, m следующих и r последних элементов этой матрицы:

$$c = \begin{bmatrix} c^{(-1)} \\ c^{(0)} \\ c^{(1)} \end{bmatrix}.$$

Аналогично представим и матрицу $\xi(f; \lambda)$:

$$\xi(f; \lambda) = \begin{bmatrix} \xi^{(-1)}(f; \lambda) \\ \xi^{(0)}(f; \lambda) \\ \xi^{(1)}(f; \lambda) \end{bmatrix}.$$

* Напомним, что $'$ обозначает операцию транспонирования, так что $u'(x; \lambda)$ есть одностолбчатая матрица.

Формула (3.8) в этих обозначениях примет вид:

$$c^{(j)} = \frac{i}{2} \xi^{(j)}(f; \lambda) \quad (j = \pm 1). \quad (3.12)$$

Наряду с матрицей квазипроизводных $U(x; \lambda)$, соответствующей системе (3.5), введем в рассмотрение матрицы $U_{-1}(x; \lambda)$, $U_0(x; \lambda)$, $U_1(x; \lambda)$, составленные соответственно из q первых, m следующих и r последних столбцов этой матрицы:

$$U(x; \lambda) = \| U_{-1}(x; \lambda) \quad U_0(x; \lambda) \quad U_1(x; \lambda) \|.$$

Положим

$$P(x; \lambda) = [\Omega(\lambda) \Psi^*(x) - \Phi^*(x)] J U(x; \lambda) \quad (3.13)$$

и

$$P_j(x; \lambda) = [\Omega(\lambda) \Psi^*(x) - \Phi^*(x)] J U_j(x; \lambda) \quad (j = 0, \pm 1), \quad (3.14)$$

так что

$$P(x; \lambda) = \| P_{-1}(x; \lambda) \quad P_0(x; \lambda) \quad P_1(x; \lambda) \| \quad (x \in (a, b)).$$

Через $P_j(a; \lambda)$ ($j = -1, 0$) и $P_j(b; \lambda)$ ($j = 0, 1$) обозначим пределы соответствующих матриц при $x \rightarrow a$ и $x \rightarrow b$. В существовании этих пределов легко убедиться, если учесть, каким образом была выбрана фундаментальная система (3.5), и воспользоваться тождеством (1.3).

При введенных обозначениях, принимая во внимание (3.10) и (3.12), получаем:

$$\begin{aligned} & [\Omega(\lambda) \Psi^*(x) - \Phi^*(x)] J \hat{y}(f; x; \lambda)|_{x=a} = \\ & = P_0(a; \lambda) c^{(0)} - P_{-1}(a; \lambda) \xi^{(-1)}(f; \lambda) - \frac{1}{2} P_0(a; \lambda) \xi^{(0)}(f; \lambda), \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} & [\Omega(\lambda) \Psi^*(x) - \Phi^*(x)] J \hat{y}(f; x; \lambda)|_{x=b} = \\ & = P_0(b; \lambda) c^{(0)} + \frac{1}{2} P_0(b; \lambda) \xi^{(0)}(f; \lambda) + P_1(b; \lambda) \xi^{(1)}(f; \lambda). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Положим

$$P(a, b; \lambda) = \| P_{-1}(a; \lambda) \quad \frac{1}{2} [P_0(a; \lambda) + P_0(b; \lambda)] \quad P_1(b; \lambda) \|. \quad (3.17)$$

Тогда, в силу (3.15), (3.16), имеем:

$$\begin{aligned} & [\Omega(\lambda) \Psi^*(x) - \Phi^*(x)] J \hat{y}(f; x; \lambda)|_{x=a}^{x=b} = \\ & = [P_0(b; \lambda) - P_0(a; \lambda)] c^{(0)} + P(a, b; \lambda) \xi(f; \lambda). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Так как функция $y(f; x; \lambda)$ должна удовлетворять краевому условию (3.9), то, согласно (3.18), получаем:

$$[P_0(a; \lambda) - P_0(b; \lambda)] c^{(0)} = P(a, b; \lambda) \xi(f; \lambda). \quad (3.19)$$

Легко видеть, что матрица $P_0(a; \lambda) - P_0(b; \lambda)$ является неособенной.

Действительно, в противном случае уравнение

$$L_{F(\lambda)} y - \lambda y = 0$$

имело бы ненулевое решение, что, однако, невозможно, поскольку λ принадлежит той же полуплоскости, что и точка λ_0 (см. замечание в конце п. 3 § 1).

Итак, равенство (3.19) позволяет определить матрицу $c^{(0)}$:

$$c^{(0)} = [P_0(a; \lambda) - P_0(b; \lambda)]^{-1} P(a, b; \lambda) \xi(f; \lambda). \quad (3.20)$$

Введем в рассмотрение квадратную матрицу порядка $2n$

$$T(\lambda) = \left\| \begin{array}{ccc} -\frac{1}{2} E_q & 0 & 0 \\ [P_0(a; \lambda) - P_0(b; \lambda)]^{-1} P(a, b; \lambda) & & \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} E_r \end{array} \right\| \quad (3.21)$$

где E_k — единичная матрица порядка k .

Формулы (3.12) и (3.20) можно теперь объединить в виде одного матричного равенства

$$c = T(\lambda) \xi(f; \lambda),$$

т. е., согласно (3.11),

$$c = T(\lambda) \int_a^b f(s) v(s; \lambda) ds. \quad (3.22)$$

При таком выборе матрицы c функция $y(f; x; \lambda)$, определенная формулой (3.10), совпадает с $R_\lambda f$.

Итак, согласно (3.10) и (3.22), имеем:

$$\begin{aligned} R_\lambda f &= u'(x, \lambda) T(\lambda) \int_a^b f(s) v(s; \lambda) ds + \\ &+ \frac{1}{2} u'(x, \lambda) \left[\int_a^x f(s) v(s; \lambda) ds - \int_x^b f(s) v(s; \lambda) ds \right]. \end{aligned}$$

Эту формулу можно представить в виде

$$R_\lambda f = \int_a^b K(x, s; \lambda) f(s) ds, \quad (3.23)$$

где положено

$$\begin{aligned} K(x, s; \lambda) &= u'(x; \lambda) \left[T(\lambda) + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x-s) E_{2n} \right] v(s; \lambda) \\ &(x, s \in (a, b); \operatorname{Im} \lambda \cdot \operatorname{Im} \lambda_0 > 0). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Заметим, что ядро $K(x, s; \lambda)$ непрерывно по совокупности обеих переменных x и s во всей области $(x, s \in (a, b))$, включая прямую $x = s$, так как, согласно (2.6), $u'(x; \lambda) v(x; \lambda) = 0$.

В силу (3.21), равны нулю все элементы матрицы $T(\lambda) + \frac{1}{2} E_{2n}$, находящиеся в ее первых q строках, и все элементы матрицы $T(\lambda) - \frac{1}{2} E_{2n}$, расположенные в ее последних r строках. Согласно формуле (3.24), отсюда следует, что при фиксированном s $K(x, s; \lambda)$ является

для $x > s$ линейной комбинацией функций

$$u_{q+1}(x; \lambda), u_{q+2}(x; \lambda), \dots, u_{2n}(x; \lambda),$$

а для $x < s$ — линейной комбинацией функций

$$u_1(x; \lambda), u_2(x; \lambda), \dots, u_m(x; \lambda).$$

Принимая во внимание выбор фундаментальной системы (3.5), заключаем, что $K(x, s, \lambda)$, как функция от x , принадлежит пространству $L^2(a, b)$ при любом фиксированном s из промежутка (a, b) . Этот вывод получен нами в предположении, что λ находится в полуплоскости, содержащей точку λ_0 .

Для значения $\bar{\lambda}$, принадлежащего другой полуплоскости, взяв за основу равенство (3.2), можно аналогичным образом получить формулу

$$R_{\bar{\lambda}} f = \int_a^b K(x, s; \bar{\lambda}) f(s) ds, \quad (3.25)$$

где ядро $K(x, s; \bar{\lambda})$, рассматриваемое как функция от x , принадлежит пространству $L^2(a, b)$ при любом фиксированном $s (s \in (a, b))$.

Из соотношения $R_{\lambda} = R_{\bar{\lambda}}^*$ вытекает равенство

$$K(x, s; \lambda) = \overline{K(s, x; \bar{\lambda})},$$

которое позволяет заключить, что $K(x, s; \lambda)$, как функция от s , принадлежит пространству $L^2(a, b)$ при любом фиксированном $x (x \in (a, b))$.

Формула (3.23) была установлена в предположении, что функция $f(x)$ из $L^2(a, b)$ обращается в нуль вне конечного промежутка $[a_1, b_1] \subset (a, b)$. Принимая во внимание ограниченность оператора R_{λ} и только что рассмотренное свойство ядра $K(x, s; \lambda)$, обычным путем убеждаемся в том, что формула (3.23) имеет место для любой функции $f(x) \in L^2(a, b)$. То же самое справедливо, очевидно, и по отношению к формуле (3.25).

Итак, нами доказано следующее предложение.

ТЕОРЕМА 1. *Всякая обобщенная резольвента R_{λ} оператора L является при любом не вещественном λ интегральным оператором. Ее ядро $K(x, s; \lambda)$ определяется формулой (3.24) и удовлетворяет условиям:*

$$\int_a^b |K(x, s; \lambda)|^2 dx < +\infty, \quad \int_a^b |K(x, s; \lambda)|^2 ds < +\infty$$

$$(x, s \in (a, b)).$$

§ 4. Характеристическая матрица обобщенной резольвенты

1. Сохраняя прежние обозначения, несколько преобразуем формулу (3.24), определяющую ядро $K(x, s; \lambda)$ обобщенной резольвенты R_{λ} .

Пусть x_0 — какая-либо точка промежутка (a, b) , а

$$y_1(x; \lambda), y_2(x; \lambda), \dots, y_{2n}(x; \lambda) \quad (4.1)$$

— фундаментальная система решений уравнения (3.4), нормированная в точке x_0 так, что соответствующая этой системе матрица квазипроизводных $Y(x; \lambda)$ обращается при $x = x_0$ в единичную матрицу. Введем в рассмотрение одностолбцевую матрицу $y(x; \lambda)$, элементами которой служат функции (4.1). Мы имеем:

$$u(x; \lambda) = U'(x_0; \lambda) y(x; \lambda). \quad (4.2)$$

Обратимся к формуле (2.7), которая в принятых здесь обозначениях имеет вид:

$$v(x; \lambda) = [U'(x_0; \lambda) J U(x_0; \lambda)]^{-1} u(x; \lambda).$$

Отсюда, в силу (4.2), получаем:

$$v(x; \lambda) = U^{-1}(x_0; \lambda) J' y(x; \lambda). \quad (4.3)$$

Принимая во внимание (4.2) и (4.3), придадим формуле (3.24) вид:

$$K(x, s; \lambda) = y'(x; \lambda) \left[M(\lambda) + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(s - x) J \right] y(s; \lambda) \quad (4.4)$$

$$(x, s \in (a, b), \operatorname{Im} \lambda \cdot \operatorname{Im} \lambda_0 > 0),$$

где

$$M(\lambda) = U(x_0; \lambda) T(\lambda) U^{-1}(x_0; \lambda) J'. \quad (4.5)$$

Матрицу $M(\lambda)$ условимся называть характеристической матрицей соответствующей обобщенной резольвенты R_λ оператора L . $M(\lambda)$ является матричной функцией параметра λ в полуплоскости, [содержащей точку λ_0 ($\operatorname{Im} \lambda \cdot \operatorname{Im} \lambda_0 > 0$)].

Рассмотрим ядро $K(x, s; \bar{\lambda})$ для значений $\bar{\lambda}$, принадлежащих другой полуплоскости. Принимая во внимание соотношение

$$K(x, s; \bar{\lambda}) = \overline{K(s, x; \lambda)}$$

и формулу (4.4), имеем:

$$K(x, s; \bar{\lambda}) = y'(s; \bar{\lambda}) \left[\overline{M(\lambda)} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x - s) J \right] y(x; \bar{\lambda}).$$

Транспонируя правую часть, приходим к формуле

$$K(x, s; \bar{\lambda}) = y'(x; \bar{\lambda}) \left[M^*(\lambda) + \frac{1}{2} (s - x) J \right] y(s; \bar{\lambda}) \quad (4.6)$$

$$(x, s \in (a, b), \operatorname{Im} \lambda \cdot \operatorname{Im} \lambda_0 > 0).$$

Полученные результаты сформулируем в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Для ядра $K(x, s; \lambda)$ произвольной обобщенной резольвенты R_λ оператора L имеют место формулы (4.4) и (4.6). При этом ее характеристическая матрица $M(\lambda)$ определяется согласно формулам (3.14), (3.17), (3.21) и (4.5).

2. В настоящем пункте будем предполагать, что оба конца промежутка (a, b) регулярны. В этом случае построение характеристической матрицы $M(\lambda)$ любой обобщенной резольвенты R_λ оператора L особенно просто.

Заметив, что в качестве системы функций (3.5) можно взять систему (4.1), нормированную в точке x_0 , в соответствии с формулой (3.13) имеем:

$$P(x; \lambda) = [\Omega(\lambda) \Psi^*(x) - \Phi^*(x)] JY(x; \lambda). \quad (4.7)$$

Так как в рассматриваемом случае $q = r = 0$, то, согласно (3.14) и (3.17),

$$P_0(x; \lambda) = P(x; \lambda),$$

$$P(a, b; \lambda) = \frac{1}{2} [P(a; \lambda) + P(b; \lambda)].$$

В силу (3.21) и (4.5) получаем:

$$M(\lambda) = \frac{1}{2} [P(a; \lambda) - P(b; \lambda)]^{-1} [P(a; \lambda) + P(b; \lambda)] J'^*. \quad (4.8)$$

3. Рассмотрим вспомогательные матричные неравенства.

Поясним прежде всего запись: если B — какая-либо эрмитова матрица, то неравенства

$$B > 0, \quad B \geq 0$$

означают, что матрица B соответственно эрмитово-положительна или эрмитово-неотрицательна.

ЛЕММА 1. При любом вещественном λ и при любом $x \neq x_0$ ($x_0, x \in (a, b)$) имеет место неравенство

$$\frac{\operatorname{sgn}(x - x_0)}{\lambda - \bar{\lambda}} [Y(x; \lambda) JY^*(x; \lambda) - J] > 0. \quad (4.9)$$

Доказательство. Подставив в тождество (1.3) при $p = 2n$ вместо функций y_k и z_k ($k = 1, 2, \dots, p$) соответствующие функции (4.1) и проинтегрировав обе части от x_0 до x , получим:

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \left\| \int_{x_0}^x y_k(x; \lambda) \overline{y_j(x; \lambda)} dx \right\|_1^{2n} = Y^*(x; \lambda) J(x; \lambda) - J.$$

Отсюда следует неравенство:

$$\frac{\operatorname{sgn}(x - x_0)}{\lambda - \bar{\lambda}} [Y^*(x; \lambda) JY(x; \lambda) - J] > 0. \quad (4.10)$$

Если мы умножим эрмитово-положительную матрицу слева и справа на взаимно сопряженные неособенные матрицы, то снова получим эрмитово-положительную матрицу. Поэтому из (4.10) вытекает неравенство:

$$\frac{\operatorname{sgn}(x - x_0)}{\lambda - \bar{\lambda}} [J - JY^{*-1}(x; \lambda) JY^{-1}(x; \lambda) J] > 0.$$

Полученное неравенство не нарушится, если левую часть заменить транспонированной матрицей. Мы имеем:

$$\frac{\operatorname{sgn}(x - x_0)}{\lambda - \bar{\lambda}} [JY'^{-1}(x; \lambda) J(JY'^{-1}(x; \lambda))^* - J] > 0.$$

* Отметим, что формула (4.8) остается в силе и в случае сингулярных концов, если дефектное число оператора L равно $2n$.

Отсюда легко следует (4.9), так как, согласно (2.3),

$$JY'^{-1}(x; \lambda) = Y(x; \lambda)J.$$

Лемма доказана.

Пусть Ω — квадратная матрица порядка m . Введем в рассмотрение матрицу

$$G(x) = [\Omega \Psi^*(x) - \Phi^*(x)] J^*. \quad (4.11)$$

ЛЕММА 2. Если матрица Ω не превосходит по норме единицы (и только в этом случае), то имеет место неравенство

$$\frac{1}{\lambda_0 - \bar{\lambda}_0} G(x) J G^*(x) \Big|_a^b \geq 0.$$

Доказательство. Принимая во внимание ортонормированность систем (1.4) и (1.5), в силу (1.3) получаем соотношения:

$$\Phi^*(x) J \Phi(x) \Big|_a^b = (\lambda_0 - \bar{\lambda}_0) E_m,$$

$$\Psi^*(x) J \Psi(x) \Big|_a^b = (\bar{\lambda}_0 - \lambda_0) E_m,$$

$$\Psi^*(x) J \Phi(x) \Big|_a^b = 0,$$

$$\Phi^*(x) J \Psi(x) \Big|_a^b = 0;$$

E_m обозначает здесь единичную матрицу порядка m .

Из этих равенств и формулы (4.11) следует:

$$G(x) J G^*(x) \Big|_a^b = (\lambda_0 - \bar{\lambda}_0) [E_m - \Omega \Omega^*].$$

Отсюда непосредственно вытекает справедливость леммы.

4. Перейдем к рассмотрению теоремы о свойствах характеристической матрицы обобщенной резольвенты.

Будем во всем дальнейшем предполагать, что фиксированное не вещественное значение λ_0 принадлежит верхней полуплоскости, так что характеристическая матрица $M(\lambda)$ будет рассматриваться как функция параметра λ в верхней полуплоскости.

Здесь и в дальнейшем будем пользоваться обозначением

$$\operatorname{Im} M = \frac{1}{2i} (M_1 - M^*)$$

для любой квадратной матрицы M .

ТЕОРЕМА 3. Характеристическая матрица $M(\lambda)$ любой обобщенной резольвенты R_λ оператора L является регулярной функцией параметра λ в верхней полуплоскости, и для любого λ

$$\operatorname{Im} M(\lambda) \geq 0.$$

* Напомним, что $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ суть матрицы квазипроизводных, соответствующие системам функций (1.4) и (1.5), которые образуют ортонормированные базисы в дефектных подпространствах $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}_0}$ и \mathfrak{N}_{λ_0} оператора L .

Доказательство. Предположим сначала, что оба конца промежутка (a, b) регулярны. Тогда имеет место формула (4.8).

Поскольку матрица $P(x; \lambda)$, как это видно из (4.7), является при любом $x (x \in (a, b))$ регулярной функцией параметра λ в верхней полуплоскости, то, согласно (4.8), матрица $M(\lambda)$ также является регулярной функцией от λ в этой полуплоскости.

Введем в рассмотрение матрицу

$$B(\lambda) = [P(a; \lambda) - P(b; \lambda)] \operatorname{Im} M(\lambda) [P(a; \lambda) - P(b; \lambda)]^*. \quad (4.12)$$

Принимая во внимание (4.8), в результате элементарных выкладок получаем;

$$B(\lambda) = \frac{1}{2i} [P(b; \lambda) J P^*(b; \lambda) - P(a; \lambda) J P^*(a; \lambda)]. \quad (4.13)$$

Положим

$$G(x; \lambda) = [\Omega(\lambda) \Psi^*](x) - \Phi^*(x) J.$$

Тогда, согласно (4.7),

$$P(x; \lambda) = G(x; \lambda) Y(x; \lambda),$$

и равенство (4.13) принимает вид:

$$B(\lambda) = \frac{1}{2i} [G(b; \lambda) Y(b; \lambda) J Y^*(b; \lambda) G^*(b; \lambda) - \\ - G(a; \lambda) Y(a; \lambda) J Y^*(a; \lambda) G^*(a; \lambda)].$$

После элементарного преобразования правой части получим:

$$B(\lambda) = \frac{1}{2i} \{ [G(b; \lambda) J G^*(b; \lambda) - G(a; \lambda) J G^*(a; \lambda)] + \\ + G(b; \lambda) [Y(b; \lambda) J Y^*(b; \lambda) - J] G^*(b; \lambda) + \\ + G(a; \lambda) [J - Y(a; \lambda) J Y^*(a; \lambda)] G^*(a; \lambda) \}.$$

В силу лемм 1 и 2, из последнего равенства следует, что матрица $B(\lambda)$ эрмитово-неотрицательна.

Поскольку матрица $[P(a; \lambda) - P(b; \lambda)]$ неособенная, формула (4.12) позволяет заключить, что и матрица $\operatorname{Im} M(\lambda)$ эрмитово-неотрицательна.

Итак, теорема доказана для того частного случая, когда оба конца промежутка (a, b) регулярны.

Отбросим теперь предположение о регулярности концов промежутка (a, b) . Рассмотрим произвольный конечный замкнутый промежуток $[a_1, b_1] \subset (a, b)$.

Пусть L_1 — дифференциальный оператор с минимальной областью определения, порожденный в гильбертовом пространстве $L^2(a_1, b_1)$ дифференциальным выражением $l[y]$. Ядро $K(x, s; \lambda)$ любой обобщенной резольвенты R_λ оператора L совпадает в квадрате $a_1 \leq x, s \leq b_1$ с ядром $K_1(x, s; \lambda)$ той обобщенной резольвенты $R_1(\lambda)$ оператора L_1 , которая определяется формулой

$$R_1(\lambda) f = P_1 R_\lambda f \quad (f \in L^2(a_1, b_1)),$$

где P_1 — оператор проектирования в $L^2(a, b)$ на $L^2(a_1, b_1)$ *. Отсюда легко заключить, что характеристическая матрица $M(\lambda)$ обобщенной резольвенты R_λ совпадает с характеристической матрицей обобщенной резольвенты $R_1(\lambda)$ оператора L_1 . Так как концы промежутка $[a_1, b_1]$ регулярны, то, по доказанному, $M(\lambda)$ обладает требуемыми свойствами. Теорема доказана.

§ 5. Формула спектральных функций оператора L

1. Как известно, каждой спектральной функции E_t ($-\infty < t < +\infty$) оператора L отвечает некоторая обобщенная резольвента R_λ , определяемая формулой

$$R_\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE_t}{t - \lambda} \quad (\operatorname{Im} \lambda \neq 0). \quad]$$

Для краткости записи введем обозначение

$$E_{\alpha, \beta} = \frac{E_\beta + E_{\beta+0}}{2} - \frac{E_\alpha + E_{\alpha+0}}{2} \quad (-\infty < \alpha, \beta < +\infty) \quad **.$$

При помощи формулы обращения Стильтьеса спектральная функция E_t однозначно восстанавливается по соответствующей ей обобщенной резольвенте R_λ ; для любых функций $f(x)$ и $g(x)$ из $L^2(a, b)$ и любых вещественных α и β имеет место равенство:

$$(E_{\alpha, \beta} f, g) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\tau \rightarrow +0} \int_{\alpha}^{\beta} [(R_{\sigma+i\tau} - R_{\sigma-i\tau}) f, g] d\sigma. \quad (5.1)$$

* То, что определенная таким образом операторная функция $R_1(\lambda)$ является обобщенной резольвентой оператора L_1 , легко доказать, пользуясь известной теоремой М. А. Наймарка:

Совокупность всех обобщенных резольвент R_λ симметрического оператора A в гильбертовом пространстве H определяется формулой

$$R_\lambda f = \tilde{P} (\tilde{A} - \lambda \tilde{E})^{-1} f \quad (f \in H), \quad (*)$$

где \tilde{A} — любое самосопряженное расширение оператора A в некотором объемлющем пространстве $\tilde{H} \supset H$, \tilde{E} — единичный оператор в \tilde{H} , а \tilde{P} — оператор проектирования в \tilde{H} на H .

Проведем доказательство в абстрактной форме. Пусть A_1 — симметрический оператор в $H_1 \subset H$, являющийся частью оператора A . Обозначим через P_1 и \tilde{P}_1 операторы проектирования на H_1 в пространствах H и \tilde{H} соответственно. Применяя к обеим частям формулы (*) оператор P_1 , получим:

$$P_1 R_\lambda f = \tilde{P}_1 (\tilde{A} - \lambda \tilde{E})^{-1} f \quad (f \in H). \quad (**)$$

Поскольку оператор \tilde{A} можно рассматривать как расширение оператора A_1 , то, согласно той же теореме М. А. Наймарка, равенство (**) позволяет заключить, что операторная функция $R_1(\lambda)$ в H , определенная формулой

$$R_1(\lambda) f = P_1 R_\lambda f \quad (f \in H_1),$$

является обобщенной резольвентой оператора A_1 .

** Спектральные функции E_t ($-\infty < t < +\infty$) предполагаются непрерывными слева.

Равенство (5.1) в сочетании с теоремой 2 позволит построить формулу всех спектральных функций E_t оператора L .

2. Нам потребуются почти очевидные обобщения двух предложений из теории аналитических функций на случай матричных аналитических функций.

Как известно, какова бы ни была регулярная в верхней полуплоскости функция $\varphi(\lambda)$ с неотрицательной мнимой частью, при любых вещественных числах α и β существует конечный предел

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \int_{\alpha}^{\beta} \operatorname{Im} \varphi(\sigma + i\tau) d\sigma$$

(см., например, ^(*), лемма 4). Это предложение обобщается на матричные функции в следующей форме:

(А) Пусть $N(\lambda)$ — регулярная в верхней полуплоскости матричная функция, удовлетворяющая условию

$$\operatorname{Im} N(\lambda) \geq 0.$$

Тогда при любых вещественных α и β существует конечный предел

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \int_{\alpha}^{\beta} \operatorname{Im} N(\sigma + i\tau) d\sigma.$$

Рассмотрим еще одно предложение.

Пусть $\varphi(\lambda)$ — регулярная в верхней полуплоскости функция с неотрицательной мнимой частью, а $\psi(\lambda)$ — функция, регулярная в некоторой области, содержащей отрезок $[\alpha, \beta]$ вещественной оси. Тогда имеет место формула

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{\tau \rightarrow +0} \int_{\alpha}^{\beta} [\varphi(\lambda) \psi(\lambda) - \overline{\varphi(\lambda)} \overline{\psi(\lambda)}] d\sigma = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(\sigma) d\rho(\sigma) \quad (\lambda = \sigma + i\tau),$$

где

$$\rho(\sigma) = \frac{1}{\pi} \lim_{\tau \rightarrow +0} \int_0^{\sigma} \operatorname{Im} \varphi(\sigma + i\tau) d\sigma^*.$$

Обобщением указанного предложения является следующее:

(Б) Пусть $N(\lambda)$ — регулярная в верхней полуплоскости матричная функция, удовлетворяющая условию

$$\operatorname{Im} N(\lambda) \geq 0,$$

а $\theta_1(\lambda)$, $\theta_2(\lambda)$ — матричные функции, регулярные в некоторой области, содержащей отрезок $[\alpha, \beta]$ вещественной оси; при этом прямоугольные

* См., например, ^(*), лемма 5. М. Г. Крейн сообщил автору, что это предложение весьма близко к лемме, впервые установленной М. С. Лившицем [см. ^(*)].

в общем случае матрицы $\theta_1(\lambda)$, $\theta_2(\lambda)$ таковы, что произведение $\theta_1(\lambda) N(\lambda) \theta_2(\lambda)$ имеет смысл. Тогда справедлива формула:

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{\tau \rightarrow +0} \int_{\alpha}^{\beta} [\theta_1(\lambda) N(\lambda) \theta_2(\lambda) - \theta_1(\bar{\lambda}) N^*(\lambda) \theta_2(\bar{\lambda})] d\sigma = \\ = \int_{\alpha}^{\beta} \theta_1(\sigma) dS(\sigma) \theta_2(\sigma) \quad (\lambda = \sigma + i\tau),$$

где

$$S(\sigma) = \frac{1}{\pi} \lim_{\tau \rightarrow +0} \int_0^{\sigma} \operatorname{Im} N(\sigma + i\tau) d\sigma.$$

3. Пусть R_{λ} — какая-либо обобщенная резольвента оператора L и $M(\lambda)$ — ее характеристическая матрица.

При любом вещественном σ определим матрицу $T(\sigma)$ формулой

$$T(\sigma) = \frac{1}{\pi} \lim_{\tau \rightarrow +0} \int_0^{\sigma} \operatorname{Im} M(\sigma + i\tau) d\sigma. \quad (5.2)$$

В соответствии с теоремой 3 и предложением (А) формула (5.2) имеет смысл при любом вещественном σ и $T(\sigma)$ является неубывающей матричной функцией.

Матрицу $T(\sigma)$ условимся называть спектральной функцией распределения оператора L , соответствующей обобщенной резольвенте R_{λ} .

Пусть $L_T^2(-\infty, +\infty)$ — гильбертово пространство $2n$ -мерных векторных функций

$$\eta(\sigma) = (\eta_1(\sigma), \eta_2(\sigma), \dots, \eta_{2n}(\sigma)) \quad (-\infty < \sigma < +\infty),$$

которые будем рассматривать как одностолбцевые матричные функции; скалярное произведение в $L_T^2(-\infty, +\infty)$ определяется формулой

$$(\eta, \chi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^*(\sigma) dT(\sigma) \eta(\sigma).$$

ТЕОРЕМА 4. Для любой функции $f(x)$ из $L^2(a, b)$ имеет место равенство

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \eta^*(f; \sigma) dT(\sigma) \eta(f; \sigma), \quad (5.3)$$

где

$$\eta(f; \sigma) = \int_a^b f(s) y(s; \sigma) ds; \quad (5.4)$$

при этом интеграл в (5.4) сходится в смысле метрики $L_T^2(-\infty, +\infty)$

Доказательство. Предположим сначала, что функция $f(x)$ из $L^2(a, b)$ обращается в нуль вне какого-либо конечного отрезка $[a_1, b_1] \subset (a, b)$. При любом не вещественном λ положим

$$y(f; x; \lambda) = R_{\lambda} f.$$

Пусть α и β — произвольные вещественные числа. Введем в рассмотрение функцию

$$w(x; \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} [y(f; x; \sigma + i\tau) - y(f; x; \sigma - i\tau)] d\sigma \\ (x \in (a, b); \tau > 0).$$

При любом τ $w(x; \tau) \in L^2(a, b)$ и, в силу (5.1), при $\tau \rightarrow +0$

$$w(x; \tau) \xrightarrow{\text{сл}} E_{\alpha, \beta} f. \quad (5.5)$$

С другой стороны, принимая во внимание формулы (4.4) и (4.6), получаем:

$$w(x; \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} [y'(x; \lambda) M(\lambda) \eta(f; \lambda) - y'(x; \bar{\lambda}) M^*(\lambda) \eta(f; \bar{\lambda})] d\sigma + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} d\sigma \int_a^b \operatorname{sgn}(s - x) f(s) \operatorname{Im} [y'(x; \lambda) J y(s; \lambda)] ds \quad (\lambda = \sigma + i\tau), \quad (5.6)$$

где $\eta(f; \lambda)$ определяется согласно (5.4).

Для любого фиксированного $x (x \in (a, b))$ второй интеграл в правой части равенства (5.6) стремится к нулю при $\tau \rightarrow +0$. Принимая во внимание теорему 3, можно к первому интегралу в правой части применить предложение (Б). Поэтому, переходя в равенстве (5.6) к пределу при $\tau \rightarrow +0$, при любом фиксированном x получаем:

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} w(x; \tau) = \int_{\alpha}^{\beta} y'(x; \sigma) dT(\sigma) \eta(f; \sigma) \quad (x \in (a, b)). \quad (5.7)$$

Итак, согласно соотношениям (5.5) и (5.7), при $\tau \rightarrow +0$ $w(x; \tau)$ имеет предел и в смысле слабой сходимости в $L^2(a, b)$, и в смысле сходимости всюду в промежутке (a, b) . Но тогда, как известно, оба этих предела совпадают, так что имеет место равенство:

$$E_{\alpha, \beta} f = \int_{\alpha}^{\beta} y'(x; \sigma) dT(\sigma) \eta(f; \sigma).$$

Умножая скалярно обе части последнего равенства на $f(x)$ и меняя затем в правой части порядок интегрирования, приходим к соотношению

$$(E_{\alpha, \beta} f, f) = \int_{\alpha}^{\beta} \eta^*(f; \sigma) dT(\sigma) \eta(f; \sigma).$$

Переходя здесь к пределу при $\alpha \rightarrow -\infty$ и $\beta \rightarrow +\infty$, получим (5.3).

Итак, формула (5.3) доказана для любой функции $f(x)$ из $L^2(a, b)$, обращающейся в нуль вне конечного отрезка $[a_1, b_1] \subset (a, b)$.

Пусть теперь $f(x)$ — произвольная функция из $L^2(a, b)$. Рассмотрим какую-либо последовательность конечных отрезков $[a_k, b_k] \subset (a, b)$ ($k=1, 2, \dots$) таких, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = b.$$

Введем в рассмотрение последовательность функций $f_k(x)$ ($k=1, 2, \dots$), заданных в промежутке (a, b) формулой

$$f_k(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x \in [a_k, b_k], \\ 0 & \text{при } x \notin [a_k, b_k]. \end{cases} \quad (5.8)$$

По доказанному, имеем:

$$\int_a^b |f_k(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \eta^*(f_k; \sigma) dT(\sigma) \eta(f_k; \sigma) \quad (k=1, 2, \dots), \quad (5.9)$$

где

$$\eta(f_k; \sigma) = \int_{a_k}^{b_k} f(s) y(s; \sigma) ds \quad (k=1, 2, \dots). \quad (5.10)$$

Так как последовательность $\{f_k(x)\}$ сходится в метрике $L^2(a, b)$ к $f(x)$, то, очевидно, последовательность $\{\eta(f_k; \sigma)\}$ сходится в смысле метрики пространства $L^2_T(-\infty, +\infty)$ к некоторому пределу; этот предел и есть векторная функция $\eta(f; \sigma)$, определяемая формулой (5.4).

Переходя в равенстве (5.9) к пределу при $k \rightarrow \infty$, получим (5.3). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 5. Совокупность всех спектральных функций E_t ($-\infty < t < +\infty$) оператора L определяется формулой

$$E_{\alpha, \beta} f = \int_{\beta}^{\alpha} y'(x; \sigma) dT(\sigma) \eta(f; \sigma) \quad (f \in L^2(a, b)), \quad (5.11)$$

где $T(\sigma)$ ($-\infty < \sigma < +\infty$) — спектральная функция распределения оператора L , соответствующая его произвольной обобщенной резольвенте R_{λ} .

Доказательство. В том частном случае, когда функция $f(x)$ из $L^2(a, b)$ обращается в нуль вне какого-либо конечного отрезка $[a_1, b_1] \subset \subset (a, b)$, формула (5.11) была установлена выше в ходе доказательства теоремы 4.

Пусть теперь $f(x)$ — произвольная функция из $L^2(a, b)$. Так же как при доказательстве теоремы 4, рассмотрим последовательность функций $f_k(x)$ ($k=1, 2, \dots$), определяемых формулой (5.8). По доказанному имеем:

$$E_{\alpha, \beta} f_k = \int_{\beta}^{\alpha} y'(x; \sigma) dT(\sigma) \eta(f_k; \sigma) \quad (k=1, 2, \dots). \quad (5.12)$$

Не нарушая общности, можно считать, что $\alpha < \beta$. При доказательстве теоремы 4 было установлено, что последовательность $\{\eta(f_k; \sigma)\}$ сходится к некоторой векторной функции $\eta(f; \sigma)$ в пространстве

$L_T^2(-\infty, +\infty)$. Но тогда $\eta(f; \sigma)$ служит пределом этой последовательности и в смысле метрики пространства $L_T^2(\alpha, \beta)$. При любом фиксированном $x (x \in (a, b))$ правую часть равенства (5.12) можно рассматривать как скалярное произведение в смысле метрики пространства $L_T^2(\alpha, \beta)$ двух векторных функций $\eta(f_k; \sigma)$ и $y(x; \sigma)$. Поэтому правая часть равенства (5.12) для любого фиксированного $x (x \in (a, b))$ при $k \rightarrow \infty$ имеет предел

$$\int_{\alpha}^{\beta} y'(x; \sigma) dT(\sigma) \eta(f; \sigma). \quad (5.13)$$

С другой стороны, при $k \rightarrow \infty$ левая часть равенства (5.12) стремится в метрике пространства $L^2(a, b)$ к пределу $E_{\alpha, \beta} f$. Но тогда этот предел совпадает с функцией (5.13). Теорема доказана.

Очевидным следствием теоремы 5 является следующая теорема о разложении.

ТЕОРЕМА 6. Для любой функции $f(x) \in L^2(a, b)$ имеет место разложение

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y'(x; \sigma) dT(\sigma) \eta(f; \sigma).$$

При этом интеграл в правой части сходится в смысле метрики пространства $L^2(a, b)$.

Рассмотрим еще одно предложение, дополняющее теорему 5.

ТЕОРЕМА 7. При любых вещественных α и β оператор $E_{\alpha, \beta}$ является интегральным:

$$E_{\alpha, \beta} f = \int_{\alpha}^{\beta} K(x, s; \alpha, \beta) f(s) ds \quad (f(x) \in L^2(a, b)). \quad (5.14)$$

Его ядро определяется по формуле

$$K(x, s; \alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} y'(x; \sigma) dT(\sigma) y(s; \sigma) \quad (x, s \in (a, b)) \quad (5.15)$$

и при любом x удовлетворяет условию

$$\int_{\alpha}^{\beta} |K(x, s; \alpha, \beta)|^2 ds < +\infty \quad *. \quad (5.16)$$

Доказательство. Пусть $f(x)$ — произвольная функция из $L^2(a, b)$. Будем исходить из установленного выше соотношения (5.12), где функции $f_k(x)$ определяются формулой (5.8). Заметим, что, как было

* Поскольку при любых x и $s (x, s \in (a, b))$

$$K(x, s; \alpha, \beta) = \overline{K(s, x; \alpha, \beta)},$$

то, согласно (5.16), выполняется также условие:

$$\int_{\alpha}^{\beta} |K(x, s; \alpha, \beta)|^2 dx < +\infty$$

при любом s .

установлено в ходе доказательства теоремы 5, правая часть равенства (5.12) при $k \rightarrow \infty$ имеет конечный предел для любого x из промежутка (a, b) .

Принимая во внимание (5.10), после элементарного преобразования правой части (5.12) придем к равенству

$$E_{\alpha, \beta} f_k = \int_{a_k}^{b_k} K(x, s; \alpha, \beta) f(s) ds \quad (k = 1, 2, \dots);$$

при этом мы воспользовались обозначением (5.15).

Переходя здесь к пределу при $k \rightarrow \infty$, получим формулу (5.14). При этом, согласно сделанному выше замечанию, интеграл в правой части этой формулы сходится не только в метрике пространства $L^2(a, b)$, но и при любом x из промежутка (a, b) . Поскольку $f(s)$ является здесь произвольной функцией из $L^2(a, b)$, то отсюда, как известно, следует, что при любом фиксированном x ($x \in (a, b)$) выполняется условие (5.16) [см., например, (1), стр. 60]. Теорема доказана.

Поступило
18. X. 1956

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А х и е з е р Н. И. и Г л а з м а н И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, М.—Л., 1950.
- ² Г л а з м а н И. М., К теории сингулярных дифференциальных операторов, Успехи матем. наук, V, вып. 6 (40) (1950), 102—135.
- ³ К р е й н М. Г., Основные положения теории представления эрмитовых операторов с индексом дефекта (m, m) , Украинский матем. журнал, № 2 (1949), 3—66.
- ⁴ К р е й н М. Г., Об одномерной сингулярной краевой задаче четного порядка в интервале $(0, \infty)$, Доклады Ак. наук СССР, 74, № 1 (1950), 9—12.
- ⁵ К р е й н М. Г., Аналог неравенств Чебышева — Маркова в одномерной краевой задаче, Доклады Ак. наук СССР, 89, № 1 (1953), 5—8.
- ⁶ Н а й м а р з М. А., Линейные дифференциальные операторы, М., 1954.
- ⁷ О р л о в С. А., Об индексе дефекта линейных дифференциальных операторов, Доклады Ак. наук СССР, 92, № 3 (1953), 483—486.
- ⁸ Ш т р а у с А. В., Обобщенные резольвенты симметрических операторов, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 18 (1954), 51—86.
- ⁹ Ш т р а у с А. В., О спектральных функциях дифференциальных операторов, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 19 (1955), 201—220.

Л. Н. СЛОБОДЕЦКИЙ

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

(Представлено академиком В. И. Смирновым)

В работе проводится качественное исследование обобщенных в смысле С. Л. Соболева решений параболических и некоторых эллиптических систем.

Введение

Рассмотрим в слое $[0, T]$ ($0 \leq t \leq T$) $(n+1)$ -мерного вещественного евклидова пространства (t, x) ($x = (x_1, \dots, x_n)$) систему дифференциальных уравнений:

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{r=1}^{2p} \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^n A^{(i_1, \dots, i_r)}(t, x) \frac{\partial^r u}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_r}} - A(t, x)u = f(t, x), \quad (A)$$

где $A^{(i_1, \dots, i_r)}(t, x)$ и $A(t, x)$ — комплексные квадратные матрицы порядка N , а $u = u(t, x)$ и $f(t, x)$ — вектор-функции в N -мерном комплексном векторном пространстве. Будем считать, что матрицы $A^{(i_1, \dots, i_r)}(t, x)$, отличающиеся только порядком следования индексов i_1, \dots, i_r , равны между собой.

Следуя И. Г. Петровскому ⁽¹⁾, назовем систему (A) параболической, если при любых действительных $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ реальные части корней уравнения

$$\left| (-1)^p \sum_{i_1, \dots, i_{2p}=1}^n A^{(i_1, \dots, i_{2p})}(t, x) \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_{2p}} - \lambda E \right| = 0 \quad (1)$$

удовлетворяют неравенству

$$\operatorname{Re} \lambda \leq -\delta |\alpha|^{2p} \quad (\delta > 0, \quad |\alpha| = \sqrt{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2}). \quad (2)$$

Пусть $Q = \Omega \times [0, T]$ ($x \in \Omega$, $0 \leq t \leq T$) — цилиндрическая область и $f(t, x)$ суммируема по Q . Суммируемая по Q вектор-функция $u = u(t, x)$ называется обобщенным в смысле С. Л. Соболева ⁽²⁾ решением системы (A), если для любой вектор-функции $v = v(t, x)$, имеющей все непрерывные производные, входящие в (A) (такую вектор-функцию мы будем в дальнейшем называть регулярной), и равной нулю вне некоторой компактной

подобласти области Q , имеет место равенство:

$$\iint_Q \dots \int (u, \tilde{L}v) dt dx = \iint_Q \dots \int (f, v) dt dx, \quad (3)$$

где

$$\tilde{L}v = -\frac{\partial v}{\partial t} - \sum_{r=1}^{2p} (-1)^r \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^n \frac{\partial^r}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_r}} (A^{(i_1, \dots, i_r)*}(t, x) v) - A^*(t, x) v,$$

\tilde{L} — дифференциальная операция, сопряженная по Лагранжу с L , матрицы $A^{(i_1, \dots, i_r)*}(t, x)$ и $A^*(t, x)$ эрмитово сопряжены с $A^{(i_1, \dots, i_r)}(t, x)$ и $A(t, x)$, а

$$(u, v) = \sum_{k=1}^N u_k \bar{v}_k$$

— скалярное произведение вектора $u = (u_1, \dots, u_N)$ на вектор $v = (v_1, \dots, v_N)$.

Легко видеть, что обобщенное решение системы (A) с непрерывной правой частью, являющееся регулярной вектор-функцией, будет регулярным решением системы (A).

Целью настоящей работы является качественная характеристика обобщенных решений параболической системы (A) и эллиптической системы, получающейся из (A), если считать ее коэффициенты, u и f , не зависящими от t *.

В работе используются оценки и свойства фундаментальной матрицы параболической системы (A). Нужные нам оценки фундаментальной матрицы были получены С. Д. Эйдельманом (4). Используемые нами свойства фундаментальной матрицы, вытекающие из ее оценок, приведены в работе автора (5). Для удобства изложения мы помещаем эти оценки и свойства в § 1 настоящей работы. Их полные доказательства даны в работе С. Д. Эйдельмана (14).

§ 1. Оценки и свойства фундаментальной матрицы параболической системы

Пусть коэффициенты системы (A) удовлетворяют следующим условиям:

а) Матрицы $A^{(i_1, \dots, i_{2p})}(t, x)$ непрерывны и ограничены вместе с их производными по x_1, \dots, x_n до порядка $2p$.

б) Матрицы $A^{(i_1, \dots, i_r)}(t, x)$ ($r < 2p$) непрерывны и ограничены вместе с их производными вида $\frac{\partial^k}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}} A^{(i_1, \dots, i_r)}(t, x)$, где j_1, \dots, j_k ($k \leq r$) принимают независимо друг от друга всевозможные значения, равные i_1, \dots, i_r .

в) Матрица $A(t, x)$ непрерывна и ограничена.

* Краткое изложение результатов настоящей работы помещено в (3).

д) Пусть $F(t, x)$ — любая из матриц или их производных, упомянутых в условиях а), б) и с). Тогда

$$|F(t, x^{(1)}) - F(t, x^{(2)})| \leq K |x^{(1)} - x^{(2)}|^\gamma,$$

где K и γ ($0 < \gamma \leq 1$) — положительные постоянные*.

е) Матрицы $A^{(i_1, \dots, i_{2p})}(t, x)$ равномерно непрерывны по t относительно x_1, \dots, x_n .

Если дифференциальный оператор

$$\sum_{i_1, \dots, i_{2p}=1}^n A^{(i_1, \dots, i_{2p})}(t, x) \frac{\partial^{2p}}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{2p}}}$$

сильно эллиптический [см. (10)], то условие е) излишне.

Тогда

1°. Фундаментальная матрица $U(t, x; \tau, y)$ системы (A) может быть при $t > \tau$ представлена в форме:

$$U(t, x; \tau, y) = U_0(t, x; \tau, y) + L(t, x; \tau, y), \quad (4)$$

где

$$U_0(t, x; \tau, y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int W(t, \tau; x, \alpha) \exp\{i(\alpha, x - y)\} d\alpha, \quad (5)$$

$$(\alpha, x - y) = \sum_{k=1}^n \alpha_k (x_k - y_k),$$

$W(t, \tau, x, \alpha)$ — фундаментальная матрица системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dW}{dt} = (-1)^p \sum_{i_1, \dots, i_{2p}=1}^n A^{(i_1, \dots, i_{2p})}(t, x) \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_{2p}} W,$$

$$W(\tau, \tau; x, \alpha) = E,$$

$$L(t, x, \tau, y) = \int_{\tau}^t ds \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int U_0(t, x; s, z) R(s, z; \tau, y) dz$$

и матрица $R(t, x; \tau, y)$ является решением интегрального уравнения

$$L_{t,x} U_0(t, x; \tau, y) + \int_{\tau}^t ds \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int L_{t,x} U_0(t, x; s, z) R(s, z; \tau, y) dz + R(t, x; \tau, y) = 0.$$

При $t \leq \tau$ $U(t, x, \tau, y) \equiv 0$.

* В работе (14) вместо условия д) требуется, чтобы $F(t, x)$ имела непрерывные и ограниченные первые производные по x_1, \dots, x_n . Оказывается, что для получения формулируемых ниже результатов достаточно потребовать выполнения условия д).

2°. Имеет место неравенство

$$|W(t, \tau; x, \alpha)| \leq C(\delta', T) \exp\{-\delta' |\alpha|^{2p}(t-\tau)\}, \quad (6)$$

где δ' — произвольное положительное число, меньшее δ .

3°. При $t > \tau$

$$|\mathfrak{D}_x^l U_0(t, x; \tau, y)| \leq \frac{C}{(t-\tau)^{\frac{n+l}{2p}}} \exp\left\{-\eta \left[\frac{|x-y|}{\sqrt{t-\tau}}\right]^{\frac{2p}{2p-1}}\right\}, \quad (7)$$

$$|\mathfrak{D}_x^l L(t, x; \tau, y)| \leq \frac{C}{(t-\tau)^{\frac{n+l-1}{2p}}} \exp\left\{-\eta \left[\frac{|x-y|}{\sqrt{t-\tau}}\right]^{\frac{2p}{2p-1}}\right\}, \quad (8)$$

$$|x-y| = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}, \quad 0 \leq l \leq 2p,$$

где C и η — положительные постоянные, а \mathfrak{D}_x^l обозначает l -ю производную по какой-либо комбинации x_1, \dots, x_n .

4°. Равномерно в $[0, T]$

$$\lim_{t \rightarrow \tau + 0} \int \dots \int_{-\infty}^{+\infty} U(t, x; \tau, y) dy = E.$$

Кроме того, для любой вектор-функции (или матрицы) $\varphi(x)$, непрерывной в некоторой области D ,

$$\lim_{t \rightarrow \tau + 0} \int_D \dots \int U(t, x, \tau, y) \varphi(y) dy = \begin{cases} \varphi(x), & x \in D, \\ 0, & x \notin D. \end{cases}$$

5°. При $(t, x) \neq (\tau, y)$ $U(t, x; \tau, y)$ удовлетворяет однородной системе

$$L_{t,x} u = 0, \quad (A_0)$$

а матрица $U^*(\tau, y; t, x)$ удовлетворяет однородной сопряженной системе

$$\tilde{L}_{t,x} u = 0. \quad (\tilde{A}_0)$$

6°. При $(t, x) \neq (\tau, y)$ $U(t, x; \tau, y)$ имеет непрерывные смешанные производные вида

$$\mathfrak{D}_x^l \mathfrak{D}_y^m U(t, x; \tau, y), \quad \frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{D}_y^m U(t, x; \tau, y), \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \mathfrak{D}_x^l U(t, x; \tau, y), \\ \frac{\partial^2}{\partial t \partial \tau} U(t, x; \tau, y), \quad 0 \leq l \leq 2p, \quad 0 \leq m \leq 2p.$$

Отметим нужную нам для дальнейшего формулу Грина:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{+\infty} [A^* L B - (\tilde{L} A)^* B] dx = \int_{-\infty}^{+\infty} A^* B \Big|_{t_1}^{t_2} dx \\ (0 \leq t_1 < t_2 \leq T), \quad (9)$$

где A — регулярная матрица, B — регулярная матрица или вектор.

Формула (9) справедлива, если A и B вместе с их производными по x_1, \dots, x_n до $(2p-1)$ -го порядка достаточно быстро стремятся к нулю на бесконечности.

Замечание. Мы считаем систему (A) параболической во всем слое $[0, T]$, хотя исследование свойств обобщенных решений будем производить, вообще говоря, в области Q , имеющей границу. Это не ограничивает общности получаемых нами результатов, так как параболическую систему, определенную в Q с достаточно гладкой границей, можно распространить на весь слой $[0, T]$ с сохранением параболичности и гладкости коэффициентов.

§ 2. Обобщенные решения однородных параболических систем

Для дальнейшего удобнее дать другое по форме определение обобщенного решения однородной системы (A_0) , заменив в равенстве (3) вектор-функцию $v(t, x)$ матрицей.

Суммируемая вектор-функция $u_0(t, x)$ называется обобщенным решением однородной системы (A_0) , если для любой регулярной матричной функции $V(t, x)$, равной нулю вне некоторой компактной части Q , справедливо равенство

$$\iint_Q (\tilde{L}V)^* u_0 dt dx = 0. \quad (10)$$

Очевидно, что это определение обобщенного решения эквивалентно данному выше.

Пусть $\psi(s)$ — $4p$ раз непрерывно дифференцируемая функция, определенная при $s \geq 0$, и пусть

$$\psi(s) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq s \leq 1, \\ 1 & \text{при } s \geq 2. \end{cases}$$

Положим при $h > 0$

$$V_h(t, x; \tau, y) = U^*(t, x; \tau, y) \psi(s_1) \psi(s_2),$$

где $s_1 = \frac{|x-y|^{2p}}{h^{2p}}$ и $s_2 = \frac{t-\tau}{h^{2p}}$. Рассмотрим матрицу

$$F_h(t, x; \tau, y) = (\tilde{L}_{\tau, y} V_h(t, x; \tau, y))^*.$$

Так как $U^*(t, x; \tau, y)$ по переменным τ, y удовлетворяет системе (\tilde{A}_0) , то $F_h(t, x; \tau, y)$ равна нулю вне цилиндра $D_h(t, x)$:

$$h \leq |x-y| \leq h\sqrt{2}, \quad h^{2p} \leq t-\tau \leq 2h^{2p}.$$

ЛЕММА 1. *Равномерно в слое $[\sigma, T]$ ($\sigma > 0$)*

$$\lim_{h \rightarrow +0} \iiint_{D_h(t, x)} F_h(t, x; \tau, y) dy d\tau = E. \quad (11)$$

Доказательство. Применяя формулу Грина, при достаточно малом h получаем:

$$\iiint_{D_h(t, x)} F_h(t, x; \tau, y) d\tau dy = \int_{t-2h^{2p}}^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} (\tilde{L}_{\tau, y} V_h(t, x; \tau, y))^* dy =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{t-2h^{2p}}^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} V_h^*(t, x; \tau, y) L_{\tau, y} E dy - \int_{-\infty}^{+\infty} V_h^*(t, x; \tau, y) \Big|_{t-2h^{2p}}^t dy = \\
&= - \int_{t-2h^{2p}}^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} V_h^*(t, x; \tau, y) A(\tau, y) dy + \\
&\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} U(t, x; t-2h^{2p}, y) dy = I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

В силу ограниченности $A(t, x)$ и оценок (7), (8),

$$|I_1| \leq C \int_{t-2h^{2p}}^t ds \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\gamma \left[\frac{|x-y|}{\sqrt{t-\tau}} \right]^{\frac{2p}{2p-1}} \right\} \frac{dy}{(t-\tau)^{\frac{n}{2p}}} = C_1 h^{2p}.$$

Из 4° следует, что равномерно в $[z, T]$

$$\lim_{h \rightarrow 0} I_2 = E.$$

Из полученных соотношений следует равенство (11).

ЛЕММА 2. В $D_h(t, x)$ имеет место неравенство:

$$|F_h(t, x; \tau, y)| \leq \frac{C}{h(t-\tau)^{1+\frac{n-1}{2p}}} \exp \left\{ -\gamma \left[\frac{|x-y|}{\sqrt{t-\tau}} \right]^{\frac{2p}{2p-1}} \right\}, \quad (12)$$

где C — положительная постоянная.

Доказательство. Имеем:

$$\begin{aligned}
F_h(t, x; \tau, y) &= (\tilde{L}_{\tau, y} \psi(s_1) \psi(s_2) U^*(t, x; \tau, y))^* = \\
&= \psi(s_1) \psi(s_2) (\tilde{L}_{\tau, y} U^*(t, x; \tau, y))^* - \psi(s_1) \frac{\partial \psi(s_2)}{\partial \tau} U(t, x; \tau, y) + \\
&\quad + \psi(s_2) \sum_{\substack{m+k \leq 2p \\ m \leq 2p-1}} C_{k, m}(\tau, y) \mathfrak{D}_y^k \psi(s_1) \mathfrak{D}_y^m U(t, x; \tau, y) = \\
&= -\psi(s_1) \frac{\partial \psi(s_2)}{\partial \tau} U(t, x; \tau, y) + \\
&\quad + \psi(s_2) \sum_{\substack{m+k \leq 2p \\ m \leq 2p-1}} C_{k, m}(\tau, y) \mathfrak{D}_y^k \psi(s_1) \mathfrak{D}_y^m U(t, x; \tau, y). \quad (13)
\end{aligned}$$

где $C_{k, m}(\tau, y)$ — ограниченные матрицы.

В $D_h(t, x)$ имеем:

$$\left| \frac{\partial \psi(s_2)}{\partial \tau} \right| = \left| \frac{\partial \psi(s_2)}{\partial s_2} \right| \frac{1}{h^{2p}} \leq \frac{C_1}{h^{2p}} \leq \frac{C_2}{h(t-\tau)^{\frac{2p-1}{27}}}$$

Отсюда

$$|\psi(s_1) \frac{\partial \psi(s_2)}{\partial \tau} U(t, x; \tau, y)| \leq \frac{C_3}{h(t-\tau)^{1+\frac{n-1}{2p}}} \exp \left\{ -\gamma \left[\frac{|x-y|}{\sqrt{t-\tau}} \right]^{\frac{2p}{2p-1}} \right\}. \quad (14)$$

Далее,

$$\mathfrak{D}_y^k \psi(s_1) = P(s_1),$$

где $P(s_1)$ — многочлен относительно производных от s_1 по y_1, \dots, y_n с ограниченными коэффициентами; при этом сумма порядков производных в каждом из одночленов $P(s_1)$ равна k .

Легко подсчитать, что в $D_h(t, x)$

$$|\mathfrak{D}_y^l s_1| \leq \frac{C_4}{h^l}.$$

Поэтому

$$|\mathfrak{D}_y^k \psi(s_1)| \leq \frac{C_5}{h^k} \leq \frac{C_6}{h(t-\tau)^{\frac{k-1}{2p}}}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} |\mathfrak{D}_y^k \psi(s_1) \mathfrak{D}_y^m U(t, x; \tau, y)| &\leq \frac{C_7}{h(t-\tau)^{\frac{n+k+m-1}{2p}}} \exp \left\{ -\eta \left[\frac{|x-y|}{\sqrt{t-\tau}} \right]^{\frac{2p}{2p-1}} \right\} \leq \\ &\leq \frac{C_8}{h(t-\tau)^{1+\frac{n-1}{2p}}} \exp \left\{ -\eta \left[\frac{|x-y|}{\sqrt{t-\tau}} \right]^{\frac{2p}{2p-1}} \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Из (13) — (15) следует (12).

ЛЕММА 3. Пусть $\varphi(t, x)$ суммируема по $[0, T]$. Положим

$$\varphi_h(t, x) = \int_0^t \int_{[0, T]} F_h(t, x; \tau, y) \varphi(\tau, y) d\tau dy$$

и пусть $\sigma > 0$. Тогда

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\varphi_h(t, x) - \varphi(t, x)\|_{L^{(1)}(\sigma, T)} = 0, \quad (16)$$

где

$$\|f(t, x)\|_{L^{(1)}(\sigma, T)} = \int_{[\sigma, T]} |f(t, x)| dt dx.$$

Доказательство. Возьмем $h > 0$ столь малым, чтобы $2h^{2p} < \sigma$. Тогда при любых $(t, x) \in [\sigma, T]$ область $D_h(t, x)$ принадлежит $[0, T]$. Поэтому

$$\varphi_h(t, x) = \int_{D_h(t, x)} F_h(t, x; \tau, y) \varphi(\tau, y) dy d\tau.$$

Далее, имеем:

$$\begin{aligned} \varphi_h(t, x) - \varphi(t, x) &= \int_{D_h(t, x)} F_h(t, x; \tau, y) [\varphi(\tau, y) - \varphi(t, x)] d\tau dy + \\ &+ \left[\int_{D_h(t, x)} F_h(t, x; \tau, y) d\tau dy - E \right] \varphi(t, x) = \psi_h^{(1)}(t, x) + \psi_h^{(2)}(t, x). \end{aligned} \quad (17)$$

Пусть $\varepsilon > 0$. По лемме 1, найдется такое $\delta > 0$, что при $h < \delta$

$$\left| \iiint_{D_h(t, x)} F_h(t, x; \tau, y) d\tau dy - E \right| < \varepsilon$$

для всех точек из $[\sigma, T]$. Поэтому при $h < \delta$

$$\|\phi_h^{(2)}(t, x)\|_{L^{(1)}(\sigma, T)} < C_1 \varepsilon \|\varphi\|_{L^{(1)}(0, T)}. \quad (18)$$

По лемме 2,

$$\begin{aligned} |\phi_h^{(1)}(t, x)| &\leq \frac{C}{h} \int_{t-2h^{2p}}^t d\tau \int \cdots \int_{\substack{|x-y| \leq h\sqrt[2p]{2}}} \exp \left\{ -\eta \left[\frac{|x-y|}{\sqrt[2p]{t-\tau}} \right]^{2p-1} \right\} \\ &\quad \left| \varphi(\tau, y) - \varphi(t, x) \right| \frac{dy}{(t-\tau)^{1+\frac{n-1}{2p}}} = \\ &= \frac{C}{h} \int_0^{2h^{2p}} ds \int \cdots \int_{\substack{|z| \leq h\sqrt[2p]{2}}} \exp \left\{ -\eta \left[\frac{|z|}{\sqrt[2p]{s}} \right]^{2p-1} \right\} \\ &\quad \left| \varphi(t-s, x+z) - \varphi(t, x) \right| \frac{dz}{s^{1+\frac{n-1}{2p}}}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \|\phi_h^{(1)}(t, x)\|_{L^{(1)}(\sigma, T)} &\leq \frac{C}{h} \int_0^{2h^{2p}} ds \int \cdots \int_{\substack{|z| \leq h\sqrt[2p]{2}}} \exp \left\{ -\eta \left[\frac{|z|}{\sqrt[2p]{s}} \right]^{2p-1} \right\} \Phi(s, z) \frac{dz}{s^{1+\frac{n-1}{2p}}} \leq \\ &\leq \sup_{\substack{|z| \leq h\sqrt[2p]{2} \\ |s| \leq 2h^{2p}}} \Phi(s, z) \frac{C}{h} \int_0^{2h^{2p}} ds \int \cdots \int_{\substack{|z| \leq h\sqrt[2p]{2}}} \exp \left\{ -\eta \left[\frac{|z|}{\sqrt[2p]{s}} \right]^{2p-1} \right\} \frac{dz}{s^{1+\frac{n-1}{2p}}} = C_1 \sup_{\substack{|z| \leq h\sqrt[2p]{2} \\ |s| \leq 2h^{2p}}} \Phi(s, z), \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\Phi(s, z) = \iint_{[0, T]} |\varphi(t-s, x+z) - \varphi(t, x)| dt dx.$$

Так как

$$\lim_{\substack{|z| \rightarrow 0 \\ s \rightarrow 0}} \Phi(s, z) = 0,$$

то из (19) следует, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\phi_h^{(1)}(t, x)\|_{L^{(1)}(\sigma, T)} = 0.$$

Отсюда и из (17) — (19) следует (16).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $u_0(t, x)$ — суммируемое по Q обобщенное решение однородной системы A_0 . Тогда $u_0(t, x)$ эквивалентно некоторому регулярному внутри Q решению системы (A_0) .

Доказательство. Пусть (t, x) — внутренняя точка Q . Рассмотрим при достаточно малом h

$$u_h(t, x) = \iiint_Q F_h(t, x; \tau, y) u_0(\tau, y) dy d\tau.$$

Из (10) следует, что при $h_1 < h_2$

$$\begin{aligned} u_{h_2}(t, x) - u_{h_1}(t, x) &= \\ &= \iiint_Q [\tilde{L}(V_{h_2}(t, x; \tau, y) - V_{h_1}(t, x; \tau, y))] u_0(\tau, y) d\tau dy = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

ибо

$$V_{h_2}(t, x; \tau, y) - V_{h_1}(t, x; \tau, y) = 0$$

вне области $D_{h_1}(t, x) + D_{h_2}(t, x)$. По лемме 3.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h(t, x) - u_0(t, x)\|_{Q'} = 0, \quad (21)$$

где Q' — любая подобласть области Q . Из (20) и (21) следует, что почти всюду внутри Q

$$u_0(t, x) = u_h^*(t, x) = \iiint_Q F_h(t, x; \tau, y) u_0'(\tau, y) d\tau dy \quad (22)$$

при достаточно малом h . Так как, согласно 6°, $U(t, x; \tau, y)$ имеет непрерывные смешанные производные, то $u_h(t, x)$ имеет непрерывные производные, входящие в (A_0) , которые можно получить формальным дифференцированием под знаком интеграла (22). Отсюда следует, что $u_0(t, x)$ является регулярным решением системы (A_0) .

Для непрерывных обобщенных решений уравнения теплопроводности теорема 1 была доказана С. Л. Соболевым [см. (2), стр. 301—306]. Примененный нами метод доказательства теоремы 1 является развитием метода С. Л. Соболева.

Как это обычно принято, будем считать, что вектор-функции, совпадающие почти всюду, тождественны.

Введем обычным образом функциональное пространство $L^{(q)}(Q)$ — пространство суммируемых по Q со степенью $q \geq 1$ вектор-функций $u(t, x)$ с нормой

$$\|u(t, x)\|_{L^{(q)}(Q)} = \left[\iiint_Q |u(t, x)|^q dt dx \right]^{1/q}.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $M^{(q)}(Q)$ — линейное многообразие всех обобщенных решений системы (A_0) , принадлежащих $L^{(q)}(Q)$. Тогда:

- 1) $M^{(q)}(Q)$ является подпространством $L^{(q)}(Q)$; оно состоит из вектор-функций $u_0(t, x)$, являющихся внутри Q регулярными решениями (A_0) .
- 2) Слабая сходимость в $M^{(q)}(Q)$ последовательности $u_{0,m}(t, x)$ влечет за собой сходимость $u_{0,m}(t, x)$ и всех ее производных, входящих в (A_0) , в каждой внутренней точке Q .

3) Сильная сходимость в $M^{(q)}(Q)$ последовательности $u_{0m}(t, x)$ влечет за собой равномерную сходимость $u_{0,m}(t, x)$ и всех ее производных, входящих в (Λ_0) , со всякой компактной части области Q .

Доказательство. Пусть $u_{0,m}(t, x)$ — последовательность из $M^{(q)}(Q)$, сходящаяся к $u_0(t, x)$. В силу полноты $L^{(q)}(Q)$,

$$u_0(t, x) \in L^{(q)}(Q). \quad (23)$$

Из определения $u_{0,m}(t, x)$ следует, что для любой регулярной вектор-функции $v(t, x)$, равной нулю в граничной полоске Q ,

$$\iiint_Q (u_{0,m}, \tilde{L}v) dt dx = 0.$$

Переходя в этом равенстве к пределу, получим;

$$\iiint_Q (u_0, \tilde{L}v) dt dx = 0. \quad (24)$$

Из (23) и (24) следует, что $u_0(t, x) \in M^{(q)}(Q)$ и, следовательно, $M^{(q)}(Q)$ действительно является подпространством $L^{(q)}(Q)$.

Регулярность элементов $M^{(q)}(Q)$ доказана выше.

Пусть теперь $u_{0,m}(t, x)$ слабо сходится к $u_0(t, x)$. Тогда для любой внутренней точки Q

$$u_{0,m}(t, x) = \iint_Q F_h(t, x; \tau, y) u_{0,m}(\tau, y) d\tau dy$$

при достаточно малом h . Дифференцируя это равенство, получаем:

$$\mathfrak{D}_x^l u_{0,m}(t, x) = \iint_Q \mathfrak{D}_x^l F_h(t, x; \tau, y) u_{0,m}(\tau, y) d\tau dy. \quad (25)$$

При фиксированном (t, x) равенство (25) определяет некоторый линейный функционал в $M^{(q)}(Q)$. Из слабой сходимости $u_{0,m}(t, x)$ следует, что

$$\mathfrak{D}_x^l u_{0,m}(t, x) \rightarrow \iint_Q \mathfrak{D}_x^l F_h(t, x; \tau, y) u_0(\tau, y) d\tau dy = \mathfrak{D}_x^l u_0(t, x).$$

Пусть теперь $u_{0,m}(t, x)$ сходится по норме к $u_0(t, x)$. Из (25) легко следует, что в любой замкнутой и ограниченной подобласти Q' области Q

$$|\mathfrak{D}_x^l u_0 - \mathfrak{D}_x^l u_{0,m}| \leq C(Q') \|u_0 - u_{0,m}\|_{L^{(q)}(Q)}.$$

Из этого неравенства вытекает равномерная сходимость последовательности $u_{0,m}$ и ее производных к u_0 и ее производным в Q' .

§ 3. Интегралы типа параболического потенциала

Введем следующие нормированные функциональные пространства:

1. $L^{(q)}(\Omega)$ ($q \geq 1$) — пространство вектор-функций $u(x)$, суммируемых по Ω со степенью q . Норму в этом пространстве положим равной

$$\|u(x)\|_{L^{(q)}(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} |u(x)|^q dx \right]^{\frac{1}{q}}.$$

2. $N^{(q)}(Q)$ ($q \geq 1$) — пространство вектор-функций $f(t, x)$, удовлетворяющих следующим условиям:

a) $f(t, x) \in L^{(q)}(\Omega)$ для почти всех $t \in [0, T]$.

b) Функция $\varphi(t) = \|f(t, x)\|_{L^{(q)}(\Omega)}$ суммируема по $[0, T]$.

Норму $f(t, x)$ в этом пространстве положим равной

$$\|f(t, x)\|_{N^{(q)}(Q)} = \int_0^T \varphi(t) dt.$$

3. $S^{(q)}(Q)$ ($q \geq 1$) — пространство вектор-функций из $N^{(q)}(Q)$, для которых $\varphi(t)$ в существенном ограничена. Норму $f(t, x)$ в этом пространстве положим равной

$$\|f(t, x)\|_{S^{(q)}(Q)} = \text{vrai sup } \varphi(t).$$

Пусть $f(t, x)$ суммируема по Q . Рассмотрим функцию

$$u_\lambda(t, x) = \int_0^t ds \int_\Omega \dots \int_\Omega \exp \left\{ -\gamma \left[\frac{|x-y|}{\sqrt{t-s}} \right]^{\frac{2p}{2p-1}} \right\} \frac{t(s, y) dy}{(t-s)^{\frac{n+\lambda}{2p}}}, \quad 0 \leq \lambda < 2p.$$

Мы будем называть $u_\lambda(t, x)$ интегралом типа параболического потенциала, а $f(t, x)$ — его плотностью. Как мы покажем, свойства такого интеграла аналогичны свойствам интеграла типа эллиптического потенциала, рассмотренного С. Л. Соболевым и В. И. Кондрашевым [см. (6), стр. 48—51].

ЛЕММА 4. При $q > \frac{n}{2p-\lambda}$ и $f(t, x) \in S^{(q)}(Q)$ функция $u_\lambda(t, x)$ непрерывна. При этом

$$|u_\lambda(t, x)| \leq C \|f\|_{S^{(q)}(Q)}, \quad (26)$$

где C — положительная постоянная, зависящая только от q, λ и T .

Доказательство. Докажем прежде всего оценку (26). По неравенству Гёльдера имеем:

$$\begin{aligned} |u_\lambda(t, x)| &\leq \|f\|_{S^{(q)}(Q)} \int_0^t \frac{ds}{(t-s)^{\frac{n+\lambda}{2p}}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -q' \gamma \left[\frac{|x-y|}{\sqrt{t-s}} \right]^{\frac{2p}{2p-1}} \right\} dy \right]^{\frac{1}{q'}} = \\ &= C(q') \|f\|_{S^{(q)}(Q)} \int_0^t \frac{(t-s)^{\frac{n}{2pq'}}}{(t-s)^{\frac{n+\lambda}{2p}}} ds. \end{aligned}$$

где $\frac{1}{q'} + \frac{1}{q} = 1$. Таким образом,

$$|u_\lambda(t, x)| \leq C(q') \|f\|_{S^{(q)}(Q)} \int_0^t \frac{ds}{(t-s)^{\frac{n}{2pq'} + \frac{\lambda}{2p}}}.$$

Отсюда легко следует (26).

Рассмотрим теперь $u_{\lambda}^{(h)}(t, x)$ при $h > 0$:

$$u_{\lambda}^{(h)}(t, x) = \int_0^{t-h} \frac{ds}{(t-s)^{\frac{n+\lambda}{2p}}} \int_{\Omega} \dots \int \exp \left\{ -\eta \left[\frac{|x-y|}{\sqrt{t-s}} \right]^{\frac{2p}{2p-1}} \right\} f(s, y) dy.$$

Легко видеть, что функция $u_{\lambda}^{(h)}(t, x)$ непрерывна при любом $h > 0$. Имеем, как выше:

$$\begin{aligned} |u_{\lambda}(t, x) - u_{\lambda}^{(h)}(t, x)| &\leq C(q') \|f(t, x)\|_{S(q)(Q)} \int_{t-h}^t \frac{ds}{(t-s)^{\frac{n}{2pq} + \frac{\lambda}{2p}}} = \\ &= C_1(q, \lambda) \|f\|_{S(q)(Q)} h^{1 - \frac{n}{2pq} - \frac{\lambda}{2p}}. \end{aligned}$$

Отсюда следует равномерная сходимость $u_{\lambda}^{(h)}$ к u_{λ} при $h \rightarrow 0$ и, следовательно, непрерывность $u_{\lambda}(t, x)$.

ЛЕММА 5. При $q \leq \frac{n}{2p-\lambda}$ и $f(t, x) \in S^{(q)}(Q)$ функция $u_{\lambda}(t, x) \in S^{(q_1)}(Q)$

с $q \leq q_1 < q^* = \frac{nq}{n-q(2p-\lambda)}$. При этом

$$\|u_{\lambda}\|_{S(q_1)(Q)} \leq C \|f\|_{S(q)(Q)}, \quad (27)$$

где C — положительная постоянная, зависящая только от q, q_1 и λ .

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что Ω совпадает со всем пространством. Тогда

$$u_{\lambda}(t, x) = \int_0^t ds \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int \exp \left\{ -\eta \left[\frac{|z|}{\sqrt{t-s}} \right]^{\frac{2p}{2p-1}} \right\} f(s, z+x) \frac{dz}{(t-s)^{\frac{n+\lambda}{2p}}}.$$

Отсюда следует:

$$\|u_{\lambda}(t, x)\|_{S(q)} \leq \int_0^t \frac{ds}{(t-s)^{\frac{n+\lambda}{2p}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int \exp \left\{ -\eta \left[\frac{|z|}{\sqrt{t-s}} \right]^{\frac{2p}{2p-1}} \right\} \Phi(s, z) dz, \quad (28)$$

где

$$\Phi(s, z) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |f(s, x+z)|^q dx \right]^{\frac{1}{q}} \leq \|f(t, x)\|_{S(q)}.$$

Отсюда и из (28) получаем (27) при $q_1 = q$.

Пусть теперь $q < q_1 < q^*$. По неравенству Гёльдера,

$$\begin{aligned} |u_{\lambda}(t, x)| &\leq \int_0^t \frac{ds}{(t-s)^{\frac{n+\lambda}{2p}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int |f(s, y)|^{\frac{q}{q_1}} \cdot \\ &\cdot \exp \left\{ -\frac{\eta}{2} \left[\frac{|x-y|}{\sqrt{t-s}} \right]^{\frac{2p}{2p-1}} \right\} |f(s, y)|^{1-\frac{q}{q_1}} \exp \left\{ -\frac{\eta}{2} \left[\frac{|x-y|}{\sqrt{t-s}} \right]^{\frac{2p}{2p-1}} \right\} dy \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_0^t \frac{ds}{(t-s)^{\frac{n+\lambda}{2p}}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |f(s, y)|^q \exp \left\{ -\eta \frac{q_1}{2} \left[\frac{|x-y|}{\sqrt{t-s}} \right]^{\frac{2p}{2p-1}} \right\} dy \right]^{\frac{1}{q_1}} \\ &\cdot \|f\|_{S(q)}^{1-\frac{q}{q_1}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\eta \frac{q'}{2} \left[\frac{|x-y|}{\sqrt{t-s}} \right]^{\frac{2p}{2p-1}} \right\} dy \right]^{\frac{1}{q'}} \leq C(q) \|f\|_{S(q)}^{1-\frac{q}{q_1}} \\ &\cdot \int_0^t \frac{ds}{(t-s)^{\frac{n}{2pq} + \frac{\lambda}{2p}}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |f(s, y)|^q \exp \left\{ -\frac{q_1 \eta}{2} \left[\frac{|x-y|}{\sqrt{t-s}} \right]^{\frac{2p}{2p-1}} \right\} dy \right]^{\frac{1}{q_1}}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} &\|u_\lambda(t, x)\|_{S(q)} \leq C(q) \|f\|_{S(q)}^{1-\frac{q}{q_1}} \\ &\cdot \int_0^t \frac{ds}{(t-s)^{\frac{n}{2pq} + \frac{\lambda}{2p}}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |f(s, y)|^q dy \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\eta \frac{q_1}{2} \left[\frac{|x-y|}{\sqrt{t-s}} \right]^{\frac{2p}{2p-1}} \right\} dx \right]^{\frac{1}{q_1}} \leq \\ &\leq C_1(q) \|f\|_{S(q)} \int_0^t \frac{ds}{(t-s)^{1-\frac{n}{2p}(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q^*})}}, \end{aligned}$$

что дает (27) при $q < q_1 < q^*$.

ЛЕММА 6. При $q > \frac{n}{2p-\lambda}$ и $f(t, x) \in N^{(q)}(Q)$ для функции

$$v_\lambda(x) = \int_0^T |u_\lambda(t, x)| dt$$

имеет место неравенство

$$v_\lambda(x) \leq C \|f\|_{N^{(q)}(Q)}, \quad (2')$$

где C — положительная постоянная, зависящая только от q, λ и T .

Доказательство. Имеем:

$$\begin{aligned} v_\lambda(x) &\leq \int_0^T ds \int_s^T \frac{dt}{(t-s)^{\frac{n+\lambda}{2p}}} \int_{\Omega} |f(s, y)| \exp \left\{ -\eta \left[\frac{|x-y|}{\sqrt{t-s}} \right]^{\frac{2p}{2p-1}} \right\} dy \leq \\ &\leq \int_0^T \|f(s, y)\|_{L^{(q)}(\Omega)} ds \int_s^T \frac{dt}{(t-s)^{\frac{n+\lambda}{2p}}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\eta q' \left[\frac{|x-y|}{\sqrt{t-s}} \right]^{\frac{2p}{2p-1}} \right\} dy \right]^{\frac{1}{q'}} = \\ &= C(q) \int_0^T \|f(s, y)\|_{L^{(q)}(\Omega)} ds \int_s^T \frac{dt}{(t-s)^{\frac{n}{2pq} + \frac{\lambda}{2p}}}. \end{aligned}$$

Отсюда следует неравенство (29).

ЛЕММА 7. При $q \leq \frac{n}{2p-\lambda}$ и $f(t, x) \in N^{(q)}(Q)$ функция $v_\lambda(t, x) \in L^{(q_1)}(\Omega)$ при $q \leq q_1 < q^*$. При этом

$$\|v_\lambda(x)\|_{L^{(q_1)}(\Omega)} \leq C \|f(t, x)\|_{N^{(q)}(Q)}. \quad (30)$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству лемм 5 и 6.

§ 4. Общее представление обобщенных решений неоднородных параболических систем

Рассмотрим интеграл

$$u_1(t, x) = \int_0^t ds \int_{\Omega} \dots \int U(t, x; s, y) f(s, y) dy.$$

Мы будем называть его объемным параболическим потенциалом с плотностью $f(s, y)$.

ЛЕММА 8. При $f(t, x) \in N^{(q)}(Q)$ вектор-функция $u_1(t, x)$ является обобщенным решением системы (A), принадлежащим $L^{(q)}(\Omega)$ при каждом фиксированном $t \in [0, T]$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что Ω совпадает со всем n -мерным пространством. Мы имеем:

$$\begin{aligned} |u_1(t, x)| &\leq C \int_0^t \frac{ds}{(t-s)^{\frac{n}{2p}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int \exp \left\{ -\gamma_l \left[\frac{|x-y|}{\sqrt{t-s}} \right]^{\frac{2p}{2p-1}} \right\} |f(s, y)| dy = \\ &= C \int_0^t \frac{ds}{(t-s)^{\frac{n}{2p}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int \exp \left\{ -\gamma_l \left[\frac{|z|}{\sqrt{t-s}} \right]^{\frac{2p}{2p-1}} \right\} |f(s, x+z)| dz. \end{aligned}$$

Отсюда следует:

$$\|u_1(t, x)\|_{L^{(q)}(\Omega)} \leq C \int_0^t \frac{ds}{(t-s)^{\frac{n}{2p}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int \exp \left\{ -\gamma_l \left[\frac{|z|}{\sqrt{t-s}} \right]^{\frac{2p}{2p-1}} \right\} \Phi(s, z) dz, \quad (31)$$

где

$$\Phi(s, z) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int |f(s, x+z)|^q dx \right]^{\frac{1}{q}} = \|f(s, x)\|_{L^{(q)}(\Omega)}. \quad (31')$$

Из (31') и (31) выводим:

$$\begin{aligned} \|u_1(t, x)\|_{L^{(q)}(\Omega)} &\leq C \int_0^t \|f(s, z)\|_{L^{(q)}(\Omega)} \frac{ds}{(t-s)^{\frac{n}{2p}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int \exp \left\{ -\gamma_l \left[\frac{|z|}{\sqrt{t-s}} \right]^{\frac{2p}{2p-1}} \right\} dz = \\ &= C_1 \int_0^t \|f(s, x)\|_{L^{(q)}(\Omega)} ds \leq C_1 \|f\|_{N^{(q)}(Q)}. \end{aligned}$$

Следовательно, $u_1(t, x) \in L^{(q)}(\Omega)$.

Пусть $v(t, x)$ — регулярная вектор-функция, равная нулю вне некоторой компактной части Q . Меняя порядок интегрирования и применяя

формулу Грина, получаем:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T ds \int_{\Omega} \dots \int (u_1(t, x), \tilde{L}v(t, x)) dx = \\
 & = \int_0^T dt \int_{\Omega} \dots \int \left(\int_0^t ds \int_{\Omega} \dots \int U(t, x; s, y) f(s, y) dy, \tilde{L}v \right) dx = \\
 & = \int_0^T ds \int_{\Omega} \dots \int dy \int_s^T dt \int_{\Omega} \dots \int (U(t, x; s, y) f(s, y), \tilde{L}v(t, x)) dx = \\
 & = \int_0^T ds \int_{\Omega} \dots \int dy \int_s^T dt \int_{\Omega} \dots \int (LU(t, x; s, y) f(s, y), v(t, x)) dx = \\
 & = \int_0^T ds \int_{\Omega} \dots \int dy \int_{\Omega} \dots \int (U(t, x; s, y) f(s, y), v(t, x)) \Big|_s^T dx = \\
 & = \int_0^T ds \int_{\Omega} \dots \int (f(s, y), v(s, y)) dy.
 \end{aligned}$$

Таким образом, $u_1(t, x)$ является обобщенным решением системы (A) и лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f(t, x) \in N^{(q)}(Q)$. Для того чтобы функция $u(t, x)$ была обобщенным решением системы (A), принадлежащим $L^{(q)}(Q)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$u(t, x) = u_0(t, x) + u_1(t, x), \quad (32)$$

где $u_0(t, x) \in M^{(q)}(Q)$.

Доказательство легко следует из леммы 8.

Так как свойства $u_0(t, x)$ нами уже изучены, то для полной характеристики обобщенных решений системы (A) остается рассмотреть объемный параболический потенциал при различных предположениях о его плотности.

§ 5. Объемный параболический потенциал с непрерывной плотностью

Условимся говорить, что $f(t, x)$ удовлетворяет в Q условию R , если:

а) $f(t, x)$ непрерывна в Q .

б) Функция

$$\lambda(u, Q) = \sup_{|x^{(1)} - x^{(2)}| \leq u} |f(t, x^{(1)}) - f(t, x^{(2)})| \quad ((t, x^{(1)}) \text{ и } (t, x^{(2)}) \in Q)$$

такова, что при некотором $a > 0$

$$\int_0^a \frac{\lambda(u, Q)}{u} du < +\infty.$$

Далее, условимся говорить, что $f(t, x)$ удовлетворяет в Q условию R' , если функция

$$\lambda_1(u, Q) = \sup_{|x^{(1)} - x^{(2)}| + \sqrt[2p]{t_1 - t_2} \leq u} |f(t_1, x_1^{(1)}) - f(t_2, x_2^{(2)})|$$

такова, что при некотором $a > 0$

$$\int_0^a \frac{\lambda_1(u, Q)}{u} du < +\infty.$$

ТЕОРЕМА 4. Если $f(t, x)$ удовлетворяет условию R , то $u_1(t, x)$ является внутри Q регулярным решением системы (А).

Доказательство этой теоремы будет дано в другой работе.

Выпишем формулы для вычисления старших производных объемного потенциала:

$$\mathfrak{D}_x^{2p} u_1(t, x) = \int_0^t ds \int_{\Omega'} \dots \int \mathfrak{D}_x^{2p} U(t, x; s, y) [f(s, y) - f(s, x)] dy + \\ + \int_0^t \mathfrak{D}_x^{2p} Z(t, x; s) f(s, x) ds + \int_0^t ds \int_{\Omega - \Omega'} \dots \int \mathfrak{D}_x^{2p} U(t, x; s, y) f(s, y) dy, \quad (33)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u_1(t, x) = \int_0^t ds \int_{\Omega'} \dots \int \frac{\partial}{\partial t} U(t, x; s, y) [f(s, y) - f(s, x)] dy + \\ + f(t, x) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} Z(t, x; s) f(s, x) ds + \\ + \int_0^t ds \int_{\Omega - \Omega'} \dots \int \frac{\partial}{\partial t} U(t, x; s, y) f(s, y) dy, \quad (34)$$

где Ω' — любая подобласть области Ω с гладкой границей, содержащая точку x , и

$$Z(t, x; s) = \int_{\Omega'} \dots \int U(t, x; s, y) dy.$$

Младшие производные по x_1, \dots, x_n получаются формальным дифференцированием под знаком интеграла.

Если $f(t, x)$ удовлетворяет условию R' , то формулы для старших производных объемного потенциала могут быть записаны в виде:

$$\mathfrak{D}_x^{2p} u_1(t, x) = \int_0^t ds \int_{\Omega'} \dots \int \mathfrak{D}_x^{2p} U(t, x; s, y) [f(s, y) - f(t, x)] dy + \\ + \left(\mathfrak{D}_x^{2p} \int_0^t Z(t, x; s) ds \right) f(t, x) + \int_0^t ds \int_{\Omega - \Omega'} \dots \int \mathfrak{D}_x^{2p} U(t, x; s, y) f(s, y) dy, \quad (35)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \int_0^t ds \int_{\Omega'} \dots \int \frac{\partial}{\partial t} U(t, x; s, y) [f(s, y) - f(t, x)] dy + \\ + \left(\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t Z(t, x; s) ds \right) f(t, x) + \int_0^t ds \int_{\Omega - \Omega'} \dots \int \frac{\partial}{\partial t} U(t, x; s, y) f(s, y) dy. \quad (36)$$

Отметим, что для объемного потенциала уравнения теплопроводности формулы (35) и (36) были впервые получены Э. Э. Леви (?) при несколько более узких предположениях.

Из теорем 1, 3 и 4 легко следует

ТЕОРЕМА 5. Если $f(t, x)$ удовлетворяет условию R , то всякое обобщенное решение системы (A) эквивалентно некоторому ее регулярному решению.

§ 6. Младшие производные объемного параболического потенциала с суммируемой плотностью

ТЕОРЕМА 6. Пусть $f(t, x) \in S^{(q)}(Q)$ ($q \geq 1$). Тогда

а) при $2p < \frac{n}{q}$ $u_1(t, x)$ имеет по x_1, \dots, x_n непрерывные и ограниченные производные порядка $l < 2p - \frac{n}{q}$;

б) при любом фиксированном $t \in [0, T]$ $u_1(t, x)$ имеет по Ω обобщенные производные по x_1, \dots, x_n порядков $l(2p - \frac{n}{q} \leq l \leq 2p - 1)$, суммируемые по Ω со степенью q_1 ($q \leq q_1 < q^*$). При этом

$$\|\mathfrak{D}_x^l u_1(t, x)\|_{L^{(q_1)}(\Omega)} \leq C \|f(t, x)\|_{S^{(q)}(Q)} \quad (37)$$

$$\left(2p - \frac{n}{q} \leq l \leq 2p - 1\right).$$

Доказательство легко следует из неравенств (7) и (8) и лемм 4 и 5. Из теорем 1, 3 и 6 немедленно следует

ТЕОРЕМА 7. Пусть $f(t, x) \in S^{(q)}(Q)$ ($q \geq 1$).^{*} Во всякой замкнутой и ограниченной подобласти Ω' области Ω любое принадлежащее $L^{(q)}(Q)$ обобщенное решение системы (A) имеет по Ω' обобщенные производные по x_1, \dots, x_n до порядка $2p - 1$, принадлежащие $L^{(n)}(\Omega')$ при любом фиксированном $t \in (0, T]$.

На самом деле суммируемость этих производных по Ω' имеет место с более высокой степенью.

Положим

$$w_1(x) = \int_0^T u_1(t, x) dt.$$

ТЕОРЕМА 8. Пусть $f(t, x) \in N^{(q)}(Q)$ ($q \geq 1$). Тогда

а) при $2p < \frac{n}{q}$ $w_1(x)$ имеет по Ω непрерывные и ограниченные производные по x_1, \dots, x_n порядка $l < 2p - \frac{n}{q}$;

б) $w_1(x)$ имеет по Ω обобщенные производные по x_1, \dots, x_n порядка $l(2p - \frac{n}{q} \leq l \leq 2p - 1)$, суммируемые со степенью q_1 ($q \leq q_1 < q^*$). При этом

$$\|\mathfrak{D}_x^l w_1(x)\|_{L^{(q_1)}(Q)} \leq C \|f(t, x)\|_{N^{(q)}(Q)}, \quad 2p - \frac{n}{q} \leq l \leq 2p - 1. \quad (38)$$

Доказательство следует из лемм 6 и 7.

§ 7. Старшие производные объемного параболического потенциала с суммируемой плотностью

Согласно равенству (4),

$$u_1(t, x) = \bar{u}_1(t, x) + \bar{\bar{u}}_1(t, x), \quad (39)$$

где

$$\bar{u}_1(t, x) = \int_0^t ds \int_{\Omega} U_0(t, x; s, y) f(s, y) dy,$$

$$\bar{\bar{u}}_1(t, x) = \int_0^t ds \int_{\Omega} L(t, x; s, y) f(s, y) dy.$$

ЛЕММА 9. Пусть $f(t, x) \in S^{(q)}(Q)$ ($q \geq 1$). Тогда $\bar{\bar{u}}_1(t, x)$ имеет по Ω обобщенные производные по x_1, \dots, x_n порядка $2p$. При этом

$$\|\mathfrak{D}_x^{2p} \bar{\bar{u}}_1(t, x)\|_{L^{(q)}(\Omega)} \leq C \|f(t, x)\|_{S^{(q)}(Q)}. \quad (40)$$

Доказательство этой леммы легко следует из (8) и леммы 5.

ЛЕММА 10. Пусть $f(t, x) \in N^{(q)}(Q)$. Тогда

$$\bar{\bar{w}}_1(x) = \int_0^T \bar{\bar{u}}_1(t, x) dt$$

имеет по Ω обобщенные производные по x_1, \dots, x_n порядка $2p$. При этом

$$\|\mathfrak{D}_x^{2p} \bar{\bar{w}}_1(x)\|_{L^{(q)}(\Omega)} \leq C \|f(t, x)\|_{N^{(q)}(Q)}. \quad (41)$$

Доказательство следует из (8) и леммы 7.

ЛЕММА 11. Пусть $W(t, \tau; x, \alpha)$ — фундаментальная матрица системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= (-1)^p \sum_{i_1, \dots, i_{2p}=1}^n A^{(i_1, \dots, i_{2p})}(t, x) \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_{2p}} W, \\ W(\tau, \tau; x, \alpha) &= E. \end{aligned} \quad (42)$$

Тогда

$$|\mathfrak{D}_x^k W(t, \tau; x, \alpha)| \leq C(\delta', T) |\alpha|^{-k} \exp\{-\delta' |\alpha|^{2p}(t - \tau)\}, \quad (43)$$

где δ' — произвольное положительное число, меньшее δ .

Доказательство. При $k=0$ неравенство (43) совпадает с неравенством (6) и поэтому может считаться доказанным. Пусть теперь (43)

справедливо для производных порядка меньше k . Дифференцируя (42) k раз по $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, получаем:

$$\frac{d}{dt} \mathfrak{D}_x^k W = (-1)^p \sum_{i_1, \dots, i_{2p}=1}^n A^{(i_1, \dots, i_{2p})}(t, x) \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_{2p}} \mathfrak{D}_x^k W + R(t, \tau; x, \alpha). \quad (44)$$

где

$$R(t, \tau; x, \alpha) = \sum_{l < k} M_l(t, x, \alpha) \mathfrak{D}_x^l W(t, \tau; x, \alpha)$$

и $M_l(t, x, \alpha)$ — многочлены относительно $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ степени $2p - (k - l)$. с ограниченными матричными коэффициентами.

Из неравенства (43) следует:

$$|R(t, \tau; x, \alpha)| \leq C_1(\delta', T) |\alpha|^{2p-k} \exp\{-\delta' |\alpha|^{2p}(t - \tau)\}. \quad (45)$$

Применяя к равенству (44) метод вариации произвольных постоянных и учитывая, что $\mathfrak{D}_x^k W(\tau, \tau; x, \alpha) = 0$ при $k \geq 1$, получаем:

$$\mathfrak{D}_x^k W(t, \tau; x, \alpha) = W(t, \tau; x, \alpha) \int_{\tau}^t R(s, \tau; x, \alpha) W^{-1}(s, \tau; x, \alpha) ds\}.$$

Применяя, далее, неравенства (6) и (45), находим:

$$|\mathfrak{D}_x^k W(t, \tau; x, \alpha)| \leq C_2(\delta', T) |\alpha|^{2p-k} (t - \tau) \exp\{-\delta' (t - \tau) |\alpha|^{2p}\},$$

что равносильно неравенству (43).

ТЕОРЕМА 9. Пусть старшие коэффициенты системы (A) зависят только от t , $f(t, x) = f(x)$ зависит только от x и $f(x) \in L^{(q)}(\Omega)$ ($1 < q < +\infty$). Тогда $u_1(t, x)$ имеет по Ω обобщенные производные по x_1, \dots, x_n порядка $2p$. При этом

$$\|\mathfrak{D}_x^{2p} u_1(t, x)\|_{L^{(q)}(\Omega)} \leq C \|f(x)\|_{L^{(q)}(\Omega)}. \quad (46)$$

Доказательство. Из леммы 9 следует, что теорему достаточно доказать только для $\bar{u}_1(t, x)$. Положим при $h > 0$

$$u_1^{(h)}(t, x) = \int_0^{t-h} ds \int_{\Omega} \dots \int_{\Omega} U_0(t, x; s, y) f(y) dy.$$

Легко видеть, что при $h \rightarrow 0$ $u_1^{(h)}(t, x)$ сходится в норме $L^{(q)}(\Omega)$ к $u_1(t, x)$ и что $u_1^{(h)}$ имеет по Ω обобщенные производные

$$\mathfrak{D}_x^{2p} u_1^{(h)}(t, x) = \int_0^{t-h} ds \int_{\Omega} \dots \int_{\Omega} \mathfrak{D}_y^{2p} U_0(t, x; s, y) f(y) dy,$$

суммируемые со степенью q по Ω . Покажем, что

$$\|\mathfrak{D}_x^{2p} u_1^{(h)}(t, x)\|_{L^{(q)}(\Omega)} \leq C \|f(x)\|_{L^{(q)}(\Omega)}, \quad (47)$$

где C — положительная постоянная, не зависящая от h .

Без ограничения общности можно считать, что Ω совпадает со всем пространством x_1, \dots, x_n , а $f(x)$ — финитная вектор-функция. Меняя порядок интегрирования и учитывая (5), получаем:

$$\mathfrak{D}_x^{2p} u_1^{(h)}(t, x) = \frac{(-1)^p}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha, x)} \psi_h(t, \alpha) f(\hat{\alpha}) d\alpha, \quad (48)$$

где

$$\psi_h(t, \alpha) = \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_{2p}} \int_0^{t-h} W(t, s; \alpha) ds$$

и

$$f(\hat{\alpha}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\alpha, y)} f(y) dy$$

— преобразование Фурье для функции $f(y)$.

Мы применим доказанную С. Г. Михлиным ⁽⁸⁾ теорему о мультипликаторах интеграла Фурье. Для этого достаточно доказать, что при любом m

$$|\mathfrak{D}_\alpha^m \psi_h(t, \alpha)| \leq M |\alpha|^{-m}, \quad (49)$$

где M — положительная постоянная. Мы имеем:

$$\mathfrak{D}_\alpha^m \psi_h(t, \alpha) = \sum_{k \leq m} \mathfrak{D}_\alpha^{m-k} (\alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_{2p}}) \mathfrak{D}_\alpha^k \int_0^{t-h} W(t, s; \alpha) ds.$$

Применяя неравенство (43), получаем:

$$\begin{aligned} |\mathfrak{D}_\alpha^m \psi_h(t, \alpha)| &\leq C_1(\delta', T) |\alpha|^{2p-m} \int_0^{t-h} e^{-\delta'(t-s)} |\alpha|^{2p} ds \leq \\ &\leq C_1(\delta', T) |\alpha|^{2p-m} \int_0^t e^{-\delta'(t-s)} |\alpha|^{2p} ds \leq \frac{C_1(\delta', T)}{\delta'} |\alpha|^{-m}, \end{aligned}$$

и, таким образом, неравенство (49) доказано.

Применяя теперь теорему С. Г. Михлина, получаем (47). Из (47) и слабой компактности ограниченного в $L^{(q)}$ множества следует, что можно выбрать последовательность $\mathfrak{D}_x^{2p} u_1^{(h_m)}(t, x)$, слабо сходящуюся к некоторой вектор-функции $v(t, x) \in L^{(q)}$. Из слабой замкнутости оператора обобщенного дифференцирования [см ⁽⁶⁾, стр. 42—43] следует, что $\bar{u}_1(t, x)$ имеет обобщенную производную порядка $2p$, равную $v(t, x)$. Переходя к пределу в (47), получаем (46).

ТЕОРЕМА 10. Пусть старшие коэффициенты системы (A) не зависят от x и $f(t, x) \in N^{(q)}(Q)$ ($1 < q < +\infty$). Тогда $w_1(x)$ имеет по x_1, \dots, x_n обобщенные производные порядка $2p$. При этом

$$\|w_1(x)\|_{L^{(q)}(\Omega)} \leq C \|f(t, x)\|_{N^{(q)}(Q)}. \quad (50)$$

Доказательство. Из леммы 10 следует, что теорему достаточно

доказать для $\bar{w}_1(x) = \int_0^T \bar{u}_1(t, x) dt$. Положим при $h > 0$

$$w_1^{(h)}(x) = \int_0^T dt \int_0^t ds \int_{\Omega} \cdots \int_{\Omega} U_0(t+h, x; s, y) f(s, y) dy.$$

Легко видеть, что при $h \rightarrow 0$ $w_1^{(h)}(x)$ сходится в норме $L^{(q)}(\Omega)$ к $\bar{w}_1(x)$. Кроме того, $w_1^{(h)}(x)$ имеет по x_1, \dots, x_n обобщенные производные

$$\mathfrak{D}_x^{2p} w_1^{(h)}(x) = \int_0^T dy \int_0^t ds \int_{\Omega} \cdots \int_{\Omega} \mathfrak{D}_x^{2p} U_0(t+h, x; s, y) f(s, y) dy,$$

принадлежащие $L^{(q)}(\Omega)$. Покажем, что

$$\|\mathfrak{D}_x^{2p} w_1^{(h)}(x)\|_{L^{(q)}(\Omega)} \leq C \|f(t, x)\|_{N^{(q)}(Q)}, \quad (51)$$

где C — положительная постоянная, не зависящая от h .

Пусть $\varphi(x) \in L^{(q')}(\Omega)$ ($q' = \frac{q}{q-1}$) и равна нулю вне Ω . Меняя порядок интегрирования, получаем:

$$\int_{\Omega} \cdots \int_{\Omega} (\mathfrak{D}_x w_1^{(h)}(x), \varphi(x)) dx = \int_0^T ds \int_{\Omega} \cdots \int_{\Omega} (\psi_h(s, y), f(s, y)) dy, \quad (52)$$

где

$$\psi_h(s, y) = \int_s^T dt \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{D}_x^{2p} U_0^*(t+h, x; s, y) \varphi(x) dx$$

и U_0^* — матрица, сопряженная с U_0 .

Снова меняя порядок интегрирования, получаем:

$$\psi_h(s, y) = \frac{(-1)^p}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha, y)} \Phi_h(s, y) \varphi(\hat{\alpha}) d\alpha,$$

где

$$\Phi_h(s, \alpha) = \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_{2p}} \int_s^T \bar{W}^*(t+h, s; \alpha) dt.$$

Применяя неравенство (43), находим:

$$\begin{aligned} |\mathfrak{D}_\alpha^m \Phi_h(s, \alpha)| &\leq C_1(\delta', T) |\alpha|^{2p-m} \int_s^T e^{-\delta'(t+h-s)} |\alpha|^{2p} dt \leq \\ &\leq C_1(\delta', T) |\alpha|^{2p-m} \int_s^T e^{-\delta'(t-s)} |\alpha|^{2p} dt \leq \frac{C_1(\delta', T)}{\delta'} |\alpha|^{-m}. \end{aligned}$$

Отсюда и из теоремы С. Г. Михлина получаем:

$$\|\psi_h(s, y)\|_{L^{q'}} \leq C_2 \|\varphi(x)\|_{L^{q'}}. \quad (53)$$

Применяя к (52) неравенство Гёльдера и неравенство (53), получаем:

$$\left| \int_{\Omega} \dots \int (\mathfrak{D}_x^{2p} w_1^{(h)}(x), \varphi(x)) dx \right| \leq \int_0^T \|\psi_h(s, y)\|_{L^{q'(\Omega)}} \|f(s, y)\|_{L^{q(\Omega)}} ds \leq \\ \leq C_2 \|\varphi(x)\|_{L^{q'(\Omega)}} \int_0^T \|f(s, y)\|_{L^{q(\Omega)}} ds, \quad q' = \frac{q}{q-1}.$$

Отсюда, по известной теореме функционального анализа, следует (54).

Окончание доказательства теоремы проводится теперь так же, как окончание доказательства теоремы 9.

Из теорем 1, 3 и 9 следует

ТЕОРЕМА 11. В условиях теоремы 9 всякое принадлежащее $L^{(q)}(Q)$ ($1 < q < +\infty$) обобщенное решение системы (A) имеет по любой компактной подобласти Ω' области Ω и при каждом фиксированном $t \in (0, T)$ обобщенные производные по x_1, \dots, x_n порядка $2p$, суммируемые со степенью q по Ω' .

§ 8. Правильные эллиптические системы

Рассмотрим в пространстве x_1, \dots, x_n систему дифференциальных уравнений

$$Mu \equiv \sum_{r=1}^{2p} \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^n A^{(i_1, \dots, i_r)}(x) \frac{\partial^r u}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_r}} + A(x)u = f(x). \quad (C)$$

Пусть Ω — область n -мерного пространства и $f(x)$ суммируема по Ω . Суммируемая по Ω вектор-функция $u = u(x)$ называется обобщенным решением системы (C), если для любой регулярной вектор-функции $v = v(x)$, равной нулю в граничной полоске Ω , имеет место равенство

$$\int_{\Omega} \dots \int (u, \tilde{M}v) dx = \int_{\Omega} \dots \int (f, v) dx, \quad (54)$$

где

$$\tilde{M} = \sum_{r=1}^{2p} (-1)^r \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^n \frac{\partial^r}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_r}} (A^{(i_1, \dots, i_r)^*}(x)) + A^*(x)$$

— дифференциальный оператор, сопряженный по Лагранжу с M .

Вместе с системой (C) рассмотрим всевозможные системы, получаемые из нее умножением слева на достаточно гладкие и неособенные матрицы $B(x)$. Совокупность всех таких систем образует класс систем, который мы обозначим через K .

ЛЕММА 12. Совокупность всех обобщенных решений какой-либо системы класса K совпадает с совокупностью всех обобщенных решений любой другой системы того же класса.

Доказательство. Пусть

$$M_1 u = B(x) M u = \sum_{r=1}^{2p} \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^n B(x) A^{(i_1, \dots, i_r)}(x) \frac{\partial^r u}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_r}} + B(x) A(x) u = B(x) f(x) \quad (C_1)$$

— какая-либо система класса K , отличная от (C). Дифференциальный оператор, сопряженный с M_1 , имеет вид:

$$\tilde{M}_1 = \sum_{r=1}^{2p} (-1)^r \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^n \frac{\partial^r}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_r}} (A^{(i_1, \dots, i_r)*}(x) B^*(x)) + A^*(x) B^*(x).$$

Пусть $u = u(x)$ — обобщенное решение системы (C) и $v(x)$ — произвольная регулярная вектор-функция, равная нулю в граничной полоске Ω . Очевидно, что $v_1(x) = B^*(x) v(x)$ — вектор-функция того же типа, что $v(x)$. Поэтому

$$\int \dots \int_{\Omega} (u, \tilde{M} v_1) dx = \int \dots \int_{\Omega} (f, v_1) dx.$$

Но $\tilde{M} v_1 = \tilde{M}_1 v$, $(f, v_1) = (Bf, v)$. Следовательно,

$$\int \dots \int_{\Omega} (u, \tilde{M}_1 v) dx = \int \dots \int_{\Omega} (Bf, v) dx.$$

Отсюда следует, что $u = u(x)$ является также обобщенным решением системы (C_1) .

Поменяв местами (C) и (C_1) , получим, что всякое обобщенное решение системы (C_1) является также обобщенным решением системы (C).

Обозначим через \bar{K} класс дифференциальных операторов для систем класса K . Предположим, что в \bar{K} есть хотя бы один дифференциальный оператор (обозначим его через M), обладающий тем свойством, что система

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - Mu = -f(x) \quad (\bar{A})$$

— параболическая. Легко видеть, что в этом случае система (C) (а с ней и все системы класса K) — эллиптическая в смысле И. Г. Петровского⁽⁹⁾. Полученные таким способом эллиптические системы мы будем называть правильными.

Класс правильных эллиптических систем содержит класс сильно эллиптических систем М. И. Вишика⁽¹⁰⁾.

Легко видеть, что одно эллиптическое в смысле И. Г. Петровского уравнение с достаточно гладкими коэффициентами является правильным в любой конечной области.

§ 9. Обобщенные решения правильных эллиптических систем

ЛЕММА 13. Множество всех обобщенных решений системы (C) совпадает с множеством всех обобщенных решений системы (\bar{A}) , не зависящих от t .

Доказательство. Пусть $u(x)$ — не зависящее от t обобщенное решение системы (\bar{A}) и $v(x)$ — произвольная регулярная вектор-функция,

равная нулю в граничной полоске Ω . Пусть, далее, $\sigma(t)$ — непрерывно-дифференцируемая в $[0, T]$ функция, равная нулю вне некоторого подинтервала интервала $(0, T)$ и такая, что $\int_0^T \sigma(t) dt \neq 0$. Положим $w(t, x) =$

$= \sigma(t) v(x)$. Так как $u(x)$ является обобщенным решением системы (A), то

$$\int_0^T dt \int_{\Omega} \dots \int (u(x), \tilde{L}w(t, x)) dx = - \int_0^T dt \int_{\Omega} \dots \int (f(x), w(t, x)) dx. \quad (55)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^T dt \int_{\Omega} \dots \int (u(x), \tilde{L}w(t, x)) dx &= - \int_{\Omega} \dots \int (u(x), v(x)) dx \int_0^T \frac{d}{dt} \sigma(t) dt - \\ &- \int_{\Omega} \dots \int (u(x), \tilde{M}v(x)) dx \int_0^T \sigma(t) dt = - \int_0^T \sigma(t) dt \int_{\Omega} \dots \int (u(x), \tilde{M}v(x)) dx. \end{aligned} \quad (56)$$

Далее,

$$\int_0^T dt \int_{\Omega} \dots \int (f(x), w(t, x)) dx = \int_0^T \sigma(t) dt \int_{\Omega} \dots \int (f(x), v(x)) dx. \quad (57)$$

Из (55) — (57) следует, что

$$\int_0^T \sigma(t) dt \int_{\Omega} \dots \int (u(x), \tilde{M}v(x)) dx = \int_0^T \sigma(t) dt \int_{\Omega} \dots \int (f(x), v(x)) dx.$$

Отсюда следует (54). Таким образом, доказано, что не зависящее от t обобщенное решение системы (A) является обобщенным решением системы (C).

Пусть теперь $u(x)$ является обобщенным решением системы (C) и $w(t, x)$ — любая регулярная в Q вектор-функция, равная нулю в граничной полосе Q . Положим

$$v(x) = \int_0^T w(t, x) dt.$$

Очевидно, что $v(x)$ регулярна в Ω и равна нулю в ее граничной полосе. Поэтому

$$\int_{\Omega} \dots \int (u(x), \tilde{M}v(x)) dx = \int_{\Omega} \dots \int (f(x), v(x)) dx; \quad (58)$$

но

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \dots \int (u(x), \tilde{M}v(x)) dx &= \int_0^T dt \int_{\Omega} \dots \int (u(x), \tilde{M}w(t, x)) dx + \\ &+ \int_0^T dt \int_{\Omega} \dots \int (u(x), \frac{\partial}{\partial t} w(t, x)) dx = - \int_Q \dots \int (u(x), \tilde{L}w(t, x)) dt dx, \\ \int_{\Omega} \dots \int (f(x), v(x)) dx &= \int_Q \dots \int (f(x), w(t, x)) dt dx. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\iiint_Q (u(x), \tilde{L}w(t, x)) dt dx = - \iiint_Q (f(x), w(t, x)) dt dx$$

и, следовательно, $u(x)$ является обобщенным решением системы (\bar{A}) .

Пользуясь доказанной леммой и полученными ранее свойствами обобщенных решений параболических систем, мы легко установим соответствующие свойства решений правильных эллиптических систем.

Из теоремы 2 следует

ТЕОРЕМА 12. Пусть $R^{(q)}(\Omega)$ ($q \geq 1$) — линейное многообразие всех обобщенных решений однородной системы

$$Mu = 0, \quad (C_0)$$

принадлежащих $L^{(q)}(\Omega)$. Тогда

1) $R^{(q)}(\Omega)$ является подпространством $L^{(q)}(\Omega)$: оно состоит из вектор-функций $u_0(x)$, являющихся внутри Ω регулярными решениями сист. мы (C_0) .

2) Слабая сходимость последовательности $u_{0,m}(x)$ в $R^{(q)}(\Omega)$ влечет за собой сходимость $u_{0,m}(x)$ и всех ее производных, входящих в (C_0) , в каждой внутренней точке Ω .

3) Сильная сходимость $u_{0,m}(x)$ в $R^{(q)}(\Omega)$ влечет за собой равномерную сходимость $u_{0,m}(x)$ и всех ее производных, входящих в (C_0) , в любой замкнутой подобласти области Ω .

Теорема 12 другим способом доказана Б. Пини ⁽¹⁵⁾, Браудером ⁽¹⁶⁾ и другими авторами.

ТЕОРЕМА 13. Пусть $f(x) \in L^{(q)}(\Omega)$. Всякое принадлежащее $L^{(q)}(\Omega)$ обобщенное решение системы (C) имеет в любой ограниченной подобласти Ω' области Ω обобщенные производные до порядка $2p - 1$, принадлежащие $L^{(q)}(\Omega')$.

Теорема 13 вытекает из теоремы 7. На самом деле суммируемость обобщенных производных по Ω' имеет место с более высокой степенью. Из теоремы 11 следует

ТЕОРЕМА 14. Пусть старшие коэффициенты системы (C) постоянны и $f(x) \in L^{(q)}(\Omega)$ ($1 < q < +\infty$). Всякое принадлежащее $L^{(q)}(\Omega)$ обобщенное решение системы (C) имеет по Ω' суммируемые со степенью q обобщенные производные порядка $2p$.

Для случая $q = 2$ более сильные результаты получены другими авторами иными методами. Отметим некоторые из них. С. Г. Михлин [см. ⁽¹²⁾, стр. 110—111] доказал, что всякое квадратично суммируемое обобщенное решение самосопряженного эллиптического уравнения 2-го порядка с трижды непрерывно дифференцируемыми коэффициентами и $f(x) \in L^{(2)}(\Omega)$ имеет по Ω' квадратично суммируемые обобщенные вторые производные. К. Фридрихс ⁽¹³⁾ доказал, что всякое обобщенное решение формально самосопряженной эллиптической системы порядка $2p$ с p раз непрерывно дифференцируемыми коэффициентами и $f(x) \in L^{(2)}(\Omega)$, имеющее квадратично суммируемые обобщенные производные порядка p , имеет также квадратично суммируемые по Ω' обобщенные производные порядка $2p$.

О. А. Ладыженская ⁽¹⁷⁾ показала, что для эллиптического уравнения 2-го порядка с непрерывно дифференцируемыми коэффициентами и

$f(x) \in L^{(2)}(\Omega)$ в области Ω с достаточно гладкой границей существует решение первой краевой задачи с однородными краевыми условиями, имеющее в замкнутой области Ω квадратично суммируемые обобщенные производные, входящие в уравнение. Аналогичные результаты получены О. В. Гусевой⁽¹⁸⁾ для сильно эллиптической системы. О. А. Ладыженской [см. ⁽¹⁹⁾, ⁽²⁰⁾] получены аналогичные результаты для сильно параболической системы при $f(t, x) \in L^{(2)}(Q)$.

Поступило
6.XII.1956

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Петровский И. Г., О проблеме Cauchy для системы линейных дифференциальных уравнений с частными производными в области неаналитических функций, Бюллетень Московского гос. университета, серия А, 1: 7, 1938.
- ² Соболев С. Л., Методы математической физики, М. — Л., 1947
- ³ Слободецкий Л. Н., Обобщенные решения параболических и эллиптических систем дифференциальных уравнений, Доклады Ак. наук СССР, 101, № 6 (1955), 997—1000.
- ⁴ Эйдельман С. Д., О задаче Коши для параболических систем, Доклады Ак. наук СССР, 98, № 6 (1954), 913—915.
- ⁵ Слободецкий Л. Н., О задаче Коши для неоднородных параболических систем, Доклады Ак. наук СССР, 101, № 5 (1955), 805—808.
- ⁶ Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа к математической физике, Ленинград, 1950.
- ⁷ Леви Э. Э., Sull'equazioni del calore, Ann. di mat., 3, 14 (1908), 187—264.
- ⁸ Михлин С. Г., О мультипликаторах интеграла Фурье, Доклады Ак. наук СССР, 109, № 4 (1956), 701—703.
- ⁹ Петровский И. Г., О некоторых проблемах теории уравнений с частными производными, Успехи матем. наук, т. 1, вып. 3—4 (1946), 44—70.
- ¹⁰ Вишик М. И., О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений, Матем. сборн., 29 (71):3 (1951), 615—676.
- ¹¹ Weyl H., The method of orthogonal projections in potential theory, Duke Math. Journ., 7 (1940), 414—444.
- ¹² Михлин С. Г., Проблема минимума квадратичного функционала, М. — Л., 1952.
- ¹³ Friedrichs K. O., On the differentiability of the solution of linear elliptic differential equations, Commun. Pure and App. Math., 6, № 3 (1953), 229—326.
- ¹⁴ Эйдельман С. Д., О фундаментальных решениях параболических систем, Матем. сборн., 38 (80):1 (1956), 51—92.
- ¹⁵ Pini B., Precisazioni a un ragionamento contenuto in una mia nota sulle equazioni a derivate parziali di tipo ellittico, Ricerche mat., 3, No. 1 (1954), 3—12.
- ¹⁶ Browder F. E., Assumption of boundary values and Green's function in the Dirichlet problem for general linear elliptic equation, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 39, № 3 (1953), 174—184.
- ¹⁷ Ладыженская О. А., О замыкании эллиптического оператора, Доклады Ак. наук СССР, 79, № 5 (1951), 723—725.
- ¹⁸ Гусева О. В., О краевых задачах для сильно эллиптических систем, Доклады Ак. наук СССР, 102, № 6 (1955), 1069—1072.
- ¹⁹ Ладыженская О. А., О разрешимости краевых задач для уравнений параболического и гиперболического типов, Доклады Ак. наук СССР, 97, № 3 (1954), 395—398.
- ²⁰ Ладыженская О. А., О решении нестационарных операторных уравнений различных типов, Доклады Ак. наук СССР, 102, № 2 (1955), 207—210.

И. Д. СТУПИНА

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ CA_2 -ОПЕРАЦИИ

(Представлено академиком П. С. Александровым)

В работе показано, что общая теорема о накрытии множеств имеет место для CA_2 -операции над CA_2 -множествами и, в духе непротиворечивости в системе аксиом теории множеств \sum К. Гёделя, над CA_n -множествами в случае точек p -значности, конечнозначности, счетнозначности, точек, определяемых множеством цепей жесткой приведенной базы CA_2 -операции, имеющим компактное замыкание.

Введение

Настоящая работа является продолжением ряда работ о накрытии множеств [см. (1) — (5)].

В работе показано существование вполне правильного отношения* между произвольным классом множеств Ξ и жесткой базой** CA_2 -операции и доказывается, что δs -операция $\Phi_{N_c}^{****}$, отбирающая точки, определяемые несчетным числом цепей жесткой базы CA_2 -операции, не мощнее CA_2 -операции.

В качестве следствий этих утверждений и общей теоремы о накрытии множеств [см. (3), теорема 1], в работе формулируется ряд предложений о накрытии множеств.

§ 1. CA_2 -операцией над системой множеств $\{E_{n_1 \dots n_k}^{m_1 \dots m_t}\}$ называется операция, дополнительная к A_2 -операции, т. е.

$$\begin{aligned} CA_2 \{E_{n_1 \dots n_k}^{m_1 \dots m_t}\} &= C[A_2 \{CE_{n_1 \dots n_k}^{m_1 \dots m_t}\}] = C \sum_{m_1 \dots m_t} \prod_{n_1 \dots n_k} \sum_{k, t} CE_{n_1 \dots n_k}^{m_1 \dots m_t} = \\ &= \prod_{m_1 \dots m_t} \sum_{n_1 \dots n_k} \prod_{k, t} E_{n_1 \dots n_k}^{m_1 \dots m_t} = \prod_{m_1 \dots m_t} \Phi_{N'} \left\{ \prod_t E_{\vee (n_1 \dots n_k)}^{m_1 \dots m_t} \right\} = \\ &= C\Phi_{\sigma}^{N''} \{CE_{\sigma [\vee (n_1 \dots n_k); \mu (m_1 \dots m_t)]}\} = \Phi_{\sigma}^{N''} \{E_{\sigma [\vee (n_1 \dots n_k); \mu (m_1 \dots m_t)]}\}, \end{aligned}$$

где N' — жесткая база A -операции, N'' — жесткая база A_2 -операции.

* Пусть N — некоторая база δs -операции. Через N^n обозначается множество всех цепей базы N , которые содержат натуральное число n . На совокупности баз N и $\{N^n\}$ построим d -систему K , содержащую все конечные пересечения баз этой системы.

Класс множеств Ξ и база N находятся во вполне правильном отношении и [см. (2), стр. 126], если:

- 1) класс множеств $\Phi_N(\Xi)$ инвариантен относительно счетных сумм и пересечений;
- 2) при любой базе $M \in K$ имеет место соотношение: $\Phi_M(\Xi) \subset \Phi_N(\Xi)$.

** Пусть N — база некоторой δs -операции; цепь $\eta \in N$ называется жесткой цепью базы N , если она не содержит в себе никакой другой цепи базы N . База N , состоящая из одних только жестких цепей, называется жесткой базой [см. (6)].

Жесткая база N_c CA_2 -операции есть совокупность всех таких цепей

$$\gamma_i = (\nu_1, \dots, \nu_r, \dots, p_i, \dots)$$

с различными элементами, причем каждая из цепей

$$\gamma_i = \{p_i\} = \{\sigma[\nu(n_1 \dots n_k); \mu(m_1 \dots m_l)]\},$$

где $\sigma(\nu; \mu)$ — натуральное число, соответствующее $(\nu; \mu)$, если перенумеровать всевозможные пары $(\nu; \mu)$, $\nu(p_1 \dots p_r) = \mu(p_1 \dots p_r)$ — натуральное число, соответствующее $(p_1 \dots p_r)$, если перенумеровать всевозможные кортежи $(p_1 \dots p_r)$, причем для каждой цепи

$$\theta = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_j, \dots) \in N'$$

существует единственная цепь

$$\theta^* = f_\eta(\theta) = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k, \dots) \in N'$$

такая, что среди элементов цепи η встречается каждый из элементов теоретико-множественной суммы

$$\sum_{k, j} \sigma(\nu_k; \mu_j),$$

а совокупность всех элементов цепи γ_i есть совокупность всех элементов теоретико-множественной суммы

$$\sum_{\theta \in N'} \sum_{\mu_j \in \theta, \nu_k \in f_\eta(\theta)} \sigma(\nu_k; \mu_j).$$

Пусть N — жесткая база некоторой δs -операции. Если каждую цепь этой базы упорядочить в порядке возрастания элементов цепи, то полученная совокупность цепей называется жесткой приведенной базой и обозначается через \check{N} [см. (4)].

Пусть \check{J} обозначает пространство возрастающих последовательностей натуральных чисел.

Обозначим через $N^{(n)}$ жесткую базу A_n -операции, через $N_c^{(n)}$ — жесткую базу CA_n -операции.

ЛЕММА 1. Жесткая приведенная база $\check{N}_c^{(n)}$ CA_n -операции, $n \geq 2$, является нигде не плотным множеством в пространстве \check{J} .

Доказательство. По аналогии с жесткой базой CA_2 -операции, жесткая база $N_c^{(n)}$ CA_n -операции, $n \geq 2$, есть совокупность всех таких цепей

$$\eta = (p_1, p_2, \dots, p_i, \dots)$$

с различными элементами, что каждая из цепей

$$\gamma_i = \{p_i\} = \{\sigma[\nu; \mu(m_1 \dots m_l)]\},$$

причем для каждой цепи

$$\theta = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_j, \dots) \in N'$$

существует единственная цепь

$$\theta^* = f_{\eta}(\theta) = (v_1, v_2, \dots, v_k, \dots) \in N^{(n-1)}$$

такая, что среди элементов цепи η встречается каждый из элементов теоретико-множественной суммы

$$\sum_{k, j} \sigma(v_k; \mu_j),$$

а совокупность всех элементов цепи η есть совокупность всех элементов теоретико-множественной суммы

$$\sum_{\theta \in N'} \sum_{\mu_j \in \theta, v_k \in f_{\eta}(\theta)} \sigma(v_k; \mu_j).$$

Пусть $\eta = \{p_i\} \in \check{N}_c^{(n)}$ и $\eta \in \delta_{n_1 \dots n_k}$. Тогда $p_1 < p_2 < \dots < p_i < \dots$ и

$$p_i = \sigma[v_i; \mu(m_1^i \dots m_{i_i}^i)] = n_i, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Пусть

$$t_l = \max[t_1, \dots, t_k].$$

Среди кортежей вида

$$(m_1^l \dots m_{i_l}^l \dots m_{t_l+n})$$

выберем кортеж $(m'_1 \dots m'_q)$ такой, что

$$\sigma[v_i; \mu(m'_1 \dots m'_q)] > n_k,$$

а среди кортежей вида

$$(m'_1 \dots m'_q \dots m_{q+s})$$

выберем кортеж $(m''_1 \dots m''_p)$ такой, что

$$\sigma[v_i; \mu(m''_1 \dots m''_p)] > \sigma[v_i; \mu(m'_1 \dots m'_q)].$$

Рассмотрим интервал $\delta_{n_1 \dots n_k n_{k+1}}$, где

$$n_{k+1} = \sigma[v_i; \mu(m''_1 \dots m''_p)].$$

Этот интервал не содержит ни одной цепи базы $\check{N}_c^{(n)}$.

Действительно, допустим, что существует цепь

$$\eta' = \{p'_i\} \in \check{N}_c^{(n)}$$

такая, что $\eta' \in \delta_{n_1 \dots n_k n_{k+1}}$. Тогда

$$p'_1 < p'_2 < \dots < p'_i < \dots \text{ и } p'_i = n_i, \quad i = 1, 2, \dots, k+1.$$

Так как цепь η содержит число

$$\sigma[v_i; \mu(m''_1 \dots m''_p)],$$

то, в силу строения цепей базы $N_c^{(n)}$, она должна содержать и число

$$\sigma[v_i; \mu(m'_1 \dots m'_q)].$$

Но

$$n_k < \sigma[v_i; \mu(m'_1 \dots m'_q)] < n_{k+1}$$

и для любого $i \geq k+2$

$$p'_i > n_{k+1}.$$

Следовательно,

$$\sigma[v_i; \mu(m'_1 \dots m'_q)] \in \eta \text{ и } \eta \in \check{N}_c^{(n)}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Жесткая база CA_2 -операции N_c'' находится во вполне правильном отношении с произвольным классом множеств Ξ .

Доказательство. Каков бы ни был класс множеств Ξ , $\Phi_{N_c''}(\Xi)$ инвариантно относительно счетных сумм и пересечений [см. (7), теорема III].

Пусть $N_c''^{\sigma_1 \dots \sigma_k}$ есть множество всех цепей базы N_c' , которые содержат натуральные числа $\sigma_1, \dots, \sigma_k$. Для существования вполне правильного отношения между базой N_c'' и классом множеств Ξ остается показать, что

$$\Phi_{N_c''^{\sigma_1 \dots \sigma_k}}(\Xi) \subset \Phi_{N_c''}(\Xi).$$

Предварительно покажем, что

$$\Phi_{N_c''^{\sigma}}[v(n_1 \dots n_k); \mu(m_1 \dots m_l)](\Xi) \subset \Phi_{N_c''}(\Xi).$$

Рассмотрим некоторый бэровский интервал $\delta_{m_1^* \dots m_{l^*}^*}$. Все интервалы вида $\delta_{m_1^* \dots m_{l^*-1}^* n}$, где $n \neq m_{l^*}^*$, расположим в последовательность

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i, \dots$$

Положим

$$E_{\sigma}^*[v(n_1 \dots n_k); \mu(m_1 \dots m_l)] = E_{\sigma}[v(n_1 \dots n_k); \mu(m_1 \dots m_l)],$$

если $\delta_{m_1 \dots m_l} \subset \delta_{m_1^* \dots m_{l^*-1}^*}$ или $\delta_{m_1 \dots m_l} = \delta_{m_1^* \dots m_{l^*-1}^*}$,

$$E_{\sigma}^*[v(n_1 \dots n_k); \mu(m_1^* \dots m_{l^*-1}^* i)] = E_{\sigma}[v(n_1 \dots n_k); \mu(m'_1 \dots m'_{l^*})],$$

где $\delta_{m'_1 \dots m'_{l^*}}$ есть i -й элемент последовательности $\{\xi_i\}$,

$$E_{\sigma}^*[v(n_1 \dots n_k); \mu(m_1^* \dots m_{l^*-1}^* m_{l^*} m_{l^*+1} \dots m_{l^*+r})] = E_{\sigma}[v(n_1 \dots n_k); \mu(m'_1 \dots m'_{l^*} m'_{l^*+1} \dots m'_{l^*+r})],$$

где $\delta_{m'_1 \dots m'_{l^*}}$ есть m_{l^*} -й элемент последовательности $\{\xi_j\}$. Пусть

$$\mathcal{O}^{(m_1^* \dots m_{l^*}^*)} = \Phi_{N_c''}\{E_{\sigma}\}.$$

Очевидно, если $E_{\sigma} \in \Xi$, то

$$\mathcal{O}^{(m_1^* \dots m_{l^*}^*)} \in \Phi_{N_c''}(\Xi).$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \Phi_{N_c}{}'' \sigma [v (n_1 \dots n_k); \mu (m_1 \dots m_t)] \{E_\sigma\} = \\ & = \sum_{n_1^* \dots n_k^* \dots m_1^* \dots m_t^*} \sum_{k^*=1}^{\infty} \prod_{t^*=1}^{\infty} \mathcal{C}^{(m_1^* \dots m_{t^*}^*)} E_{\sigma [v (n_1^* \dots n_{k^*}^*); \mu (m_1^* \dots m_{t^*}^*)]}, \end{aligned}$$

где $n_i^* = n_i$, $i = 1, 2, \dots, k$, $m_i^* = m_i$, $i = 1, 2, \dots, t$.

Покажем, что

$$\Phi_{N_c}{}'' \sigma [v (n_1 \dots n_k); \mu (m_1 \dots m_t)] (\Xi) \subset \Phi_{N'} (\Phi_{N_c}{}'' (\Xi)) = \Phi_{N_c}{}' (\Xi).$$

Образует множества $E_{\overline{(n_1 \dots n_k) (m_1 \dots m_k)}}$, где

$$\begin{aligned} E_{\overline{(n_1) (m_1)}} &= E_{\sigma [v (n_1); \mu (m_1)]}, \\ E_{\overline{(n_1 \dots n_k) (m_1 \dots m_k)}} &= \prod_{r=1}^k E_{\sigma [v (n_1 \dots n_r); \mu (m_1 \dots m_r)]} \prod_{r=1}^k E_{\sigma [v (n_1 \dots n_k); \mu (m_1 \dots m_r)]}, \end{aligned}$$

и множества

$$\mathcal{C}^{(m_1 \dots m_k) (n_1 \dots n_k)} = \mathcal{C}^{(m_1 \dots m_k)} \cdot E_{\overline{(n_1 \dots n_k) (m_1 \dots m_k)}}.$$

Имеем:

$$\mathcal{C}^{(m_1 \dots m_k) (n_1 \dots n_k)} \in \Phi_{N_c}{}'' (\Xi).$$

Пусть $\sigma = \sigma [v (n_1); \mu (m_1)]$. Тогда

$$\begin{aligned} \Phi_{N_c}{}'' \sigma [v (n_1); \mu (m_1)] \{E_\sigma\} &= \sum_{n_1 \dots n_k \dots m_1 \dots m_t} \prod_{k, t} \mathcal{C}^{(m_1 \dots m_t)} \cdot E_{\sigma [v (n_1 \dots n_k); \mu (m_1 \dots m_t)]} = \\ &= \sum_{n_1 \dots n_k \dots m_1 \dots m_t} \prod_{k=1}^{\infty} \mathcal{C}^{(m_1 \dots m_k)} \cdot E_{\overline{(n_1 \dots n_k) (m_1 \dots m_k)}} = \\ &= \mathcal{C}^{(n_1) (n_1)} \cdot \left(\sum_{n_1 \dots n_k \dots m_1 \dots m_t} \prod_{k=2}^{\infty} \mathcal{C}^{(m_1 \dots m_k) (n_1 \dots n_k)} \right). \end{aligned}$$

Но любой прямоугольник Бэра $\pi = \partial_{m_1} \times \partial_{n_1}$ можно взаимно однозначно и непрерывно отобразить в пространство Бэра J . Следовательно, всякой системе пар коротеж:

$$[(m_1 m_2), (n_1 n_2)], \dots, [(m_1 \dots m_k), (n_1 \dots n_k)], \dots,$$

где m_1 и n_1 фиксированы, можно единственным образом поставить в соответствие систему коротеж

$$(n_1^*), (n_1^* n_2^*), \dots, (n_1^* n_2^* \dots n_k^*), \dots$$

Перенумеровав соответственным образом множества $\mathcal{C}^{(m_1 \dots m_k) (n_1 \dots n_k)}$ и обозначив их через $\mathcal{C}^{n_1^* \dots n_k^*}$, получим:

$$\begin{aligned} \Phi_{N_c}{}'' \sigma [v (n_1); \mu (m_1)] \{E_\sigma\} &= \mathcal{C}^{(m_1) (n_1)} \left(\sum_{n_1^* \dots n_k^*} \prod_{k=1}^{\infty} \mathcal{C}^{n_1^* \dots n_k^*} \right) = \\ &= \mathcal{C}^{(m_1) (n_1)} \cdot \Phi_{N'} \{ \mathcal{C}^{\mu (n_1^* \dots n_k^*)} \}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\Phi_{N_c^*}[\nu(n_i); \mu(m_i)](\Xi) \subset \Phi_{N_c^*}(\Phi_{N_c^*}(\Xi)) = \Phi_{N_c^*}(\Xi).$$

Пусть теперь

$$\sigma = \sigma[\nu(n_1 \dots n_k); \mu(m_1 \dots m_l)];$$

если $k \neq l$, то выберем $r = \max[k, l]$. В силу строения цепей η базы N_c^* , если цепь

$$\eta \ni \sigma[\nu(n_1 \dots n_k); \mu(m_1 \dots m_l)],$$

то

$$\eta \ni \sigma[\nu(n_1 \dots n_r); \mu(m_1 \dots m_r)].$$

Рассмотрим счетную совокупность пар интервалов $\delta_{n_1 \dots n_r}, \delta_{m_1 \dots m_r}$ таких, что

$$\delta_{n_1 \dots n_r} \subset \delta_{n_1 \dots n_k}, \quad \delta_{m_1 \dots m_r} \subset \delta_{m_1 \dots m_l}.$$

Очевидно,

$$\Phi_{N_c^*}[\nu(n_1 \dots n_k); \mu(m_1 \dots m_l)]\{E_\sigma\} = \sum_{\substack{\delta_{n_1 \dots n_r} \subset \delta_{n_1 \dots n_k} \\ \delta_{m_1 \dots m_r} \subset \delta_{m_1 \dots m_l} \\ r = \max[k, l]}} \Phi_{N_c^*}[\nu(n_1 \dots n_r); \mu(m_1 \dots m_r)]\{E_\sigma\}. \quad (1)$$

На основании формулы (1), для доказательства того утверждения, что

$$\Phi_{N_c^*}[\nu(n_1 \dots n_k); \mu(m_1 \dots m_l)](\Xi) \subset \Phi_{N_c^*}(\Xi),$$

достаточно показать, что

$$\Phi_{N_c^*}[\nu(n_1 \dots n_k); \mu(m_1 \dots m_k)](\Xi) \subset \Phi_{N_c^*}(\Xi). \quad (2)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} & \Phi_{N_c^*}[\nu(n_1 \dots n_k); \mu(m_1 \dots m_k)]\{E_\sigma\} = \\ &= \sum_{n'_1 \dots n'_r \dots m'_1 \dots m'_s} \prod_{r, s=1}^{\infty} \mathcal{G}^{(m'_1 \dots m'_s)} \cdot E_{\sigma[\nu(n'_1 \dots n'_r); \mu(m'_1 \dots m'_s)]} = \\ &= \sum_{n'_1 \dots n'_i \dots m'_1 \dots m'_i} \sum_{m'_1 \dots m'_i} \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{G}^{(m'_1 \dots m'_i)} \overline{(n'_1 \dots n'_i)} = \\ &= \prod_{i=1}^k \mathcal{G}^{(m_1 \dots m_i)} \overline{(n_1 \dots n_i)} \cdot \left(\sum_{n'_1 \dots n'_i} \sum_{m'_1 \dots m'_i} \prod_{i=k+1}^{\infty} \mathcal{G}^{(m'_1 \dots m'_i)} \overline{(n'_1 \dots n'_i)} \right), \end{aligned}$$

где $n'_i = n_i$, $m'_i = m_i$, $i = 1, 2, \dots, k$. Второй сомножитель может быть легко сведен к результату $\Phi_{N_c^*}$ -операции над системой множеств $\Phi_{N_c^*}(\Xi)$.

Действительно, отобразим прямоугольник Бэра

$$\pi = \delta_{m_1 \dots m_k} \times \delta_{n_1 \dots n_k}$$

взаимно однозначно и непрерывно в пространство Бэра J . Тогда всякой системе пар кортежей

$$[(m_1 \dots m_k m_{k+1}), (n_1 \dots n_k n_{k+1})], [(m_1 \dots m_k m_{k+i} m_{k+2}), (n_1 \dots n_k n_{k+1} n_{k+2})], \dots, [(m_1 \dots m_k \dots m_{k+i}), (n_1 \dots n_k \dots n_{k+i})], \dots,$$

где кортежи $(m_1 \dots m_k)$, $(n_1 \dots n_k)$ фиксированы, единственным образом будет соответствовать система кортежей

$$(n_1^*), (n_1^* n_2^*), \dots, (n_1^* \dots n_i^*), \dots$$

Перенумеровав соответственным образом множества

$$\mathcal{C}^{(m_1 \dots m_k \dots m_k \dots i)(n_1 \dots n_k \dots n_k \dots i)}$$

и обозначив их через $\mathcal{C}^{n_1^* \dots n_i^*}$, получим:

$$\Phi_{N_c^{\sigma}}[\nu(n_1 \dots n_k); \mu(m_1 \dots m_k)]\{E_{\sigma}\} = \prod_{i=1}^k \mathcal{C}^{(m_1 \dots m_i)(n_1 \dots n_i)} \Phi_{N'}\{\mathcal{C}^{\mu(n_1^* \dots n_k^*)}\}.$$

Отсюда

$$\Phi_{N_c^{\sigma}}[\nu(n_1 \dots n_k); \mu(m_1 \dots m_k)](\Xi) \subset \Phi_{N'}(\Phi_{N_c^{\sigma}}(\Xi)) = \Phi_{N_c^{\sigma}}(\Xi).$$

Покажем теперь, что $\Phi_{N_c^{\sigma_1 \dots \sigma_k}}(\Xi) \subset \Phi_{N_c^{\sigma}}(\Xi)$. Пусть

$$\sigma_i = \sigma[\nu(n_1^i \dots n_{r_i}^i); \mu(m_1^i \dots m_{t_i}^i)], \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Если интервалы $\{\delta_{m_1^i \dots m_{t_i}^i}\}$, $i = 1, 2, \dots, k$, попарно не пересекаются, то

$$\Phi_{N_c^{\sigma_1 \dots \sigma_k}}\{E_{\sigma}\} = \prod_{i=1}^k \Phi_{N_c^{\sigma_i}}\{E_{\sigma}\}. \quad (3)$$

Действительно, если

$$x \in \Phi_{N_c^{\sigma_1 \dots \sigma_k}}\{E_{\sigma}\},$$

то

$$x \in \Phi_{N_c^{\sigma_i}}\{E_{\sigma}\}, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

т. е.

$$x \in \prod_{i=1}^k \Phi_{N_c^{\sigma_i}}\{E_{\sigma}\}.$$

Следовательно,

$$\Phi_{N_c^{\sigma_1 \dots \sigma_k}}\{E_{\sigma}\} \subset \prod_{i=1}^k \Phi_{N_c^{\sigma_i}}\{E_{\sigma}\}.$$

Пусть теперь

$$x \in \prod_{i=1}^k \Phi_{N_c^{\sigma_i}}\{E_{\sigma}\}.$$

Тогда

$$x \in \Phi_{N_c^{\sigma}}[\nu(n_1^i \dots n_{r_i}^i); \mu(m_1^i \dots m_{t_i}^i)]\{E_{\sigma}\}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Следовательно, для всякого $i = 1, 2, \dots, k$ найдутся последовательности

$$(n_1^i, n_2^i, \dots, n_p^i, \dots), \quad (m_1^i, m_2^i, \dots, m_q^i, \dots)$$

такие, что

$$n_s'^i = n_s^i, \quad s = 1, 2, \dots, r_i; \quad m_s'^i = m_s^i, \quad s = 1, 2, \dots, t_i,$$

и

$$x \in \prod_{i=1}^k \prod_{p,q} E_{\sigma [v(n_1^i \dots n_p^i); \mu(m_1^i \dots m_q^i)]}.$$

Пусть

$$\xi_i = (v(n_1^i), v(n_1^i n_2^i), \dots, v(n_1^i n_2^i \dots n_p^i), \dots)$$

и

$$\theta_i = (\mu(m_1^i), \mu(m_1^i m_2^i), \dots, \mu(m_1^i m_2^i \dots m_q^i), \dots), \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Возьмем цепь $\eta \in N_c^*$ такую, что

$$x \in \prod_{\sigma \in \eta} E_{\sigma}$$

Образует новую цепь η_1^* , положив ее равной совокупности всех элементов теоретико-множественной суммы

$$\sum_{\substack{\theta \in N_c^* \\ \theta_i, i=1, 2, \dots, k}} \sum_{\substack{\mu_j \in \theta, \\ v_l \in \eta(\theta)}} \tau(v_l, \mu_j) + \sum_{i=1}^k \sum_{\substack{\mu_j' \in \theta_i, \\ v_l' \in \xi_i}} \tau(v_l', \mu_j')$$

Тогда

$$\eta_1^* \in N_c^{*\sigma_1 \dots \sigma_k}.$$

Так как

$$x \in \prod_{\sigma \in \eta^*} E_{\sigma},$$

то

$$x \in \Phi_{N_c^{*\sigma_1 \dots \sigma_k}} \{E_{\sigma}\}.$$

Отсюда

$$\prod_{i=1}^k \Phi_{N_c^{*\sigma_i}} \{E_{\sigma}\} \subset \Phi_{N_c^{*\sigma_1 \dots \sigma_k}} \{E_{\sigma}\}$$

Следовательно,

$$\Phi_{N_c^{*\sigma_1 \dots \sigma_k}} \{E_{\sigma}\} = \prod_{i=1}^k \Phi_{N_c^{*\sigma_i}} \{E_{\sigma}\}.$$

Пусть теперь интервалы

$$\{\delta_{m_1^i \dots m_{t_i}^i}\}, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

не являются попарно не пересекающимися.

Назовем число

$$\sigma[v(n_1 \dots n_k); \mu(m_1 \dots m_t)]$$

подчиненным числу

$$\sigma[v(n_1^* \dots n_{k^*}^*); \mu(m_1^* \dots m_{t^*}^*)],$$

если выполняется одно из следующих соотношений:

$$1^0. \delta_{m_1 \dots m_l} = \delta_{m_1^* \dots m_l^*}, \\ \delta_{n_1 \dots n_k} \subset \delta_{n_1^* \dots n_k^*};$$

$$2^0. \delta_{m_1 \dots m_l} \subset \delta_{m_1^* \dots m_l^*}, \\ \delta_{n_1 \dots n_k} \subset \delta_{n_1^* \dots n_k^*};$$

$$3^0. \delta_{m_1 \dots m_l} \subset \delta_{m_1^* \dots m_l^*}, \\ \delta_{n_1 \dots n_k} = \delta_{n_1^* \dots n_k^*}.$$

Назовем систему чисел

$$\{\sigma [v(n_1^i \dots n_{k_i}^i); \mu(m_1^i \dots m_{l_i}^i)]\}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, r,$$

подчиненной системе чисел

$$\{\sigma [v(n_1^{*i} \dots n_{k_i}^{*i}); \mu(m_1^{*i} \dots m_{l_i}^{*i})]\}, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

где $r \leq s$, если для каждого числа

$$\sigma [v(n_1^i \dots n_{k_i}^i); \mu(m_1^i \dots m_{l_i}^i)], \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

найдется такое число

$$\sigma [v(n_1^{*l} \dots n_{k_l}^{*l}); \mu(m_1^{*l} \dots m_{l_l}^{*l})],$$

что ему подчинено число

$$\sigma [v(n_1^i \dots n_{k_i}^i); \mu(m_1^i \dots m_{l_i}^i)],$$

и, обратно, для всякого числа

$$\sigma [v(n_1^{*i} \dots n_{k_i}^{*i}); \mu(m_1^{*i} \dots m_{l_i}^{*i})], \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

найдется число

$$\sigma [v(n_1^p \dots n_{k_p}^p); \mu(m_1^p \dots m_{l_p}^p)],$$

которое подчинено числу

$$\sigma [v(n_1^{*i} \dots n_{k_i}^{*i}); \mu(m_1^{*i} \dots m_{l_i}^{*i})].$$

Покажем, что

$$\Phi_{N_c^{\sigma_1 \dots \sigma_k}} \{E_\sigma\} =$$

$$= \sum \Phi_{N_c^{\sigma} [v(n_1^{*1} \dots n_{p_1}^{*1}); \mu(m_1^{*1} \dots m_{q_1}^{*1})] \{E_\sigma\} \dots \Phi_{N_c^{\sigma} [v(n_1^{*s} \dots n_{p_s}^{*s}); \mu(m_1^{*s} \dots m_{q_s}^{*s})] \{E_\sigma\}},$$

где суммирование производится по всевозможным системам чисел

$$\{\sigma [v(n_1^{*i} \dots n_{p_i}^{*i}); \mu(m_1^{*i} \dots m_{q_i}^{*i})]\}, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad s \leq k,$$

удовлетворяющим условиям:

1) система чисел

$$\{\sigma [v(n_1^{*i} \dots n_{p_i}^{*i}); \mu(m_1^{*i} \dots m_{q_i}^{*i})], \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

такой, что

$$m_q' = m_q^{i^*}, \quad q = 1, 2, \dots, t_{i_p}^*;$$

б) для каждого кортежа

$$(n_1^p, \dots, n_r^p), \quad p = 1, 2, \dots, k,$$

найдется последовательность

$$(n_1^{l^p}, n_2^{l^p}, \dots, n_k^{l^p}, \dots)$$

такая, что

$$n_q^{l^p} = n_q^p, \quad q = 1, 2, \dots, r_p,$$

и обратно, для каждой последовательности

$$(n_1^{p'}, n_2^{p'}, \dots, n_k^{p'}, \dots), \quad p = 1, 2, \dots, l^*,$$

найдется хотя один кортеж

$$(n_1^{l^*}, \dots, n_{r_l^*}^{l^*})$$

такой, что

$$n_q^{p'} = n_q^{l^*}, \quad q = 1, 2, \dots, r_{l^*}^*.$$

в) среди чисел $\tau \in \eta$ будут находиться все числа

$$\{\tau [v(n_1^{l^p}, \dots, n_k^{l^p}); \mu(m_1^{i^p}, \dots, m_l^{i^p})]\},$$

где $k = 1, 2, 3, \dots, l = 1, 2, 3, \dots$; среди чисел $\{i_p\}$, $p = 1, 2, \dots, k$, находятся все числа $1, 2, \dots, l$, среди чисел $\{l_p\}$, $p = 1, 2, \dots, k$, находятся все числа $1, 2, \dots, l^*$.

Тогда среди чисел $\tau \in \eta$ найдется система чисел

$$\{\tau [v(n_1^{*i}, \dots, n_{p_i}^{*i}); \mu(m_1^{*i}, \dots, m_{q_i}^{*i})]\}, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

подчиненная системе чисел

$$\{\tau [v(n_1^i, \dots, n_{r_i}^i); \mu(m_1^i, \dots, m_{l_i}^i)]\}, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

и удовлетворяющая условиям 2) и 3), поэтому

$$x \in \prod_{i=1}^s \Phi_{N_c^* \sigma} [v(n_1^{*i}, \dots, n_{p_i}^{*i}); \mu(m_1^{*i}, \dots, m_{q_i}^{*i})] \{E_\sigma\}$$

и

$$x \in \sum \Phi_{N_c^* \sigma} [v(n_1^{*1}, \dots, n_{p_1}^{*1}); \mu(m_1^{*1}, \dots, m_{q_1}^{*1})] \{E_\sigma\} \dots \Phi_{N_c^* \sigma} [v(n_1^{*s}, \dots, n_{p_s}^{*s}); \mu(m_1^{*s}, \dots, m_{q_s}^{*s})] \{E_\sigma\},$$

где суммирование производится по всевозможным системам чисел $\sigma_1^*, \dots, \sigma_s^*$, удовлетворяющим условиям 1), 2), 3). Следовательно,

$$\Phi_{N_c^* \sigma_1 \dots \sigma_k} \{E_\sigma\} \subset \sum \Phi_{N_c^* \sigma_1} \{E_\sigma\} \dots \Phi_{N_c^* \sigma_s} \{E_\sigma\}, \quad (4)$$

где суммирование производится по всевозможным системам чисел $\sigma_1^*, \sigma_2^*, \dots, \sigma_s^*$, удовлетворяющим условиям 1), 2), 3).

Пусть

$$x \in \sum \Phi_{N_{c_1}^{\sigma_1^*}} \{E_{\sigma}\} \dots \Phi_{N_{c_s}^{\sigma_s^*}} \{E_{\sigma}\},$$

где суммирование производится по всевозможным системам чисел $\sigma_1^*, \sigma_2^*, \dots, \sigma_s^*$, удовлетворяющим условиям 1), 2), 3). Тогда найдется система чисел

$$\{\sigma_i^*\}, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

где

$$\sigma_i^* = \sigma[\nu(n_1^{*i} \dots n_{p_i}^{*i}); \mu(m_1^{*i} \dots m_{q_i}^{*i})],$$

удовлетворяющая условиям 1), 2), 3), такая, что

$$x \in \prod_{i=1}^s \Phi_{N_c^{\sigma}[\nu(n_1^{*i} \dots n_{p_i}^{*i}); \mu(m_1^{*i} \dots m_{q_i}^{*i})]} \{E_{\sigma}\};$$

для всякого $i = 1, 2, \dots, s$ найдутся последовательности

$$(m_1^i, m_2^i, \dots, m_l^i, \dots), \quad (n_1^i, n_2^i, \dots, n_k^i, \dots)$$

такие, что

$$m_t^i = m_t^{*i}, \quad t = 1, 2, \dots, q_i; \quad n_k^i = n_k^{*i}, \quad k = 1, 2, \dots, p_i,$$

и

$$x \in \prod_{i=1}^s \prod_{k, l} E_{\sigma[\nu(n_1^i \dots n_k^i); \mu(m_1^i \dots m_l^i)]}. \quad (5)$$

Пусть

$$\xi_i = (\nu(n_1^i), \nu(n_1^i n_2^i), \dots, \nu(n_1^i \dots n_k^i), \dots), \\ \theta_i = (\mu(m_1^i), \mu(m_1^i m_2^i), \dots, \mu(m_1^i \dots m_l^i), \dots)$$

и

$$x \in \prod_{\sigma \in \eta} E_{\sigma}, \quad (6)$$

где $\eta \in N_c^*$. Образует новую цепь η^* следующим образом. Положим ее равной совокупности всех элементов теоретико-множественной суммы

$$\sum_{\substack{\theta \in N^* \\ \theta \neq \theta_i, i=1, 2, \dots, s}} \sum_{\substack{\mu_j \in \theta, \\ \nu_k \in f_{\eta}(\theta)}} \sigma(\nu_k; \mu_j) + \sum_{i=1}^s \sum_{\substack{\mu'_j \in \theta_i, \\ \nu'_k \in \xi_i}} \sigma(\nu'_k; \mu'_j).$$

В силу соотношений (5) и (6),

$$x \in \prod_{\sigma \in \eta^*} E_{\sigma}.$$

Так как система чисел

$$\{\sigma[\nu(n_1^{*i} \dots n_{p_i}^{*i}); \mu(m_1^{*i} \dots m_{q_i}^{*i})]\}, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

подчинена системе чисел

$$\{\sigma[\nu(n_1^i \dots n_{p_i}^i); \mu(m_1^i \dots m_{q_i}^i)]\}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

то среди чисел $\sigma \in \gamma_l^*$ будут находиться все числа

$$\{\tau \mid \nu(n_{i_1}^i, \dots, n_{i_l}^i); \nu(m_1^i, \dots, m_{i_l}^i)\}, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

т. е.

$$\gamma_l^* \in N^{\sigma_1 \dots \sigma_k}.$$

Отсюда

$$x \in \Phi_{N_c^{\sigma_1 \dots \sigma_k}} \{E_\sigma\}.$$

Следовательно,

$$\sum \Phi_{N_c^{\sigma_1^*}} \{E_\sigma\} \dots \Phi_{N_c^{\sigma_s^*}} \{E_\sigma\} \subset \Phi_{N_c^{\sigma_1 \dots \sigma_k}} \{E_\sigma\}, \quad (7)$$

где суммирование производится по всевозможным системам чисел $\sigma_1^*, \dots, \sigma_s^*$, удовлетворяющим условиям 1), 2), 3).

В силу соотношений (4) и (7),

$$\Phi_{N_c^{\sigma_1 \dots \sigma_k}} \{E_\sigma\} = \sum \Phi_{N_c^{\sigma_1^*}} \{E_\sigma\} \dots \Phi_{N_c^{\sigma_s^*}} \{E_\sigma\}, \quad (8)$$

где суммирование производится по всевозможным системам чисел $\sigma_1^*, \dots, \sigma_s^*$, удовлетворяющим условиям 1), 2), 3).

На основании формул (1), (2), (3), (8), заключаем, что

$$\Phi_{N_c^{\sigma_1 \dots \sigma_k}} (\Xi) \subset \Phi_{N_c^*} (\Xi).$$

что и требовалось доказать.

Пусть N — жесткая база некоторой δs -операции.

Точка x называется точкой N — p -значности последовательности множеств $\{E_n\}$, если существует p и только p различных цепей базы N , в ядра которых входит точка x .

Через N^* обозначается множество всех цепей, каждая из которых содержит по крайней мере две различные цепи базы N .

Через Φ_{N^*} обозначается δs -операция, которая отбирает точки, входящие не менее чем в два различных ядра, определяемых цепями базы N .

Через $\Phi_{[Np]^*}$ обозначается δs -операция, которая отбирает точки, входящие не менее чем в $(p+1)$ различных ядер, определяемых цепями базы N .

Точки x называются точками N -конечности последовательности множеств $\{E_n\}$, если они являются точками N — p -значности последовательности множеств $\{E_n\}$ при некотором натуральном числе $p(x)$, зависящем от x .

Через $\Phi_{N^{**}}$ обозначается δs -операция, которая отбирает точки, входящие не менее чем в счетное число ядер, определяемых цепями базы N .

В силу теорем 3. И. Козловой [см. (2), теоремы 1, 2, 4] и леммы 2, справедливы следующие утверждения:

Следствие 1. Для любого класса множеств Ξ имеют место следующие соотношения:

$$\Phi_{[N_c^p]^*} (\Xi) \subset \Phi_{N_c^*} (\Xi), \quad \Phi_{[N_c^p]^* n} (\Xi) \subset \Phi_{N_c^*} (\Xi),$$

$$\Phi_{N_c^{***}} (\Xi) \subset \Phi_{N_c^*} (\Xi), \quad \Phi_{N_c^{***n}} (\Xi) \subset \Phi_{N_c^*} (\Xi).$$

Следствие 2. Если Ξ — проективный класс множеств не ниже третьего или класс CA_2 -множеств, то

$$\Phi_{\{N_c^{**p}\}^*}(\Xi) \subset \Xi, \quad \Phi_{\{N_c^{**p}\}^{**n}}(\Xi) \subset \Xi,$$

$$\Phi_{N_c^{***}}(\Xi) \subset \Xi, \quad \Phi_{N_c^{***n}}(\Xi) \subset \Xi.$$

В силу того, что класс CA_2 -множеств Ξ инвариантен относительно CA_2 -операции, т. е.

$$\Phi_{N_c^*}(\Xi) = \Xi,$$

и обладает классом вполне регулярных * трансфинитных индексов $\{\beta(x)\}$ [см. (6), класс минимальных индексов], то на основании общей теоремы о накрытии множеств, изложенной в работе З. П. Козловой [см. (3), теорема 1], и следствия 2 леммы 2 получим следующее утверждение:

Следствие 3. Для всякой последовательности CA_2 -множеств $\{E_n\}$ таких, что каждая точка множества $\Phi_{N_c^*}\{E_n\}$ является точкой не более чем N_c^* — p -значности (N_c^* -конечнозначности) последовательности множеств $\{E_n\}$, найдется такая последовательность B_2 -множеств $\{H_n\}$, что $H_n \supset E_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) и каждая точка множества $\Phi_{N_c^*}\{H_n\}$ является точкой не более чем N_c^* — p -значности (N_c^* -конечнозначности) последовательности множеств $\{H_n\}$.

В силу того, что в системе аксиом теории множеств Σ К. Гёделя [см. (9)] П. С. Новиковым установлена непротиворечивость утверждения, что, начиная с некоторого n , законы отделимости для проективных множеств n -го класса совпадают с законами отделимости для проективных множеств второго класса [см. (10)], в этой системе аксиом будет непротиворечиво

Следствие 4. Начиная с некоторого n , для всякой последовательности CA_2 -множеств $\{E_n\}$ таких, что каждая точка множества $\Phi_{N_c^*}\{E_n\}$ является точкой не более чем N_c^* — p -значности (N_c^* -конечнозначности) последовательности $\{E_n\}$, найдется такая последовательность B_n -множеств $\{H_n\}$, что $H_n \supset E_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) и каждая точка множества $\Phi_{N_c^*}\{H_n\}$ является точкой не более чем N_c^* — p -значности (N_c^* -конечнозначности) последовательности множеств $\{H_n\}$.

Пусть N — жесткая база δs -операции.

Через Φ_N обозначим δs -операцию, отбирающую точки, определяемые δs -операцией Φ_N , каждая из которых определяется множеством пепей жесткой приведенной базы \check{N} , имеющим некомпактное замыкание.

* Класс трансфинитных индексов $\{\beta(x)\} = \Lambda$ называется вполне регулярным по отношению к классу множеств Ξ , если:

- 1) для всех $\beta(x) \in \Lambda$ $\beta(x) \leq \Omega$ и $[\beta(x) = \Omega] \in \Xi$;
- 2) для всякого $E \in \Xi$ существует $\beta(x) \in \Lambda$ такое, что $E = [\beta(x) = \Omega]$;
- 3) для всяких двух $\beta_1(x)$ и $\beta_2(x) \in \Lambda$ множество $[\beta_1(x) \geq \beta_2(x)] \in \Xi$;
- 4) для всяких двух E_1 и $E_2 \in \Xi$ существуют такие $\beta_1(x)$ и $\beta_2(x) \in \Lambda$, что $[\beta_1(x) = \beta_2(x)] = E_1 \cdot E_2$ и $E_1 = [\beta_1(x) = \Omega]$, $E_2 = [\beta_2(x) = \Omega]$.

Так как произвольный класс множеств Ξ и база N_c'' находятся во вполне правильном отношении, то на основании теоремы о сравнении δs -операции $\Phi_{N_c''}$ с исходной δs -операцией Φ_N , изложенной в работе автора (4) (теорема 2), справедливо следующее утверждение:

Следствие 5. *Каков бы ни был класс множеств Ξ ,*

$$\Phi_{N_c''}(\Xi) \subset \Phi_{N_c''}(\Xi), \quad \Phi_{N_c''}^{n''}(\Xi) \subset \Phi_{N_c''}(\Xi).$$

Следствие 6. *Если Ξ — проективный класс множеств не ниже третьего класса или класс CA_2 -множеств, то*

$$\Phi_{N_c''}(\Xi) \subset \Xi, \quad \Phi_{N_c''}^{n''}(\Xi) \subset \Xi.$$

На основании общей теоремы о накрытии множеств [см. (3), теорема 1] и следствия 6 леммы 2, справедливо следующее утверждение:

Следствие 7. *Для всякой последовательности CA_2 -множеств $\{E_n\}$ таких, что каждая точка множества $\Phi_{N_c''}\{E_n\}$ определяется компактным множеством цепей базы \check{N}_c'' (множеством цепей базы \check{N}_c'' , имеющим компактное замыкание), найдется такая последовательность B_2 -множеств $\{H_n\}$, что $H_n \supset E_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) и каждая точка множества $\Phi_{N_c''}\{H_n\}$ определяется множеством цепей базы \check{N}_c'' , имеющим компактное замыкание.*

На основании утверждения П. С. Новикова [см. (10)], в системе аксиом теории множеств Σ будет непротиворечиво следующее предложение:

Следствие 8. *Начиная с некоторого n , для всякой последовательности CA_n -множеств $\{E_n\}$ таких, что каждая точка множества $\Phi_{N_c''}\{E_n\}$ определяется компактным множеством цепей базы \check{N}_c'' (множеством цепей базы \check{N}_c'' , имеющим компактное замыкание), найдется такая последовательность B_n -множеств $\{H_n\}$, что $H_n \supset E_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) и каждая точка множества $\Phi_{N_c''}\{H_n\}$ определяется множеством цепей базы \check{N}_c'' , имеющим компактное замыкание.*

§ 2. Обозначим через Φ_M δs -операцию, база которой состоит из всех последовательностей

$$(p_1, p_2, \dots, p_i, \dots),$$

где

$$p_i = v(n_1^i \dots n_{k_i}^i) \quad (i = 1, 2, 3, \dots),$$

таких, что

$$\delta_{n_1^i} \dots \delta_{n_{k_i}^i} \cdot \delta_{n_1^{i'}} \dots \delta_{n_{k_{i'}}^{i'}} = 0, \text{ если } i \neq i'.$$

ЛЕММА 3. *Операция Φ_M не мощнее A -операции.*

Доказательство. Пусть

$$E = \Phi_M \{E_{v(n_1 \dots n_k)}\},$$

где $E_{v(n_1 \dots n_k)} \in \Xi$. Покажем, что

$$E \subset \Phi_{N'}(\Xi).$$

Образуем систему множеств $\{E_{v(n_1 \dots n_k)}^*\}$ следующим образом.

Расположим все интервалы Бэра в некоторую последовательность \sum . Положим

$$E_{v(n_1)}^* = E_{v(n_1^1 \dots n_{k_1}^1)},$$

где интервал $\delta_{n_1^1 \dots n_{k_1}^1}$ есть n_1 -й элемент последовательности \sum .

Пусть $(i-1)$ — данное натуральное число. Предположим, что мы уже определили все множества $E_{v(n_1 \dots n_r)}^*$, $r \leq i-1$, и что

$$E_{v(n_1 \dots n_r)}^* = E_{v(n_1^r \dots n_{k_r}^r)}, \quad r = 1, 2, \dots, i-1.$$

Положим

$$E_{v(n_1 \dots n_{i-1} n_i)}^* = E_{v(n_1^i \dots n_{k_i}^i)},$$

где $\delta_{n_1^i \dots n_{k_i}^i}$ есть n_i -й элемент последовательности \sum такой, что он не пересекается ни с одним из интервалов $\{\delta_{n_1^r \dots n_{k_r}^r}\}$, $r = 1, 2, \dots, i-1$.

Покажем, что

$$E = \Phi_{N'} \{E_{v(n_1 \dots n_k)}^*\}.$$

Действительно, пусть $x \in E$. Тогда найдется последовательность попарно не пересекающихся интервалов $\{\delta_{n_1^i \dots n_{k_i}^i}\}$ таких, что $x \in E_{v(n_1^i \dots n_{k_i}^i)}$ для любого i . Так как интервал $\delta_{n_1^i \dots n_{k_i}^i}$ является некоторым n_i^* -м элементом последовательности \sum , то, в силу определения множеств $E_{v(n_1 \dots n_k)}^*$,

$$E_{v(n_1^*)}^* = E_{v(n_1^1 \dots n_{k_1}^1)}.$$

Пусть мы определили, что

$$E_{v(n_1^* \dots n_r^*)}^* = E_{v(n_1^r \dots n_{k_r}^r)}, \quad r = 1, 2, \dots, i-1.$$

Так как интервал $\delta_{n_1^i \dots n_{k_i}^i}$ не пересекается ни с одним из интервалов $\{\delta_{n_1^r \dots n_{k_r}^r}\}$, $r = 1, 2, \dots, i-1$, то он является некоторым n_i^* -м элементом среди тех интервалов последовательности \sum , которые не пересекаются ни с одним из интервалов $\{\delta_{n_1^r \dots n_{k_r}^r}\}$, $r = 1, 2, \dots, i-1$. В силу определения множеств $E_{v(n_1 \dots n_k)}^*$,

$$E_{v(n_1^* \dots n_{i-1}^* n_i^*)}^* = E_{v(n_1^i \dots n_{k_i}^i)}.$$

В результате система интервалов $\{\delta_{n_1^i \dots n_{k_i}^i}\}$ определит цепь

$$\gamma_i = (v(n_1^*), \dots, v(n_1^* \dots n_i^*), \dots) \in N'$$

такую, что

$$x \in \prod_{v \in \gamma_i} E_v^*,$$

т. е.

$$x \in \Phi_{N'} \{E_{\nu(n_1 \dots n_k)}^*\}.$$

Отсюда

$$E \subset \Phi_{N'} \{E_{\nu(n_1 \dots n_k)}^*\}. \quad (9)$$

Пусть теперь

$$x \in \Phi_{N'} \{E_{\nu(n_1 \dots n_k)}^*\}.$$

Тогда найдется цепь

$$\eta = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_i, \dots) \in N',$$

где $\nu_i = \nu(n_1^* \dots n_i^*)$, такая, что $x \in E_{\nu(n_1^* \dots n_i^*)}^*$ для каждого i . Среди бэровских интервалов найдется интервал $\delta_{n_1^* \dots n_{k_1}^*}^1$, занумерованный в качестве n_1^* -го элемента последовательности \sum . Очевидно,

$$E_{\nu(n_1^* \dots n_{k_1}^*)}^1 = E_{\nu(n_1^*)}^*.$$

Пусть мы определили, что

$$E_{\nu(n_1^r \dots n_{k_r}^r)} = E_{\nu(n_1^* \dots n_r^*)}^*, \quad r = 1, 2, \dots, i-1,$$

причем интервалы $\{\delta_{n_1^r \dots n_{k_r}^r}\}$, $r = 1, 2, \dots, i-1$, являются попарно не пересекающимися. Среди бэровских интервалов найдется интервал $\delta_{n_1^i \dots n_{k_i}^i}$, являющийся n_i^* -м среди тех интервалов последовательности \sum , которые не пересекаются ни с одним из интервалов $\{\delta_{n_1^r \dots n_{k_r}^r}\}$, $r = 1, 2, \dots, i-1$. Очевидно,

$$E_{\nu(n_1^i \dots n_{k_i}^i)} = E_{\nu(n_1^* \dots n_i^*)}^*.$$

В результате цепь η определит последовательность попарно не пересекающихся интервалов $\{\delta_{n_1^i \dots n_{k_i}^i}\}$ таких, что

$$x \in \prod_{i=1}^{\infty} E_{\nu(n_1^i \dots n_{k_i}^i)},$$

по последовательность $\eta_i^* = (\nu(n_1^1 \dots n_{k_1}^1), \dots, \nu(n_1^i \dots n_{k_i}^i), \dots) \in M$; следовательно,

$$x \in \Phi_M \{E_{\nu}\}.$$

Отсюда

$$\Phi_{N'} \{E_{\nu}^*\} \subset E. \quad (10)$$

В силу соотношений (9) и (10)

$$E = \Phi_{N'} \{E_{\nu}^*\},$$

что и требовалось доказать.

Пусть N — жесткая база некоторой δs -операции.

Точка x называется точкой N -нечетнозначности последовательности множеств $\{E_n\}$, если существует нечетное число цепей базы N , в ядра которых входит точка x .

Через $\Phi_{N\dots}$ обозначается δs -операция, которая отбирает точки, входящие в бесчетное число ядер δs -операции Φ_N , т. е. точки, получаемые Φ_N -операцией и являющиеся точками N -бесчетнозначности.

ТЕОРЕМА 1. Для любого класса множеств Ξ имеют место отношения:

$$\Phi_{N_c^{***}}(\Xi) \subset \Phi_{N_c^*}(\Xi), \quad \Phi_{N_c^{***n}}(\Xi) \subset \Phi_{N_c^*}(\Xi).$$

Доказательство. Пусть Ξ — произвольный класс множеств и пусть

$$E = \Phi_{N_c^*}\{E_\sigma\},$$

где $E_\sigma \in \Xi$ для любого σ . Пусть $\mathcal{C}^{(m_1^* \dots m_t^*)}$ — множества, построенные в лемме 2.

Образует множества

$$E^{m_1 \dots m_t} = \sum_{m_1^* m_2^* \dots m_t^*} \sum_{\substack{n_1 n_2 \dots n_k \dots \\ n'_1 n'_2 \dots n'_k \dots}} \prod_{k=1}^{\infty} \mathcal{C}^{(m_1^* \dots m_k^*)} \cdot E_{(n_1 \dots n_k)(m_1^* \dots m_k^*)} E_{(n'_1 \dots n'_k)(m_1^* \dots m_k^*)},$$

где $m_i^* = m_i$, $i = 1, 2, \dots, t$, последовательности $(n_1, n_2, \dots, n_k, \dots)$, $(n'_1, n'_2, \dots, n'_k, \dots)$ различны,

$$E_{(n_1 \dots n_k)(m_1^* \dots m_k^*)} = \prod_{l=1}^k E_{\sigma[v(n_1^* \dots n_l^*); \mu(m_1^* \dots m_k^*)]} \prod_{l=1}^l E_{\sigma[v(n_1^* \dots n_k^*); \mu(m_1^* \dots m_l^*)]}.$$

Множество $E^{m_1 \dots m_t}$ состоит из всех таких точек: $x \in E$, для которых найдутся последовательности $(m_1^*, \dots, m_{i_0}^*, \dots)$, где $m_i^* = m_i$, $i = 1, 2, \dots, t$, и две различные последовательности $\{n_i\}$, $\{n'_i\}$ такие, что

$$x \in \prod_{k, t^*} E_{\sigma[v(n_1 \dots n_k); \mu(m_1^* \dots m_{i_0}^*)]}$$

и

$$x \in \prod_{k, t^*} E_{\sigma[v(n'_1 \dots n'_k); \mu(m_1^* \dots m_{i_0}^*)]}.$$

Рассмотрим всевозможные пары различных интервалов $\delta_{n_1 \dots n_i}$, $\delta_{n'_1 \dots n'_i}$ одинакового ранга i , $i = 1, 2, \dots$. Очевидно, их счетное множество. Тогда множество $E^{m_1 \dots m_t}$ можно записать в виде:

$$E^{m_1 \dots m_t} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\substack{\delta_{n_1 \dots n_i} \\ \delta_{n'_1 \dots n'_i}}} \sum_{\substack{m_1^* \dots m_k^* \\ m^k = m_k, k=1, 2, \dots, t}} \sum_{\substack{n_1^* \dots n_k^* \\ n_1^{*'} \dots n_k^{*'} \\ n_k^* = n_k, n_k^{*'} = n_k', k=1, 2, \dots, i}} \prod_{k=1}^{\infty} \mathcal{C}^{(m_1^* \dots m_k^*)} \cdot E_{(n_1^* \dots n_k^*)(m_1^* \dots m_k^*)} E_{(n_1^{*'} \dots n_k^{*'})(m_1^* \dots m_k^*)}.$$

Положим

$$\begin{aligned}
 & E^{(m_1 \dots m_t)(n_1 \dots n_i)(n'_1 \dots n'_i)} = \\
 & = \sum_{\substack{m_1^* \dots m_k^* \dots \\ m_k^* = m_k, k=1, 2, \dots, t}} \sum_{\substack{n_1^* \dots n_k^* \dots \\ n_1^* \dots n_k^* \dots \\ n_k^* = n_k, n_k^* = n'_k, k=1, 2, \dots, i}} \prod_{k=1}^{\infty} \mathcal{O}^{(m_1^* \dots m_k^*)}. \\
 & \cdot E^{\overline{(n_1^* \dots n_k^*)(m_1^* \dots m_k^*)}} \cdot E^{\overline{(n_1^* \dots n_k^*)(m_1^* \dots m_k^*)}}.
 \end{aligned}$$

Очевидно,

$$E^{m_1 \dots m_t} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\substack{\delta_{n_1 \dots n_i} \\ \delta_{n'_1 \dots n'_i}}} E^{(m_1 \dots m_t)(n_1 \dots n_i)(n'_1 \dots n'_i)}. \quad (11)$$

Если $i = t$, то

$$\begin{aligned}
 & E^{(m_1 \dots m_t)(n_1 \dots n_i)(n'_1 \dots n'_i)} = \\
 & = \prod_{k=1}^t \mathcal{O}^{(m_1 \dots m_k)} E^{\overline{(n_1 \dots n_k)(m_1 \dots m_k)}} \cdot E^{\overline{(n'_1 \dots n'_k)(m_1 \dots m_k)}} \cdot \\
 & \cdot \left(\sum_{\substack{m_1^* \dots m_k^* \dots \\ n_1^* \dots n_k^* \dots}} \sum_{\substack{n_1^* \dots n_k^* \dots \\ n_1^* \dots n_k^* \dots}} \prod_{r=i+1}^{\infty} \mathcal{O}^{(m_1^* \dots m_r^*)} E^{\overline{(n_1^* \dots n_r^*)(m_1^* \dots m_r^*)}} E^{\overline{(n'_1^* \dots n'_r^*)(m_1^* \dots m_r^*)}} \right),
 \end{aligned}$$

где $m_k^* = m_k$, $n_k^* = n_k$, $n_k^* = n'_k$, $k = 1, 2, \dots, t$.

Положим

$$\mathcal{O}^{\overline{(m_1^* \dots m_r^*)(n_1^* \dots n_r^*)(n'_1^* \dots n'_r^*)}} = \mathcal{O}^{(m_1^* \dots m_r^*)} E^{\overline{(n_1^* \dots n_r^*)(m_1^* \dots m_r^*)}} \cdot E^{\overline{(n'_1^* \dots n'_r^*)(m_1^* \dots m_r^*)}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 & E^{(m_1 \dots m_t)(n_1 \dots n_i)(n'_1 \dots n'_i)} = \prod_{k=1}^t \mathcal{O}^{\overline{(m_1 \dots m_k)(n_1 \dots n_k)(n'_1 \dots n'_k)}} \cdot \\
 & \cdot \left(\sum_{\substack{m_1^* \dots m_k^* \dots \\ m_k^* = m_k, k=1, 2, \dots, t}} \sum_{\substack{n_1^* \dots n_k^* \dots \\ n_1^* \dots n_k^* \dots \\ n_k^* = n_k, n_k^* = n'_k, k=1, 2, \dots, i}} \prod_{r=i+1}^{\infty} \mathcal{O}^{\overline{(m_1^* \dots m_r^*)(n_1^* \dots n_r^*)(n'_1^* \dots n'_r^*)}} \right).
 \end{aligned}$$

Отобразим гомеоморфно параллелепипед Бэра

$$\pi = \delta_{m_1 \dots m_t} \times \delta_{n_1 \dots n_i} \times \delta_{n'_1 \dots n'_i}$$

в пространство Бэра J . Перенумеровав соответственным образом множества

$$\mathcal{O}^{\overline{(m_1^* \dots m_r^*)(n_1^* \dots n_r^*)(n'_1^* \dots n'_r^*)}}$$

и обозначив их через $\overline{\mathcal{E}^{n_1^* n_2^* \dots n_k^*}}$, получим:

$$\begin{aligned} & E^{(m_1 \dots m_t) (n_1 \dots n_i) (n'_1 \dots n'_i)} = \\ &= \prod_{k=1}^t \overline{\mathcal{E}^{(m_1 \dots m_k) (n_2 \dots n_k) (n'_1 \dots n'_k)}} \left(\sum_{n_1^* \dots n_k^*} \prod_{k=1}^{\infty} \overline{\mathcal{E}^{n_1^* \dots n_k^*}} \right) = \\ &= \prod_{k=1}^t \overline{\mathcal{E}^{(m_1 \dots m_k) (n_2 \dots n_k) (n'_1 \dots n'_k)}} \Phi_{N_c}^{\mu} \left\{ \overline{\mathcal{E}^{\mu(n_1^* \dots n_k^*)}} \right\}. \end{aligned}$$

Следовательно, при $i = t$

$$E^{(m_1 \dots m_t) (n_1 \dots n_i) (n'_1 \dots n'_i)} \subset \Phi_{N_c}^* (\Xi). \quad (12)$$

Если $t > i$, то

$$E^{(m_1 \dots m_t) (n_1 \dots n_t) (n'_1 \dots n'_i)} = \sum_{\substack{\delta_{n_1 \dots n_t} \\ \delta_{n'_1 \dots n'_i}}} E^{(m_1 \dots m_t) (n_1 \dots n_i \dots n_t) (n'_1 \dots n'_i \dots n'_t)},$$

где $\delta_{n_1 \dots n_t} \subset \delta_{n_1 \dots n_i}$, $\delta_{n'_1 \dots n'_t} \subset \delta_{n'_1 \dots n'_i}$. Так как таких пар интервалов счетное число, то, в силу соотношения (12), получим при $t > i$

$$E^{(m_1 \dots m_t) (n_1 \dots n_i) (n'_1 \dots n'_i)} \in \Phi_{N_c}^* (\Xi). \quad (13)$$

Пусть теперь $t < i$. Тогда

$$\begin{aligned} & E^{(m_1 \dots m_t) (n_1 \dots n_i) (n'_1 \dots n'_i)} = \\ &= \sum_{m_{t+1} \dots m_t \in m_i} E^{(m_1 \dots m_t) (n_1 \dots n_i) (n'_1 \dots n'_i)}, \end{aligned}$$

где $\delta_{m_1 \dots m_t} \subset \delta_{m_1 \dots m_i}$. В силу формулы (16), при $t < i$ получим:

$$E^{(m_1 \dots m_t) (n_1 \dots n_i) (n'_1 \dots n'_i)} \in \Phi_{N_c}^* (\Xi). \quad (14)$$

В силу соотношений (11) — (14),

$$E^{m_1 \dots m_t} \in \Phi_{N_c}^* (\Xi). \quad (15)$$

Положим

$$E^{*\mu(m_1 \dots m_t)} = E^{m_1 \dots m_t}$$

и пусть

$$E_1 = \Phi_M \{E^{*\mu}\}.$$

Покажем, что

$$E_1 \subset \Phi_{N_c}^{* \dots *} \{F_{\sigma}\}. \quad (16)$$

Действительно, пусть

$$x \in E_1.$$

Тогда найдется счетная система попарно не пересекающихся интервалов $\{\delta_{m_1^i \dots m_i}^{i_i}\}$ таких, что $x \in E_{m_1^i \dots m_i}^{i_i}$ для любого i . Для каждого i найдутся последовательность $(m_1^{*i}, m_2^{*i}, \dots, m_i^{*i}, \dots)$, $m_r^{*i} = m_r^i$, $r = 1, 2, \dots, t_i$, и две различные последовательности $(n_1^i, n_2^i, \dots, n_k^i, \dots)$, $(n_1'^i, n_2'^i, \dots, n_k'^i, \dots)$ такие, что

$$\begin{aligned} x &\in \prod_{k, l} E_{\sigma[\nu(n_1^i \dots n_k^i); \mu(m_1^{*i} \dots m_l^{*i})]}, \\ x &\in \prod_{k, l} E_{\sigma[\nu(n_1'^i \dots n_k'^i); \mu(m_1^{*i} \dots m_l^{*i})]}. \end{aligned} \quad (17)$$

Последовательностям $(m_1^{*i}, m_2^{*i}, \dots)$, (n_1^i, n_2^i, \dots) , $(n_1'^i, n_2'^i, \dots)$ отвечают соответственно цепи базы N' :

$$\begin{aligned} \theta_i &= (\mu(m_1^{*i}), \mu(m_1^{*i} m_2^{*i}), \dots, \mu(m_1^{*i} \dots m_l^{*i}), \dots), \\ \xi_i^0 &= (\nu(n_1^i), \nu(n_1^i n_2^i), \dots, \nu(n_1^i \dots n_k^i), \dots), \\ \xi_i^1 &= (\nu(n_1'^i), \nu(n_1'^i n_2'^i), \dots, \nu(n_1'^i \dots n_k'^i), \dots) \\ &(i = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

Так как $x \in E_1$, то $x \in E$.

Пусть цепь $\eta \in N'_c$ такова, что

$$x \in \prod_{\sigma \in \eta} E_\sigma. \quad (18)$$

Цепь η есть совокупность всех элементов теоретико-множественной суммы

$$\sum_{\theta \in N'} \sum_{\mu_j \in \theta, \nu_k \in f_\eta(\theta)} \sigma(\nu_k, \mu_j) = X,$$

в силу чего формула (18) может быть записана в виде:

$$x \in \prod_{\sigma \in X} E_\sigma. \quad (19)$$

Пусть $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots)$ — последовательность, образованная из чисел 0 и 1. Образует цепь $\eta_i^* \in N'_c$ следующим образом. Положим ее равной совокупности всех элементов теоретико-множественной суммы

$$\begin{aligned} W &= \sum_{\theta \in N' - \{\theta_i\}, i=1,2,3,\dots} \sum_{\mu_j \in \theta, \nu_k \in f_{\eta_i}(\theta)} \sigma(\nu_k, \mu_j) + \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\substack{\mu_j' \in \theta_i \\ \nu_k' \in \xi_i^{\alpha_i}}} \sigma(\nu_k', \mu_j'). \end{aligned}$$

Обозначим

$$\sum_{\theta \in N' - \{\theta_i\}, i=1,2,\dots} \sum_{\mu_j \in \theta, \nu_k \in f_{\eta}(\theta)} \sigma(\nu_k, \mu_j) = Y,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\mu'_j \in \theta_i, \nu'_k \in \xi_i^{\alpha_i}} \sigma(\nu'_k, \mu'_j) = Z.$$

Ясно, что $Y \in X$. Так как $x \in \prod_{\sigma \in X} E_{\sigma}$, то

$$x \in \prod_{\sigma \in Y} E_{\sigma}. \quad (20)$$

Множество Z состоит из таких элементов $\sigma(\nu'_k, \mu'_j)$, которые являются индексами сомножителей произведений соотношения (17) при любом i . Это значит, что

$$x \in \prod_{\sigma \in Z} E_{\sigma}. \quad (21)$$

Так как $W = Y + Z$, то, в силу формул (20) и (21),

$$x \in \prod_{\sigma \in W} E_{\sigma} = \prod_{\sigma \in \eta^*} E_{\sigma}.$$

Пусть $\{\alpha'_k\}$ есть последовательность чисел 0 и 1, отличная от последовательности $\{\alpha_k\}$, и пусть цепь η^{**} равна совокупности всех элементов теоретико-множественной суммы

$$\sum_{\theta \in N' - \{\theta_i\}, i=1,2,3,\dots} \sum_{\mu_j \in \theta, \nu_k \in f_{\eta}(\theta)} \sigma(\nu_k, \mu_j) + \\ + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\mu'_j \in \theta_i, \nu'_k \in \xi_i^{\alpha'_i}} \sigma(\nu'_k, \mu'_j).$$

В силу предыдущих рассуждений получим, что

$$x \in \prod_{\sigma \in \eta^{**}} E_{\sigma}.$$

Покажем, что цепи η^* и η^{**} различны.

Действительно, пусть $\alpha_k = \alpha'_k$ для $k < m$, $\alpha_m \neq \alpha'_m$, например, $\alpha_m = 0$, $\alpha'_m = 1$. Тогда $\xi_m^{\alpha_m} = \xi_m^0$, $\xi_m^{\alpha'_m} = \xi_m^1$, причем $\xi_m^0 \neq \xi_m^1$.

Так как в цепи η^* цепь θ_m комбинируется с цепью ξ_m^0 , а в цепи η^{**} цепь θ_m комбинируется с цепью ξ_m^1 , то цепи η^* и η^{**} различны.

Таким образом, всякой бесконечной последовательности чисел $\{\alpha_k\}$, образованной из чисел 0 и 1, соответствует цепь $\eta^* \in N_c''$ так, что

$$x \in \prod_{\sigma \in \eta^*} E_{\sigma},$$

причем различным последовательностям $\{\alpha_k\}$ соответствуют различные цепи η^* . Отсюда следует, что

$$x \in \Phi_{N_c^{\dots\dots}} \{E_\sigma\}.$$

Следовательно,

$$E_1 \subset \Phi_{N_c^{\dots\dots}} \{E_\sigma\}.$$

В силу соотношения (15) и леммы 3,

$$E_1 \in \Phi_{N_c^*}(\Xi). \quad (22)$$

Образует систему множеств

$$E_{\sigma[v(n_1 \dots n_k); \mu(m_1 \dots m_t)]}^* = \prod_{i=1}^k E_{\sigma[v(n_i \dots n_t); \mu(m_1 \dots m_t)]}^*.$$

Тогда

$$E_{\sigma[v(n_1 \dots n_k); \mu(m_1 \dots m_t)]}^* \subset E_{\sigma[v(n_1 \dots n_{k-1}); \mu(m_1 \dots m_t)]}^*.$$

Расположим все интервалы Бэра в некоторую последовательность \sum . Положим

$$\mathcal{G}(n_1 \dots n_k)(m_1 \dots m_t) = E_{\sigma[v(n_1^* \dots n_k^*); \mu(m_1 \dots m_t)]}^*,$$

где интервал $\delta_{n_1^* \dots n_k^*}$ есть n_1 -й элемент последовательности \sum .

Пусть s — данное натуральное число. Предположим, что мы уже определили все множества

$$\mathcal{G}(n_1 \dots n_k)(m_1 \dots m_t) \text{ для } t = 1, 2, 3, \dots, k < 2s,$$

и что

$$\mathcal{G}(n_1 \dots n_s)(m_1 \dots m_t) = E_{\sigma[v(p_1 \dots p_t); \mu(m_1 \dots m_t)]}^*$$

для любого интервала $\delta_{m_1 \dots m_t}$. Определим для произвольного интервала $\delta_{m_1 \dots m_t}$ множество

$$\mathcal{G}(n_1 \dots n_s \dots n_{2s} \dots n_{2s+1})(m_1 \dots m_t) = E_{\sigma[v(n_1' \dots n_{k'}'); \mu(m_1 \dots m_t)]}^*,$$

где интервал $\delta_{n_1' \dots n_{k'}'}$ есть n_{2s} -й элемент последовательности \sum вида $\delta_{p_1 \dots p_t q_1 \dots q_k}$, и

$$\mathcal{G}(n_1 \dots n_s \dots n_{2s} n_{2s+1})(m_1 \dots m_t) = E_{\sigma[v(n_1^* \dots n_{k^*}^*); \mu(m_1 \dots m_t)]}^*,$$

где интервал $\delta_{n_1^* \dots n_{k^*}^*}$ есть n_{2s+1} -й элемент последовательности \sum вида $\delta_{p_1 \dots p_t l_1 \dots l_j}$ такой, что

$$\delta_{p_1 \dots p_t q_1 \dots q_k} \cdot \delta_{p_1 \dots p_t l_1 \dots l_j} = 0.$$

Из определения множеств $\mathcal{G}(n_1 \dots n_k)(m_1 \dots m_t)$ следует, что, каковы бы ни были натуральное число s и множества

$$\mathcal{G}(n_1 \dots n_{2s})(m_1 \dots m_t) = E_{\sigma[v(n_1^* \dots n_{k^*}^*); \mu(m_1 \dots m_t)]}^*,$$

$$\mathcal{G}_{(n_1 \dots n_{2s} n_{2s+1})} (m_1^* \dots m_{t^*}^*) = E_{\sigma[v(n_1' \dots n_{k'}'); \mu(m_1^* \dots m_{t^*}^*)]},$$

интервалы $\delta_{n_1^* \dots n_{k^*}^*}$ и $\delta_{n_1' \dots n_{k'}'}$ не пересекаются, т. е.

$$\delta_{n_1^* \dots n_{k^*}^*} \cdot \delta_{n_1' \dots n_{k'}'} = 0.$$

Образуем множество

$$E_2 = \sum_{m_1 \dots m_t \dots n_1 \dots n_k \dots} \sum_{k, t} \prod_{\mathcal{G}_{(m_1 \dots m_t)}} \mathcal{G}_{(n_1 \dots n_k) (m_1 \dots m_t)},$$

где $\mathcal{G}^{m_1 \dots m_t}$ — множества, построенные в лемме 2. Покажем, что

$$E_2 \subset \Phi_{N_c^{\dots}} \{E_\sigma\}. \quad (23)$$

Действительно, пусть

$$x \in E_2.$$

Тогда найдутся последовательности $(m_1, m_2, \dots, m_t, \dots)$, $(n_1, n_2, \dots, n_k, \dots)$ такие, что

$$x \in \prod_{k, t} \mathcal{G}^{(m_1 \dots m_t)} \mathcal{G}_{(n_1 \dots n_k) (m_1 \dots m_t)}, \quad (24)$$

где

$$\mathcal{G}_{(n_1 \dots n_k) (m_1 \dots m_t)} = E_{\sigma[v(n_1^k \dots n_{r_k}^k); \mu(m_1 \dots m_t)]}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (25)$$

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots$ — последовательность, образованная из чисел 0 и 1. Положим

$$k_h = 2^h + 2^{h-1} \alpha_1 + \dots + 2 \alpha_{h-1} + \alpha_h, \quad h = 1, 2, 3, \dots \quad (26)$$

Из формулы (26) следует, что

$$k_{h+1} = 2k_h + \alpha_{h+1}, \quad h = 1, 2, 3, \dots, \quad (27)$$

и из определения множеств $\mathcal{G}_{(n_1 \dots n_{2s}) (m_1 \dots m_t)}$, $\mathcal{G}_{(n_1 \dots n_{2s} n_{2s+1}) (m_1 \dots m_t)}$ следует, что

$$\delta_{n_1^{k_h} \dots n_{r_{k_h}}^{k_h}} \supset \delta_{n_1^{k_{h+1}} \dots n_{r_{k_{h+1}}}^{k_{h+1}}}.$$

Система интервалов $\{\delta_{n_1^{k_h} \dots n_{r_{k_h}}^{k_h}}\} (h = 1, 2, 3, \dots)$ определит единственную точку бэровского пространства

$$\pi = (n_1^*, n_2^*, \dots, n_k^*, \dots) = \prod_{h=1}^{\infty} \delta_{n_1^{k_h} \dots n_{r_{k_h}}^{k_h}}.$$

В силу соотношений (24) и (25),

$$x \in \prod_{t, h} \mathcal{G}^{m_1 \dots m_t} \cdot E_{\sigma[v(n_1^{k_h} \dots n_{r_{k_h}}^{k_h}); \mu(m_1 \dots m_t)]},$$

а в силу построения множеств $E_{\sigma[v(n_1 \dots n_k); \mu(m_1 \dots m_t)]}$,

$$x \in \prod_{i,k} \mathcal{G}^{(m_1 \dots m_t)} \cdot E_{\sigma[v(n_1^* \dots n_k^*); \mu(m_1 \dots m_t)]} \in E. \quad (28)$$

Пусть цепь $\eta \in N_c^*$ такова, что

$$x \in \prod_{\sigma \in \eta} E_{\sigma}. \quad (29)$$

Положим

$$\theta = (\mu(m_1), \dots, \mu(m_1 \dots m_t), \dots), \quad \xi^* = (v(n_1^*), \dots, v(n_1^* \dots n_k^*), \dots).$$

Образует цепь $\eta^* \in N_c^*$ следующим образом. Положим ее равной совокупности всех элементов теоретико-множественной суммы

$$\sum_{\theta \in N' - \theta^*} \sum_{\mu_j \in \theta, v_k \in f_{\eta}(\theta)} \sigma(v_k, \mu_j) + \sum_{\mu'_j \in \theta^*, v'_k \in \xi^*} \sigma(v'_k, \mu'_j).$$

В силу рассуждений, аналогичных проведенным выше,

$$x \in \prod_{\sigma \in \eta^*} E_{\sigma}.$$

Пусть $\{\alpha'_k\}$ есть последовательность чисел из 0 и 1, отличная от последовательности $\{\alpha_k\}$. Покажем, что $\pi \neq \pi'$.

Действительно, пусть $\alpha_k = \alpha'_k$ при $k < m$, $\alpha_m \neq \alpha'_m$, например, $\alpha_m = 0$

$\alpha'_m = 1$. Положив $k'_h = 2^h + 2^{h-1}\alpha'_1 + \dots + 2\alpha'_{h-1} + \alpha'_h$, будем иметь:

$$k_m = 2k_{m-1} = 2s, \quad k'_m = 2k_{m-1} + 1 = 2s + 1.$$

В силу определения множеств $\mathcal{G}_{(n_1 \dots n_{2s})(m_1 \dots m_t)}$, $\mathcal{G}_{(n_1 \dots n_{2s}n_{2s+1})(m_1 \dots m_t)}$ и в силу соотношения (25),

$$\delta_{n_1^{2s} \dots n_{r_{2s}}^{2s}} \cdot \delta_{n_1^{2s+1} \dots n_{r_{2s+1}}^{2s+1}} = 0,$$

но $\pi \in \delta_{n_1^{2s} \dots n_{r_{2s}}^{2s}}$, $\pi' \in \delta_{n_1^{2s+1} \dots n_{r_{2s+1}}^{2s+1}}$. Следовательно,

$$\pi' = (n_1^{*'}, \dots, n_{k'}^{*'}, \dots) \neq \pi = (n_1^*, \dots, n_k^*, \dots).$$

Положим

$$\xi^{*'} = (v(n_1^{*'}), \dots, v(n_1^{*'} \dots n_{k'}^{*'}), \dots).$$

Образует цепь $\eta^{*'} \in N_c^*$, положив ее равной совокупности всех элементов теоретико-множественной суммы

$$\sum_{\theta \in N' - \theta^*} \sum_{\mu_j \in \theta, v_k \in f_{\eta}(\theta)} \sigma(v_k, \mu_j) + \sum_{\mu'_j \in \theta^*, v'_k \in \xi^{*'}} \sigma(v'_k, \mu'_j).$$

Очевидно,

$$x \in \prod_{\sigma \in \eta^{*'}} E_{\sigma},$$

и так как цепи ξ^* , $\xi^{*'}$ различны, то цепи η^* , $\eta^{*'}$ различны.

Таким образом, всякой бесконечной последовательности чисел $\{\alpha_k\}$, образованной из чисел 0 и 1, соответствует цепь $\eta \in N_c^*$ такая, что

$$x \in \prod_{\sigma \in \eta} E_\sigma,$$

причем различным последовательностям $\{\alpha_k\}$ соответствуют различные цепи η ; следовательно, $x \in \Phi_{N_c^*} \{E_\sigma\}$. Отсюда $E_2 \subset \Phi_{N_c^*} \{E_\sigma\}$.

Покажем, что

$$E_2 \subset \Phi_{N_c^*}(\Xi). \quad (30)$$

Действительно, образуем систему множеств

$$\mathcal{G}_{(n_1 \dots n_k)(m_1 \dots m_k)} = \prod_{r=1}^k \mathcal{G}_{(n_1 \dots n_r)(m_1 \dots m_r)} \prod_{r=1}^k \mathcal{G}_{(n_1 \dots n_k)(m_1 \dots m_r)}$$

и пусть

$$\mathcal{G}_{(m_1 \dots m_k)(n_1 \dots n_k)} = \mathcal{G}_{(m_1 \dots m_k)} \mathcal{G}_{(n_1 \dots n_k)(m_1 \dots m_k)}.$$

Тогда

$$E_2 = \sum_{m_1 \dots m_k} \sum_{n_1 \dots n_k} \prod_{k=1}^{\infty} \mathcal{G}_{(m_1 \dots m_k)(n_1 \dots n_k)}.$$

Отобразив двумерное пространство Бэра J_{xy} гомеоморфно в одномерное J , перенумеровав соответственным образом множества $\mathcal{G}_{(m_1 \dots m_k)(n_1 \dots n_k)}$ и обозначив их через $\mathcal{G}_{(n_1^* \dots n_k^*)}$, получим:

$$E_2 = \sum_{n_1^* \dots n_k^*} \prod_{k=1}^{\infty} \mathcal{G}_{(n_1^* \dots n_k^*)} = \Phi_{N'} \{ \mathcal{G}_{(n_1^* \dots n_k^*)} \}.$$

Отсюда

$$E_2 \in \Phi_{N'}(\Phi_{N_c^*}(\Xi)) = \Phi_{N_c^*}(\Xi).$$

Покажем, что

$$\Phi_{N_c^*} \{E_\sigma\} = E_1 + E_2.$$

Действительно,

$$E_1 + E_2 \subset \Phi_{N_c^*} \{E_\sigma\}. \quad (31)$$

С другой стороны, если $x \in \Phi_{N_c^*} \{E_\sigma\}$, то найдется несчетное множество $\{\eta'\}$ различных цепей $\eta' \in N_c^*$ таких, что

$$x \in \prod_{\sigma \in \eta'} E_\sigma.$$

В силу этого могут представиться два случая:

а) либо найдутся хоть одна цепь $\theta \in N'$ и несчетное множество $\{\xi'\}$

различных цепей из базы N' таких, что в каждой из цепей γ' системы $\{\gamma'\}$ цепь θ комбинируется с одной из цепей множества $\{\xi'\}$, и тогда

$$x \in E_2;$$

б) либо найдется не менее чем счетная система $\{\theta_i\}$ попарно различных цепей базы N' и для каждого i — по крайней мере две различные цепи ξ_i, ξ'_i базы N' такие, что, какова бы ни была счетная система $\{\xi_i^*\}$ цепей базы N' , где при любом i ξ_i^* совпадает либо с ξ_i , либо с ξ'_i , найдется цепь $\gamma_i^* \in \{\gamma'\}$ такая, что в ней цепь θ_i комбинируется с цепью ξ_i^* для $i = 1, 2, 3, \dots$. Так как цепи $\{\theta_i\}$ попарно различны, то найдутся счетная система попарно не пересекающихся интервалов $\{\delta_{m_1^k \dots m_{t_k}^k}\}$ и такая подпоследовательность $\{\theta_{i_k}\}$, что для любого k цепь $\theta_{i_k} \in \delta_{m_1^k \dots m_{t_k}^k}$. Так как с цепью θ_{i_k} комбинируется не менее двух цепей базы N' , то

$$x \in \prod_{k=1}^{\infty} E^{m_1^k \dots m_{t_k}^k},$$

где множество $E^{m_1^k \dots m_{t_k}^k}$ состоит из всех таких точек $x \in E$, для которых найдутся последовательность $(m_1^*, m_2^*, \dots, m_{t_k}^*, \dots)$, где $m_i^* = m_i^k$, $i = 1, 2, \dots, t_k$, и две различные последовательности $\{n_i\}$, $\{n'_i\}$ такие, что

$$x \in \prod_{k,t} E_{\sigma[\nu(n_1 \dots n_k); \mu(m_1^* \dots m_{t_k}^*)]},$$

$$x \in \prod_{k,t} E_{\sigma[\nu(n'_1 \dots n'_k); \mu(m_1^* \dots m_{t_k}^*)]}.$$

Отсюда

$$x \in \Phi_M \{E^{\mu(m_1 \dots m_t)}\} = E_1.$$

Никакая другая комбинация не приведет к несчетному множеству цепей $\{\gamma'\}$.

Следовательно,

$$\Phi_{N_c^{***}} \{E_{\sigma}\} \subset E_1 + E_2. \quad (32)$$

В силу соотношений (31) и (32),

$$\Phi_{N_c^{***}} \{E_{\sigma}\} = E_1 + E_2, \quad (33)$$

а в силу соотношений (22), (30), (33),

$$\Phi_{N_c^{***}} (\Xi) \subset \Phi_{N_c^*} (\Xi). \quad (34)$$

Множество

$$\Phi_{N_c^{***n}} \{E_{\sigma}\} = \Phi_{N_c^{***}} \{E_{\sigma}\} \cdot \Phi_{N_c^{*n}} \{E_{\sigma}\}.$$

Отсюда, в силу формулы (34) и леммы 2,

$$\Phi_{N_c^{***n}} (\Xi) \subset \Phi_{N_c^*} (\Xi),$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. Если Ξ — проективный класс множеств не ниже третьего или класс SA_2 -множеств, то

$$\Phi_{N_c^{***}}(\Xi) \subset \Xi, \quad \Phi_{N_c^{****n}}(\Xi) \subset \Xi.$$

На основании общей теоремы о накрытии множеств [см. (3), теорема 1] и следствия 1 теоремы 1 справедливо следующее утверждение:

Следствие 2. Для всякой последовательности SA_2 -множеств $\{E_n\}$ таких, что каждая точка множества $\Phi_{N_c^*}\{E_n\}$ является точкой не более чем N_c^* -счетнозначности последовательности множеств $\{E_n\}$, найдется такая последовательность B_2 -множеств $\{H_n\}$, что $H_n \supset E_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) и каждая точка множества $\Phi_{N_c^*}\{H_n\}$ является точкой не более чем N_c^* -счетнозначности последовательности множеств $\{H_n\}$.

В силу утверждения П. С. Новикова [см. (10)], в системе аксиом теории множеств Σ непротиворечиво следующее предложение:

Следствие 3. Начиная с некоторого n , для всякой последовательности SA_n -множеств $\{E_n\}$ таких, что каждая точка множества $\Phi_{N_c^*}\{E_n\}$ является точкой не более чем N_c^* -счетнозначности последовательности множеств $\{E_n\}$, найдется такая последовательность B_n -множеств $\{H_n\}$, что $H_n \supset E_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) и каждая точка множества $\Phi_{N_c^*}\{H_n\}$ является точкой не более чем N_c^* -счетнозначности последовательности множеств $\{H_n\}$.

Поступило

7. V. 1956

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Л я п у н о в А. А., Об операциях над множествами, допускающих трансфинитные индексы, Успехи матем. наук, т. 11, вып. 1(67) (1956), 243—244.
- 2 К о з л о в а З. И., О накрытии множеств. Известия Ак. наук СССР, серия матем., 19 (1955), 125—132.
- 3 К о з л о в а З. И., О накрытии множеств. II, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 21 (1957), 349—370.
- 4 С т у п и н а И. Д., О некоторых свойствах Γ -операции, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 21 (1957), 329—348.
- 5 С т у п и н а И. Д., О некоторых свойствах A_2 -операции, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 21 (1957), 579—594.
- 6 О ч а н Ю. С., О переместимости δ -операций, Матем. сборник, 10 (52): 3 (1942), 151—163.
- 7 К а н т о р о в и ч Л. В. и Л и в е н с о н Е. М., Sur quelques théorèmes concernant la théorie des ensembles projectifs, Comptes Rendus de Paris, 204. № 5 (1937), 466—468.
- 8 Н о в и к о в П. С., Sur la séparabilité des ensembles projectifs de seconde classe, Fundamenta Mathematicae, XXX (1935), 459—466.
- 9 Г ё д е л ь К., Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств, перевод А. А. Маркова, Успехи матем. наук, т. III вып. 1 (23) (1948), 96—149.
- 10 Н о в и к о в П. С., О непротиворечивости некоторых положений дескриптивной теории множеств, Труды Матем. института им. В. А. Стеклова Ак. наук СССР, XXXVIII (1951), 279—315.

СОДЕРЖАНИЕ ТОМА 21

Андрунакиевич В. А. Антипростые и сильно идемпотентные кольца . . .	125—144
Виноградов И. М. Тригонометрические суммы, содержащие значения многочлена	145—170
Владимиров В. С. Об одном интегро-дифференциальном уравнении . . .	3—52
Владимиров В. С. Об интегро-дифференциальном уравнении переноса частиц	681—710
Ворович И. И. О некоторых прямых методах в нелинейной теории колебаний пологих оболочек	747—784
Галонен Л. М. О функционально-инвариантных решениях волнового уравнения в n -мерной области	53—72
Дубовицкий А. Я. О структуре множеств уровня дифференцируемых отображений n -мерного куба в k -мерный куб	371—408
Евграфов М. А. Линеиные операторы в пространстве аналитических функций многих комплексных переменных	223—234
Ефимов А. В. Оценка модуля непрерывности функций класса \tilde{H}_2^1 . . .	283—288
Жижченко А. Б. О числе подполей поля алгебраических функций от одного переменного	541—548
Зуховицкий С. И. О минимальных расширениях линейных функционалов в пространстве непрерывных функций	409—422
Ивашев-Мусатов О. С. О коэффициентах тригонометрических нуль-рядов . . .	559—578
Киселев А. А. и Ладыженская О. А. О существовании и единственности решения нестационарной задачи для вязкой несжимаемой жидкости	655—680
Козлова З. И. О накрытии множеств. II	349—370
Конюшков А. А. О классах Липшица	423—448
Кострикин А. И. О связи между периодическими группами и кольцами Ли . . .	289—310
Кострикин А. И. Кольца Ли, удовлетворяющие условию Энгеля	515—540
Левин Б. Я. Обобщение теоремы Картрайт о целой функции конечной степени, ограниченной на последовательности точек	549—558
Левитан Б. М. Письмо в редакцию	599
Мальцев А. И. Свободные топологические алгебры	171—198
Малышев А. В. Асимптотическое распределение целых точек на некоторых эллипсоидах	457—500
Мищенко Е. Ф. Асимптотическое вычисление периодических решений систем дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных	627—654
Поддерюгин В. Д. Условия упорядочиваемости группы	199—208
Понтиягин Л. С. Асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных	605—626
Постников А. Г. и Пятацкий И. И. Нормальные по Бернулли последовательности знаков	501—514
Постников А. Г. и Пятацкий И. И. Нормальная по Маркову последовательность знаков и нормальная цепная дробь	729—746

Саргсян И. С. О дифференцировании разложений по собственным функциям оператора Штурма — Лиувилля	263—282
Сахнович Л. А. О приведении вольтерровских операторов к простейшему виду и обратных задачах	235—262
Слободецкий Л. Н. Обобщенные решения параболических и эллиптических систем	809—834
Слугин С. Н. Итерационный метод односторонних приближений решения операторных уравнений	117—124
Соболев С. Л. К семидесятилетию Владимира Ивановича Смирнова	449—456
Стечкин С. Б. О коэффициентах Фурье непрерывных функций	93—116
Стечкин С. Б. О тригонометрических рядах, расходящихся в каждой точке	711—728
Ступина И. Д. О некоторых свойствах Γ -операции	329—348
Ступина И. Д. О некоторых свойствах A_2 -операции	579—594
Ступина И. Д. О некоторых свойствах SA_2 -операции	835—862
Темляков А. А. Интегральное представление функций двух комплексных переменных	89—92
Тиман А. Ф. Добавление к работе А. В. Ефимова «Оценка модуля непрерывности функций класса \tilde{H}_2^1 »	595—598
Филиппов А. Ф. О разностном методе решения задачи Трикоми	73—88
Хион Я. В. Упорядоченные полугруппы	209—222
Хион Я. В. Кольца, нормированные при помощи полугрупп	311—322
Штраус А. В. Об обобщенных резольвентах и спектральных функциях дифференциальных операторов четного порядка	785—808
От редакции. 40 лет советской математики	601—604



